



Θέμα 1^ο (4 βαθμοί)

(a) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ένας **τυχαίος περίπατος** με μέτρο πιθανότητας $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Είναι η στοχαστική διαδικασία $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, που ορίζεται από την σχέση

$$Y_n = 2X_n^2 - n$$

martingale κάτω από το μέτρο P ;

(b) Θεωρείστε ένα διωνυμικό υπόδειγμα με παραμέτρους

$$S_0 = 100, S_1(G) = 105, S_1(B) = 95 \text{ και } r = 10\%.$$

Ποιο είναι το **χαρτοφυλάκιο** που **αντισταθμίζει πλήρως τον κίνδυνο** πώλησης ενός αξιόγραφου που έχει απόδοση $V_1(G) = 150$ και $V_1(B) = 50$; Ποια θα πρέπει να είναι η **τιμή του αξιόγραφου**;

Θέμα 2^ο (3 βαθμοί)

(a) Έστω ένα τριωνυμικό υπόδειγμα με δύο μετοχές με τα παρακάτω δεδομένα:

$$S_0^{(1)} = 15, S_1^{(1)}(G) = 17, S_1^{(1)}(M) = 15, S_1^{(1)}(B) = 12$$

$$S_0^{(2)} = 20, S_1^{(2)}(G) = 23, S_1^{(2)}(M) = 21, S_1^{(2)}(B) = 17$$

και $r = 0$. Υπολογίστε **την τιμή ενός δικαιώματος πώλησης** στην πρώτη μετοχή με τιμή άσκησης $K = 16$.

(b) Πότε ένα χαρτοφυλάκιο ονομάζεται **αυτοχρηματοδοτούμενο (self-financing)**; Ποια θα πρέπει να είναι η σχέση που συνδέει τις τιμές (Δ_0, B_0) και τις τιμές (Δ_1, B_1) ενός αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου σε μία αγορά μιας μόνο μετοχής; (Δ_i και B_i είναι ο αριθμός των μετοχών και το ποσό δανεισμού στην αρχή της περιόδου i).

Θέμα 3^ο (3 βαθμοί)

(a) Γιατί μια **συνάρτηση χρησιμότητας** θα πρέπει να είναι **(γνησίως) αύξουσα**; Τι σημαίνει για τις προτιμήσεις του επενδυτή ότι η συνάρτηση χρησιμότητάς του είναι **κοίλη**;

(b) Έστω ένας επενδυτής με **εκθετική** συνάρτηση χρησιμότητας δηλαδή,

$$U(x) = -e^{-\gamma x}, \text{ όπου } \gamma > 0.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε μοντέλο μίας περιόδου, M καταστάσεων και N μετοχών το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο είναι **ανεξάρτητο από τον αρχικό του πλούτο**.

**Απαντήστε σε όλες τις παραπάνω ερωτήσεις.
Παρακαλώ επιστρέψτε το παρόν φύλλο μαζί με τις απαντήσεις σας
Καλή επιτυχία!!!**