Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

Στοχαστική Χρηματοοικονομική

Τελική Εξέταση, Φεβρουάριος 2014

Λέκτορας Μ. Ανθρωπέλος

Θέμα 1ο (*4 βαθμοί*)

(a) Έστω $(X_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ ένας **τυχαίος περίπατος** με μέτρο πιθανότητας $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Είναι η στοχαστική διαδικασία $(Y_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$, που ορίζεται από την σχέση

$$Y_n = 2X_n^2 - n$$

martingale κάτω από το μέτρο P;

(b) Έστω ένα υπόδειγμα μιας περιόδου, όπου υπάρχουν **τρεις δυνατές καταστάσεις** (τριωνυμικό υπόδειγμα), δηλαδή $\Omega=\{G,M,B\}$ και οι τιμές που παίρνει μια μετοχή στον χρόνο 1 είναι

$$S_1(G) = uS_0,\ S_1(M) = mS_0 \text{ και } S_1(B) = dS_0,$$

όπου υποθέσουμε ότι:

$$d \leq m < u.$$

Αποδείξτε ότι στο τριωνυμικό αυτό υπόδειγμα ισχύει η ισοδυναμία:

$$(NA) \Leftrightarrow d < 1 + r < u.$$

Θέμα 2ο (*3 βαθμοί*)

(a) Θεωρείστε ένα υπόδειγμα μιας περιόδου με M καταστάσεις και N μετοχές. Πως ορίζεται το σύνολο των **μέτρων πιθανότητας που είναι ουδέτερα στον κίνδυνο**; Αποδείξτε ότι **αν υπάρχει έστω και ένα** μέτρο πιθανότητας ουδέτερο στον κίνδυνο τότε **δεν υπάρχει arbitrage** στην αγορά του υποδείγματος.

(b) Πότε μια αγορά ονομάζεται **πλήρης**; Ποια είναι η σχέση που συνδέει το σύνολο των **ουδέτερο στον κίνδυνο μέτρων πιθανότητας**, της **πληρότητας** της αγοράς και της **υπόθεσης non-arbitrage (NA)**;

<u>Θέμα 3^{ο} (*3 βαθμοί*)</u>

(a) Θεωρείστε ένα τριωνυμικό υπόδειγμα με μία μόνο μετοχή όπου $S_0 = 10$, $S_1(G) = 11$, $S_1(M) = 9$, $S_1(B) = 8$ και $r = 5\%$. Βρείτε το **σύνολο των μέτρων πιθανότητας που είναι ουδέτερα στον κίνδυνο**, καθώς και **το εύρος των τιμών** ενός **δικαιώματος πώλησης** με τιμή άσκησης $K = 10$, που διατηρούν την υπόθεση (ΝΑ).

(b) Αποδείξτε ότι αν η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι **εκθετική**, δηλαδή

$$U(x) = -e^{-\gamma x}, \text{ όπου } \gamma > 0$$

η **τιμή αδιαφορίας** για κάθε νέο αξιόγραφο είναι **ανεξάρτητη από τον αρχικό του πλούτο**.

Απαντήστε σε όλες τις παραπάνω ερωτήσεις.
Παρακαλώ επιστρέψτε το παρόν φύλλο μαζί με τις απαντήσεις σας
Καλή επιτυχία!!!