

ΠΡΩΤΟ ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Τμήμα: Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής
Εξάμηνο: Γ'

Μ. Ανθρωπέλος

Άσκηση 1

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} \max\{z &= -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4\} \\ \text{υπό τους περιορισμούς:} \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 &\geq 4 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 6 \\ x_2 - x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geq 0 \\ x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

- α) Γράψτε το πρόβλημα στην τυποποιημένη του μορφή.
β) Κάντε τον αρχικό πίνακα simplex.
γ) Κάντε τα επόμενα δύο βήματα τις μεθόδου simplex. Χρειάζεται να κάνετε και άλλα βήματα; Αν ναι γιατί;

Άσκηση 2

Ένας παραγωγός έχει την δυνατότητα να παράγει 3 διαφορετικά προϊόντα. Για τον επόμενο μήνα θέλει να επιλέξει τον καλύτερο δυνατό συνδυασμό παραγωγής από τα 3 αυτά προϊόντα. Για την μηνιαία παραγωγή των προϊόντων αυτών μπορεί να χρησιμοποιήσει τον μοναδικό του εργαζόμενο το πολύ για 24 μέρες, ενώ έχει στην διάθεσή του εξωτερικούς συνεργάτες που συνολικά μπορούν να δουλέψουν 60 μέρες τον μήνα. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται η χρήση του εργαζόμενου και εξωτερικών συνεργατών (σε μέρες) που χρειάζονται για την παραγωγή μία μονάδας καθενός από τα 3 προϊόντα. Στην τελευταία γραμμή του πίνακα δίνονται και τα έσοδα που αναμένονται από την πώληση κάθε μίας μονάδας από τα προϊόντα:

	Χρήση ανά μονάδα		
	Προϊόν 1	Προϊόν 2	Προϊόν 3
Μέρες εργασίας εργαζόμενου	1/2	2	1
Μέρες εργασίας εξωτερικών συνεργατών	1	2	4
Έσοδα πώλησης	6	14	13

- α) Κάντε την μοντελοποίηση του προβλήματος ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, όπου το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση των εσόδων.
β) Λύστε το πρόβλημα με την μέθοδο simplex (χρειάζονται 4 πίνακες).
γ) Ποια είναι τα αναμενόμενα μέγιστα δυνατά έσοδα για τον παραγωγό και με ποιο συνδυασμό παραγωγής θα μπορέσει να τα πετύχει;

- δ) Διατυπώστε το δυϊκό πρόβλημα. Τι εκφράζουν οι μεταβλητές ελέγχου στο δυϊκό πρόβλημα;
 ε) Λαμβάνοντας υπόψη τον τελικό πίνακα simplex του αρχικού προβλήματος δώστε την λύση του δυϊκού.

Άσκηση 3

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} \max\{z = 3y\} \\ \text{υπό τους περιορισμούς:} \\ -x + y \leq 4 \\ x + y \leq 8 \\ -x + y \geq -4 \\ x, y \geq 0 \end{aligned}$$

- α) Λύστε το πρόβλημα με την μέθοδο simplex.
 β) Λύστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο της γραφικής επίλυσης.
 γ) Υποθέστε ότι η αντικειμενική συνάρτηση αλλάζει και γίνεται $z = x + cy$, όπου c είναι μία σταθερά. Ποιες είναι οι τιμές της παραμέτρου c , για τις οποίες οι λύσεις που βρήκατε στα ερωτήματα α) και β) παραμένουν οι βέλτιστες λύσεις και σε αυτό το αλλαγμένο πρόβλημα;

Άσκηση 4

Ο παρακάτω πίνακας είναι ο πίνακας simplex μετά από έναν αριθμό βημάτων σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (μεγιστοποίησης) για θετικές μεταβλητές ελέγχου.

c_B	Βάση	3	5	0	0	0	0	0	$\Delta.M.$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
?	x_6	?	?	10	?	-5	?	?	20
?	x_4	?	?	-3	?	-0,67	?	?	2
?	x_1	?	?	2	?	-0,33	?	?	8
?	x_2	?	?	-1	?	0,33	?	?	2
?	x_7	?	?	-2	?	-10	?	?	64
	z_j	?	?	?	?	?	?	?	?
	$c_j - z_j$?	?	?	?	?	?	?	

- α) Πόσες είναι οι μεταβλητές ελέγχου, οι χαλαρές μεταβλητές και οι τεχνητές μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στο παραπάνω πίνακα;
 β) Συμπληρώστε τα ερωτηματικά στον πίνακα.

γ) Είναι ο τελικός πίνακας simplex του προβλήματος ή θα χρειαζόταν να κάνετε και άλλο ένα βήμα;

Άσκηση 5

Έστω το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\{z = 100 - (4x + 6y)\}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$20x + 60y \geq 70$$
$$50x + 40y \geq 90$$
$$x, y \geq 0$$

- α) Χρησιμοποιώντας τεχνητές μεταβλητές γράψτε το πρόβλημα στην τυποποιημένη του μορφή.
β) Κάντε τον αρχικό πίνακα simplex και στην συνέχεια κάντε τα 2 επόμενα βήματα της μεθόδου.
γ) Έχει το πρόβλημα λύση ή είναι μη φραγμένο;

Άσκηση 6

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\{z = 4x + 2y\}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$3x + 4y \leq 12$$
$$x + y \geq 4$$
$$4x + 2y \leq 4$$
$$x, y \geq 0$$

- α) Κάντε την γραφική απεικόνιση της εφικτής περιοχής (δηλ. του συνόλου των εφικτών λύσεων).
β) Με βάση το σχήμα στην ερώτηση α), τι μπορούμε να πούμε για την λύση του προβλήματος;

Άσκηση 7

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\{z = 8x + 3y - w\}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$x + y + w \geq 6$$
$$3x - 3y - w \leq 9$$

$$x + 2y + 6w = 7$$
$$x, y, w \geq 0$$

α) Διατυπώστε το δυϊκό του πρόβλημα.

β) Ποια θα είναι η σχέση της βέλτιστης λύσης του αρχικού με αυτήν του δυϊκού προβλήματος; Ποια είναι η σχέση των βέλτιστων τιμών του αρχικού με το δυϊκό πρόβλημα;

Άσκηση 8

Μία επενδυτική εταιρία θέλει να επενδύσει 10 νομισματικές μονάδες (ν.μ.) σε 3 διαφορετικές επενδύσεις (αμοιβαία κεφάλαια εσωτερικού, αμοιβαία κεφάλαια εξωτερικού και ομόλογα εσωτερικού) για τον επόμενο χρόνο. Η αναμενόμενη ετήσια απόδοση των τριών αυτών επενδύσεων είναι 15%, 10% και 5% αντίστοιχα. Επειδή ο διαχειριστής της εταιρία πιστεύει ότι οι επενδύσεις στα αμοιβαία έχουν υψηλότερο κίνδυνο, αποφασίζει να μην επιτρέψει η συνολική επένδυση στα αμοιβαία να είναι περισσότερη από το 50% του συνολικού αρχικού κεφαλαίου. Επίσης, λόγω νομικών θεμάτων δεν μπορεί η επένδυση στο εξωτερικό να είναι μεγαλύτερη από 30% και η επένδυση σε ομόλογα να είναι μικρότερη από 15%.

α) Μοντελοποιήστε το παραπάνω πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, όπου το ζητούμενο είναι η μέγιστη δυνατή αναμενόμενη απόδοση.

β) Κάντε τον αρχικό πίνακα simplex, καθώς και το πρώτο βήμα της μεθόδου.

Άσκηση 9

Δίνεται το εξής πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\{z = 6x + y\}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$x + y \leq 10$$

$$y \leq 4$$

$$2x + y \geq 14$$

$$x + 3y \geq 12$$

$$x, y \geq 0$$

α) Λύστε το πρόβλημα με την μέθοδο της γραφικής επίλυσης.

β) Με δεδομένους τους περιορισμούς του παραπάνω προβλήματος, δώστε ένα παράδειγμα αντικειμενικής συνάρτησης για το οποίο οι βέλτιστες λύσεις είναι άπειρες.

Άσκηση 10

Σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (μεγιστοποίησης), ο πίνακας είναι ο πίνακας simplex μετά από κάποια βήματα της μεθόδου:

C_B	Βάση	10 x	20 y	0 w	0 v	0 u	Δ.Μ.
?	w	?	?	?	3	-8	2
?	y	?	?	?	2	-1	3
?	x	?	?	?	-4	1	5
	Z_j	?	?	?	?	?	?
	$C_j - Z_j$?	?	?	?	?	

- α) Συμπληρώστε τα ερωτηματικά στο παραπάνω πίνακα. Εξηγήστε γιατί ο παραπάνω πίνακας είναι ο τελικός πίνακας της μεθόδου simplex.
 β) Ποια είναι η βέλτιστη τιμή του προβλήματος;
 γ) Ποια είναι η βέλτιστη λύση;