ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ

Μιχάλης Ανθρωπέλος

Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Θερινό Εξάμηνο 2015

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές αφορούν το μάθημα επιλογής "***Στοχαστική Χρηματοοικονομική***" του 8ου εξαμήνου του Τμήματος *Τραπεζικής και Χρηματοοικονομικής Διοικητικής* του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Κεντρικός σκοπός του μαθήματος είναι η μελέτη θεμελιωδών αρχών μαθηματικής μοντελοποίησης μερικών εκ των βασικών χρηματοοικονομικών προβλημάτων, όπως η *τιμολόγηση σε πλήρεις και μη αγορές* και η αναζήτηση του *βέλτιστου χαρτοφυλακίου*. Το μεγαλύτερο μέρος της ύλης αφιερώνεται σε μοντέλα διακριτού χρόνου (discrete time models), ενώ προς το τέλος τους μαθήματος γίνεται μία σύντομη εισαγωγή σε μοντέλα συνεχούς χρόνου καθώς και σε σχετικές εφαρμογές.

Η βασική συνταγή για την μοντελοποίηση που αναπτύσσεται στις παρακάτω σελίδες είναι το *διωνυμικό υπόδειγμα*, όπως αυτό εισήχθη στην σχετική βιβλιογραφία από τους J.C. Cox, S. Ross και M. Rubinstein το 1979. Το υπόδειγμα αυτό, αν και ιδιαίτερα απλοϊκό, εμπεριέχει όλες τις βασικές ιδέες και τις θεμελιώδεις αρχές της no-arbitrage τιμολόγησης αξιόγραφων σε αγορές που ικανοποιούν την μαρκοβιανή ιδιότητα, τόσο σε μία όσο και σε περισσότερες χρονικές περιόδους.

Η ευκολία του εν λόγω μοντέλου απαλλάσσει τον αναγνώστη από τις μαθηματικές τεχνικές δυσκολίες και η επικέντρωση δίνεται στην χρηματοοικονομική αξία των ιδεών. Κάνοντας ένα βήμα πιο κοντά σε ρεαλιστικότερα μοντέλα, στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στην διαφοροποίηση των μεθόδων τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνων όταν οι αγορές δεν είναι πλήρεις, όταν δηλαδή η δημιουργία χαρτοφυλακίων που αντισταθμίζουν τον κίνδυνο στην ολότητά του δεν είναι πάντα εφικτή. Στο πλαίσιο αυτό αναπτύσσονται ιδέες πάνω στην μαθηματική μοντελοποίηση της αναζήτησης βέλτιστου χαρτοφυλακίου, κυρίως μέσα από την θεωρία των συναρτήσεων χρησιμότητας (utility functions), καθώς και στο πως αυτές οδηγούν σε καταστάσεις και τιμολογήσεις ισορροπίας.

Στο τελευταίο μέρος του μαθήματος δίνεται μια σύντομη εισαγωγική αναφορά σε μοντέλα συνεχούς χρόνου (θυσιάζοντας ωστόσο την μαθηματική ακρίβεια).

Ένα αντιπροσωπευτικό ξενόγλωσσο σύγγραμμα για την ύλη του μαθήματος είναι το "*Stochastic Finance*" Vol. 1, του Steve Shreve, ενώ άλλες αναφορές δίνονται μέσα στο κείμενο.

Οι σημειώσεις αυτές είναι πιθανόν να εμπεριέχουν λάθη και παραλείψεις.

This edition on June 15, 2015.

Chapter 1

Διακριτοί Χώροι Πιθανότητας

1.1 Χώροι Πιθανότητας και Τυχαίες Μεταβλητές

Όταν ένα πείραμα τύχης (ή ένα υπό μελέτη φαινόμενο) έχει διακριτό (δηλαδή αριθμήσιμο) σύνολο δυνατών ενδεχομένων, η μοντελοποίηση γίνεται σε χώρους πιθανότητας που ονομάζονται διακριτοί. Ένας δειγματικός χώρος ονομάζεται διακριτός όταν έχει αριθμήσιμο σύνολο στοιχείων. Για παράδειγμα το πείραμα τύχης 3 ρίψεων ενός νομίσματος ο δειγματικός χώρος είναι

$$\Omega = \{\text{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}\}$$

όπου H δηλώνει το αποτέλεσμα Heads (κεφαλή) και T το αποτέλεσμα Tails (γράμματα) στην αντίστοιχη ρίψη. Διακριτοί δειγματικοί χώροι ονομάζονται χώροι πιθανότητας όταν ταιριάζονται με ένα μέτρο πιθανότητας. Πιο συγκεκριμένα, μία απεικόνιση

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

όπου $\mathcal{P}(\Omega)$ είναι το σύνολο όλων των των υποσυνόλων του Ω[1] ονομάζεται μέτρο πιθανότητας του χώρου Ω αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

i. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \quad \forall A \subset \Omega.$

ii. $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$

iii. Για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ξένα ενδεχόμενα του συνόλου $\mathcal{P}(\Omega)$, ισχύει ότι

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_n\right)$$

Το ζευγάρι $(\Omega, \mathbb{P})$ ονομάζεται *διακριτός χώρος πιθανότητας*. Οι πιθανότητες που δίνει ένα μέτρο πιθανότητας σε ένα σύνολο $A \subset \Omega$ μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\omega).$$

[1] Το σύνολο $\mathcal{P}(\Omega)$ ονομάζεται δυναμοσύνολο του Ω (power set).

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{1η ρίψη να είναι H}) &= \mathbb{P}(\{HHH\}\cup\{HHT\}\cup\{HTH\}\cup\{HTT\})\\ &= p^3+p^2(1-p)+p^2(1-p)+p(1-p)^2\\ &= p^3+p(1-p)(1+p)=p^3+p(1-p^2)=p\end{aligned}$$

Όπου η ποσότητα p είναι η πιθανότητα που δίνει το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ να έλθει κεφαλή στην κάθε ρίψη (υποθέτουμε ανεξαρτησία στα αποτελέσματα των ρίψεων).

Προκειμένου να μελετήσουμε τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν σε έναν χώρο πιθανότητας εισάγουμε συναρτήσεις που μετατρέπουν τον χώρο ενδεχομένων Ω, από έναν χώρο με διακριτά μη ποσοτικά στοιχεία (π.χ. αποτελέσματα ρίψεων) σε χώρο που περιέχει το σύνολο των τιμών των μεταβλητών που θέλουμε να μελετήσουμε. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται *τυχαίες μεταβλητές* (τ.μ.) και είναι της μορφής $X:\Omega\to\mathbb{R}$. Για παράδειγμα αν μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε τις κεφαλές στις 3 ρίψεις ενός νομίσματος, ορίζουμε την συνάρτηση $X(\cdot)$ ως εξής:

$$\begin{aligned}X(\{HHH\}) &= 3\\ X(\{HHT\}) &= X(\{HTH\})=X(\{THH\})=2\\ X(\{HTT\}) &= X(\{TTH\})=X(\{THT\})=1\\ X(\{TTT\}) &= 0\end{aligned}$$

Παρατήρηση 1. *Όταν μια τ.μ. παίρνει την ίδια τιμή για κάθε $\omega\in\Omega$ τότε ονομάζεται εκφυλισμένη τ.μ. (degenerate random variable) και θεωρείται σταθερά.*

Για κάθε τ.μ. X ορισμένη σε έναν διακριτό χώρο πιθανότητας ορίζουμε την *συνάρτηση πιθανότητάς* της ως εξής

$$\mathbb{P}_X(X=k)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega:X(\omega)=k\})$$

για κάθε $k\in\mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ αναπαριστά το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει η τ.μ. X. Για παράδειγμα η τ.μ. X που μετρά των αριθμών των κεφαλών στις 3 ρίψεις έχει συνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P}_X(X=0)=1/8$, $\mathbb{P}_X(X=1)=3/8$, $\mathbb{P}_X(X=2)=3/8$ και $\mathbb{P}_X(X=3)=1/8$, κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ που δίνει την ίδια πιθανότητα στην κεφαλή και στα γράμματα ($p=1/2$).

Παρατήρηση 2. *Σε περίπτωση που χρησιμοποιείται διαφορετικό μέτρο πιθανότητας στον χώρο Ω τότε οι τιμές της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. X θα είναι διαφορετικές. Για παράδειγμα αν χρησιμοποιείται ένα μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbb{P}}$ που δίνει πιθανότητα 2/3 στο ενδεχόμενο να έλθει κεφαλή σε κάθε μία ρίψη (μη δίκαιο νόμισμα) τότε η αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X κάτω από το μέτρο $\tilde{\mathbb{P}}$ θα είναι $\tilde{\mathbb{P}}_X(X=0)=1/27$, $\tilde{\mathbb{P}}_X(X=1)=6/27$, $\tilde{\mathbb{P}}_X(X=2)=12/27$ και $\tilde{\mathbb{P}}_X(X=3)=8/27$.*

Με την χρήση των τ.μ. μεταφερόμαστε από τον χώρο Ω στον χώρο $\mathcal{X}$, από το σύνολο ενδεχομένων του χώρου Ω στο σύνολο των τιμών των τ.μ. και από το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ στο συνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P}_X$.[2]

[2]Συχνά για λόγους ευκολίας παραλείπουμε τον υποδείκτη στην συνάρτηση πιθανότητας. Θα πρέπει να τονιστεί όμως ότι οι συναρτήσεις $\mathbb{P}$ και $\mathbb{P}_X$ δεν ταυτίζονται.

Παρατήρηση 3. *Η κατανομή μιας τ.μ. X ονομάζεται διωνυμική (binomial) αν μετράει τον αριθμό των "νικών" σε ένα συγκεκριμένο αριθμό πειραμάτων τύχης που έχουν μόνο δύο πιθανά αποτελέσματα (νίκη ή ήττα) με ανεξαρτησία αποτελεσμάτων και την ίδια πιθανότητα. Στην ουσία πρόκειται για πεπερασμένες και ανεξάρτητες επαναλήψεις μιας κατανομής Bernoulli. Ο συμβολισμός που χρησιμο-ποιούμε είναι $X \sim B(n,p)$, όπου n είναι ο αριθμός των επαναλήψεων του πειράματος και p η πιθανότητα νίκης σε κάθε πείραμα. Η κατανομή πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:*

$$\mathbb{P}_X(X=k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}p^k(1-p)^{n-k}$$

για κάθε $k = 0, 1, ..., n$.

1.2 Αναμενόμενη Τιμή (Expected Value)

Για κάθε τ.μ. X που ορίζεται σε έναν διακριτό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathbb{P})$ ορίζουμε την αναμενόμενη τιμή της ως εξής:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = \sum_{k\in\mathcal{X}} k\mathbb{P}_X(X=k).$$

Η έννοια της αναμενόμενης τιμής χρησιμοποιείται ιδιαίτερα συχνά σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές και αυτό γιατί μπορεί να θεωρηθεί σαν μία περίληψη της τ.μ. σε έναν μόνο αριθμό. Θα πρέπει να τονιστεί ότι η αναμενόμενη τιμή αναφέρεται κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας κάτι που σημαίνει ότι η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]$ μπορεί κάλλιστα να διαφέρει από την αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[X]$. Στο παράδειγμα των 3 ρίψεων έχουμε $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = 1,5$ και $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[X] = 2$ (οι υπολογισμοί αυτοί αφήνονται σαν **άσκηση**). Ωστόσο, αν δεν έχουμε διάκριση σε ξεχωριστά μέτρα πιθανότητας, ο υποδείκτης στον συμβολισμό της αναμενόμενης τιμής παραλείπεται.

Παρατήρηση 4. *Μια από τις βασικότερες ιδιότητες της αναμενόμενης τιμής είναι ότι*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\alpha X + \beta Y + \gamma] = \alpha\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] + \beta\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y] + \gamma,$$

όπου X και Y δύο τ.μ. και α, β και γ πραγματικοί αριθμοί (σταθερές).

Με την χρήση της αναμενόμενης τιμής μπορούμε να δημιουργήσουμε και άλλες ποσότητες που εκφράζουν συγκεκριμένες ιδιότητες μια τ.μ. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι η διακύμανση (variance) που μετρά την αναμενόμενη τετραγωνική απόσταση της τ.μ. από την αναμενόμενη τιμή της:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\mathbb{P}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(X - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X])^2].$$

Παρατήρηση 5. *Βασικές ιδιότητες της διακύμανσης είναι οι εξής:*

- $\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\mathbb{P}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X^2] - (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X])^2$.
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\mathbb{P}}(\alpha X) = \alpha^2\,\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\mathbb{P}}(X)$.
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}_{\mathbb{P}}(X \pm Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}_{\mathbb{P}}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}_{\mathbb{P}}(X) \pm 2\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$, *όπου* $\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\mathbb{P}}(X,Y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(X - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X])(Y - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y])]$

- $\mathbb{V}\text{ar}_{\mathbb{P}}(\alpha) = 0$.

*για κάθε τ.μ. X, Y και πραγματικό αριθμό α (**οι αποδείξεις αφήνονται σαν ασκήσεις**).*

Για παράδειγμα, στη διωνυμική κατανομή έχουμε ότι $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = np$ και $\mathbb{V}\text{ar}_{\mathbb{P}}(X) = np(1-p)$.

Ένα ιδιαίτερα χρήσιμο αποτέλεσμα σχετικά με την αναμενόμενη τιμή μας τ.μ. είναι το ακόλουθο θεώρημα, που ονομάζεται συχνά (ανισότητα Jensen).

Θεώρημα 1. *Για κάθε τ.μ. X, μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ και κυρτή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει η εξής ανισότητα[3]:*

$$f(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X)].$$

Για τις κοίλες συναρτήσεις ισχύει η αντίθετη ανισότητα, δηλαδή $f(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]) \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X)]$ (για παράδειγμα αν η f είναι κυρτή τότε η συνάρτηση $-f$ είναι κοίλη).

1.3 Δεσμευμένες Κατανομές (Conditional Distributions)

Πολλές φορές σε οικονομικές εφαρμογές η πληροφορία για ένα φαινόμενο (πείραμα τύχης) έρχεται τμηματικά, κάτι που σημαίνει ότι η ανάλυση τυχαίων μεγεθών όπως αυτά απεικονίζονται σε τ.μ. θα πρέπει να αφήνει την δυνατότητα να λαμβάνεται κάποια πληροφορία υπόψη. Στο παράδειγμα με τις 3 ρίψεις, αν γνωρίζουμε ότι στην πρώτη ρίψη έχουμε κεφαλή τότε το ενδεχόμενο $A = \{\text{τουλάχιστον 2 κεφαλές}\}$ θα έχει προφανώς διαφορετική πιθανότητα σε σχέση με την κατάσταση χωρίς πληροφόρηση. Ο τρόπος που υπολογίζεται η πιθανότητα όταν ξέρουμε (δεδομένου ότι) έχει συμβεί το ενδεχόμενο $B = \{\text{κεφαλή στην πρώτη ρίψη}\}$ δίνεται με τον εξής τρόπο:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

που ισούται με 3/4 όταν το νόμισμα είναι δίκαιο. Γενικότερα για κάθε ενδεχόμενο B για το οποίο ισχύει ότι $\mathbb{P}(B) > 0$, ορίζεται το *δεσμευμένο μέτρο πιθανότητας* (ή απλά δεσμευμένη πιθανότητα) σύμφωνα με την σχέση $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, για κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η απεικόνιση $\mathbb{P}(\cdot|B) : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ είναι ένα νέο μέτρο πιθανότητας. Παρόμοια αλλάζει και η συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών. Στο παράδειγμά μας με τις 3 ρίψεις η τ.μ. X δοθέντος του ότι έχει γίνει το ενδεχόμενο B θα έχει (δεσμευμένη) συνάρτηση πιθανότητας (ή αλλιώς **δεσμευμένη κατανομή**) $\mathbb{P}_X(k|B)$ που δίνεται από τις τιμές $\mathbb{P}_X(X=0|B) = 0$, $\mathbb{P}_X(X=1|B) = 1/4$, $\mathbb{P}_X(X=2|B) = 1/2$ και $\mathbb{P}_X(X=3|B) = 1/4$, όταν το αρχικό μέτρο $\mathbb{P}$ δίνει τις ίδιες πιθανότητες σε κεφαλή και γράμματα (θεωρεί το νόμισμα δίκαιο).

Από την στιγμή που η δεσμευμένη πιθανότητα δίνει και αυτή ένα μέτρο πιθανότητας, μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή κάθε τ.μ. κάτω από αυτό το μέτρο, που λαμβάνει

[3] Μια συνάρτηση f καλείται κυρτή (convex) αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\lambda \in [0,1]$ ισχύει ότι

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Μια συνάρτηση ονομάζεται κοίλη (concave) αν ισχύει η αντίθετη ανισότητα για κάθε επιλογή x, y και λ.

υπόψη την πληροφορία ότι ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο είναι ήδη δεδομένο. Ο συμβολισμός που χρησιμο-ποιείται είναι ο ακόλουθος:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|B] = \sum_{k\in\mathcal{X}} k\mathbb{P}_X(X = k|B).$$

Αυτό που συνήθως γίνεται στην μοντελοποίηση είναι ότι η πληροφορία που δίνει την δέσμευση είναι η τιμή μιας συγκεκριμένης τ.μ. Αν γνωρίζουμε ότι μια τ.μ. έχει μια δεδομένη τιμή τότε αυτή η πληροφορία μπορεί να αλλάξει την συνάρτηση πιθανότητας μιας άλλης τ.μ. (αρκεί να μην είναι ανεξάρτητες). Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας ως προς μια τ.μ. δίνεται με παρόμοιο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, αν γνωρίζουμε ότι μια τ.μ. Y είναι ίση με y τότε η δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. X δίνεται ως εξής:

$$\mathbb{P}_X(X = k|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = y\})}{\mathbb{P}_Y(Y = y)}.$$

Η πιθανότητα στον αριθμητή ονομάζεται από *κοινού συνάρτηση πιθανότητας* των τυχαίων μεταβλητών X και Y. Αν στο παράδειγμά μας έχουμε την τ.μ. Y να αναπαριστά τον αριθμό των κεφαλών στην 1η ρίψη τότε έχουμε π.χ. $\mathbb{P}_X(X = 2|Y = 1) = 1/2$.

Παρόμοια ορίζεται και η αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X δεδομένου ότι ξέρουμε την πληροφορία για την τιμή μιας άλλης τ.μ. Y. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y = y] = \sum_{k\in\mathcal{X}} k\mathbb{P}_X(X = k|Y = y),$$

για κάθε $y \in \mathcal{Y}$. Θα πρέπει να τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y = y]$ είναι γενικά συνάρτηση της τιμής y. Αυτό σημαίνει ότι σε περίπτωση που δεν γνωρίζουμε την τιμή που θα πάρει η τ.μ. Y τότε και η αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y]$ είναι επίσης μια τ.μ.

Άσκηση 1. *Στο παράδειγμα με τις 3 ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος βρείτε την συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y]$, όπου X ο αριθμός των κεφαλών και Y ο αριθμός των κεφαλών στην πρώτη μόνο ρίψη.*

Παρατήρηση 6. *Ακραία παραδείγματα της δεσμευμένης αναμενόμενης τιμής είναι:*

1. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|X = k] = k$ *(δεδομένο ότι $X = k$ η τ.μ. X παύει πλέον να είναι τυχαία). Πιο γενικά μπορούμε να γράψουμε $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|X] = X$ (**η απόδειξη δίνεται σαν άσκηση**).*

2. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XY|Y] = Y\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y]$ *(αν το Y είναι δεδομένο, τότε βγαίνει έξω από την αναμενόμενη τιμή, λογίζεται δηλαδή σαν σταθερά).*

3. *Επίσης, αν X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.[4] κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$, τότε $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]$ (αν η Y δεν επηρεάζει την X τότε κάθε πληροφορία για την Y δεν αλλάζει την αναμενόμενη τιμή της X) (**η απόδειξη δίνεται σαν άσκηση**).*

[4] Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y ονομάζονται ανεξάρτητες κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$, αν

$$\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{X = k\})\mathbb{P}(\{Y = y\}), \quad \forall k \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}.$$

1.4 Στοχαστικές Διαδικασίες/Ανελίξεις (Stochastic Processes)

Μια στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) ή αλλιώς ανέλιξη είναι μια οικογένεια (συλλογή) τυχαίων μεταβλητών. Μία βασική κατηγοριοποίηση στοχαστικών διαδικασιών είναι ανάμεσα σε αυτές διακριτού χρόνου και αυτές συνεχούς χρόνου. Μία σ.δ. διακριτού χρόνου είναι μια αριθμήσιμη συλλογή από τυχαίες μεταβλητές, όπου η κάθε μία αναπαριστά την τιμή της διαδικασίας σε μια χρονική στιγμή. Πιο συγκεκριμένα, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = (X_0, X_1, X_2, X_3, ...)$ είναι μια σ.δ. διακριτού χρόνου όπου οι υποδείκτες μετράνε τον χρόνο, π.χ. X_1 είναι η τιμή της διαδικασίας στον χρόνο 1 (γενικά ο χρόνος μπορεί να μετριέται σε διαφορετικές μονάδες χρόνου, όπως ώρες, ημέρες, μήνες, χρόνια κτλ). Είναι σαφές ότι μια σ.δ. διακριτού χρόνου χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσουμε την χρονική εξέλιξη μιας ποσότητας όταν ο χρόνος μετριέται σε διακριτές χρονικές στιγμές[5]. Για παράδειγμα, η σ.δ. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μπορεί να αναπαριστά την τιμή του αργού πετρελαίου στο τέλος της ημέρας, δηλαδή X_5 είναι η τιμή του πετρελαίου στο τέλος της πέμπτης μέρας (έχοντας την σημερινή μέρα σαν αρχική). Ασφαλώς, για κάθε χρονική στιγμή $n \in \mathbb{N}$, η μεταβλητή X_n είναι μια τ.μ.

Η περίπτωση μιας σ.δ. συνεχούς χρόνου είναι παρόμοια. Η μόνο διαφορά είναι ότι ο χρόνος δεν μετριέται σε διακριτές χρονικές στιγμές αλλά συνεχώς, κάτι που σημαίνει ότι η συλλογή των τ.μ. που αποτελούν την σ.δ. είναι μη αριθμήσιμη (αν έχουμε παρατηρήσει την πορεία μιας σ.δ. συνεχούς χρόνου για μια περίοδο, θα πάρουμε μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου). Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται είναι $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$. Τέτοιες διαδικασίες χρησιμοποιούνται στην μοντελοποίηση οικονομικών μεταβλητών που αλλάζουν τιμή θεωρητικά σε κάθε χρονική στιγμή (π.χ. οι ισοτιμίες, οι τιμές των ομολόγων ή αυτές των μετοχών κτλ).

Τυχαίος περίπατος (random walk)

Ένα από τα πλέον γνωστά παραδείγματα σ.δ. διακριτού χρόνου είναι ο τυχαίος περίπατος (τ.π.) που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην μοντελοποίηση του τυχαίου παράγοντα με αναμενόμενη τιμή μηδέν, αλλά θετική διακύμανση που μεγαλώνει ως προς τον χρόνο. Ο τ.π. ορίζεται ως εξής: Κάτω από ένα δεδομένο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$, ορίζουμε πρώτα μια συλλογή από ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου

$$R_k = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } p; \\ -1, & \text{με πιθανότητα } 1-p. \end{cases}$$

Η σ.δ. $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μετράει στην ουσία την "νίκη" (τιμή 1) ή την "ήττα" (τιμή -1) σε ένα τυχαίο πείραμα που έχει μόνο δύο αποτελέσματα και επαναλαμβάνεται σε κάθε μία από τις επιλεγμένες διακριτές τιμές. Ο τ.π. είναι η σ.δ. $(X_n)n \in \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (συνήθως θέτουμε την αρχική τιμή $X_0 = 0$).

Άσκηση 2. *Υπολογίστε τις αναμενόμενες τιμές* $\mathbb{E}[X_3]$ *και* $\mathbb{E}[X_4]$.

[5] Στις παρούσες σημειώσεις θα ασχοληθούμε με σ.δ. που θα έχουν πεπερασμένο μόνο ορίζοντα, δηλαδή η σ.δ. δεν θα ορίζεται από μία χρονική στιγμή N και μετά.

Οι πιθανότητες που ενδιαφέρουν τους ερευνητές όταν μελετούν στοχαστικές διαδικασίες είναι της μορφής $\mathbb{P}(X_n = k|X_m = y, X_j = x)$ όπου $j < m < n$ τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές. Με άλλα λόγια, ο υπολογισμός των πιθανοτήτων γίνεται δεδομένης κάποια πληροφορίες που έχουμε πάρει από την διαδικασία σε προηγούμενες (όχι απαραίτητα όλες) τις χρονικές στιγμές. Ένα απλό παράδειγμα είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_2 = 2, X_1 = 1)$ όπου X_n είναι ένας τ.π. (πιθανότητα οι συσσωρευμένες νίκες μέχρι και την στιγμή 3 να είναι μία, δοθέντος ότι έχουμε νίκες στα δύο πρώτα βήματα του τ.π.). Είναι σαφές ότι η εν λόγω πιθανότητα είναι ίση με $1 - p$ (ο υπολογισμός της **αφήνεται σαν άσκηση**).

Μια σημαντική ιδιότητα που έχει ο τ.π. είναι ότι για τις δεσμευμένες πιθανότητες όπως η $\mathbb{P}(X_n = k|X_m = y, X_j = x)$, δεν χρειάζεται να λαμβάνεται υπόψη όλη η πληροφορία αλλά μόνο η πιο πρόσφατη. Για παράδειγμα, $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_2 = 2, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_3 = 1|X_2 = 2)$. Όταν μια σ.δ. ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα ονομάζεται διαδικασία Markov. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1. *Μια σ.δ. διακριτού χρόνου $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει την ιδιότητα Markov αν για κάθε χρονικές στιγμές $n_1 < n_2 < ... < n_k < n$ ισχύει ότι:*

$$\mathbb{P}(X_n = x|X_{n_1} = x_1, X_{n_2} = x_2, ..., X_{n_k} = x_k) = \mathbb{P}(X_n = x|X_{n_k} = x_k),$$

όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για $i = 1, 2, ..., k$.

Με απλά λόγια για τις πιθανότητες τιμών μιας σ.δ. Markov δεν μας ενδιαφέρει όλη η πορεία της διαδικασίας που μας δίνει η πληροφόρηση που τυχόν έχουμε, αλλά μόνο το που βρίσκεται στην τελευταία χρονική στιγμή της πληροφόρησης.[6]

Η έννοια της πληροφορίας

Ο τρόπος που μοντελοποιείται η πληροφορία και η ροή της στον χρόνο είναι πολύ συγκεκριμένος. Η πληροφόρηση που δίνουν οι τιμές που παίρνει μια σ.δ. κατά την εξέλιξη του χρόνου μέχρι μια δεδομένη χρονική στιγμή k (δηλαδή οι τιμές $(X_1, X_2, ..., X_k)$), συμβολίζεται ως $\mathcal{F}_k^X$ και ονομάζεται filtration που παράγεται από την διαδικασία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μέχρι την χρονική στιγμή k. Πιο γενικά, $\mathcal{F}_k^X$ ορίζεται ως το σύνολο που περιέχει όλα τα πιθανά ενδεχόμενα που μπορούν να πάρουν οι τιμές τις σ.δ. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από την χρονική στιγμή 1 μέχρι την στιγμή k. Όλη η συλλογή $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται filtration παραγόμενο από την σ.δ. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Επίσης λέμε ότι μια τ.μ. Y είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη ($\mathcal{F}_k$-measurable) αν η πληροφορία που βρίσκεται στο $\mathcal{F}_k$ εμπεριέχει την πληροφορία για την τιμή της τ.μ. Y. Για παράδειγμα η τ.μ. X_s είναι $\mathcal{F}_k^X$-μετρήσιμη για κάθε $s \leq k$.

Αν $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένας τ.π. τότε είναι σαφές ότι $\mathcal{F}_k^X = \mathcal{F}_k^R$, όπου $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η σ.δ. που δίνει τα ξεχωριστά βήματα του τ.π.

Έτσι λοιπόν, αντί να γράφουμε $\mathbb{P}(X_n = x|X_1, X_2, ..., X_k)$ ή $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n|X_1, X_2, ..., X_k]$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbb{P}(X_n = x|\mathcal{F}_k^X)$ ή $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n|\mathcal{F}_k^X]$. Επομένως όταν μια σ.δ. είναι Markov, τότε $\mathbb{P}(X_n = x|\mathcal{F}_k^X) = \mathbb{P}(X_n = x|X_k)$.

[6]Στις οικονομικές εφαρμογές, η ιδιότητα Markov είναι αντίστοιχη της ασθενούς μορφής της υπόθεσης της αποτελεσματικής αγοράς (Efficient Market Hypothesis ή εν συντομία EMH). Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση (που έχει τις ρίζες της στις εργασίες του Louis Bachelier (1900) αλλά αναπτύχθηκε στα μοντέρνα χρηματοοικονομικά από τον Eugene Fama (1970)), όλη η πληροφορία που υπάρχει στην αγορά ενσωματώνεται στις πιο πρόσφατες τιμές, δηλαδή οι συμμετέχοντες στην αγορά αναπροσαρμόζουν τις τιμές ισορροπίας αμέσως μόλις υπάρξει καινούργια πληροφόρηση. Με άλλα λόγια, κανένας επενδυτής δεν μπορεί να εκμεταλλευτεί παρελθοντική πληροφόρηση για να αποκτήσει πλεονέκτημα σε σχέση με τους άλλους επενδυτές. Αν η EMH ισχύει τότε τα υποδείγματα που μοντελοποιούν τις τιμές αξιόγραφων θα πρέπει να είναι σ.δ. με την ιδιότητα Markov.

Σημειώνεται σε αυτό το σημείο ότι όταν η πληροφορία στα μοντέλα αγορών έρχεται μόνο από μια σ.δ. τότε ο εκθέτης στον συμβολισμό παραλείπεται.

Ιδιότητα tower

Η ιδιότητα Tower αναφέρεται στις δεσμευμένες αναμενόμενες τιμές με διαφορετική δέσμευση. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε τ.μ. X και filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_k]|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$$

για κάθε $n < k$. Δηλαδή, στις δεσμευμένες αναμενόμενες τιμές αναμενόμενων τιμών κρατάμε την δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή με την *λιγότερη* πληροφόρηση. Μια απλή εφαρμογή της ιδιότητας tower είναι ότι $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_k]\right] = \mathbb{E}[X]$ (μιας και $\mathbb{E}[X]$ μπορεί να γραφτεί $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_0]$).

Η ιδιότητα μπορεί να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις όπου έχουμε την πληροφορία να παράγεται από μόνο μία τ.μ., δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|Y]\right] = \mathbb{E}[X]$$

για κάθε τυχαίες μεταβλητές X και Y.

Άσκηση 3. *Στο παράδειγμα των 3 ρίψεων, αποδείξτε ότι $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|Y]\right] = \mathbb{E}[X]$, όπου X ο αριθμός των κεφαλών στις 3 ρίψεις και Y ο αριθμός των κεφαλών στην πρώτη ρίψη, χωρίς όμως να υποθέσετε ότι το νόμισμα είναι δίκαιο.*

Ιδιότητα Martingale

Ορισμός 2. *Μια σ.δ. διακριτού χρόνου $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται martingale (MG) κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n.$$

Με άλλα λόγια, όταν μια σ.δ. είναι $\mathbb{P}$-MG τότε η αναμενόμενη τιμή της στην επόμενη χρονική στιγμή είναι ίδια με τιμή της τελευταίας χρονικής στιγμής (κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}$ η διαδικάσία δεν αναμένεται να αλλάξει, δηλαδή $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = 0$).[7]

Πρόταση 1. *Αν μια σ.δ. διακριτού χρόνου $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $\mathbb{P}$-MG, τότε για κάθε $k \leq n$ ισχύει ότι:*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n|\mathcal{F}_k] = X_k.$$

Απόδειξη
Αφού $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $\mathbb{P}$-MG, από τον ορισμό ισχύει ότι $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$. Παίρνοντας και στα δύο μέλη δεσμευμένες αναμενόμενες τιμές ως προς την πληροφορίας $\mathcal{F}_{n-2}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]|\mathcal{F}_{n-2}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-2}].$$

[7]Παρόμοιος είναι και ο ορισμός για τις σ.δ. συνεχούς χρόνου, δηλαδή η σ.δ. $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ είναι $\mathbb{P}$-MG αν ισχύει:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s, \quad \forall s \leq t.$$

Από την ιδιότητα tower το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας ισούται με $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n|\mathcal{F}_{n-2}]$ ενώ το δεξί μέλος από την ιδιότητα Martingale είναι ίσο με X_{n-2}. Επομένως έχουμε ότι $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n|\mathcal{F}_{n-2}] = X_{n-2}$ και για την ολοκλήρωση της απόδειξης αρκεί να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να φτάσουμε στην χρονική στιγμή k. ■

Θέτοντας $k = 0$ έχουμε ότι $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n] = X_0$, δηλαδή μια σ.δ. που είναι martingale έχει την ίδια αναμενόμενη τιμή σε κάθε χρονική στιγμή, και αυτή η αναμενόμενη τιμή συμπίπτει με την αρχική τιμή της διαδικασίας.

Άσκηση 4. *Κάτω από ποιο μέτρο πιθανότητας είναι ο τ.π. martingale;*

Λύση
Από το γεγονός ότι ο τ.π. έχει την ιδιότητα Markov έχουμε ότι $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n|X_{n-1}]$. Επίσης,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n|X_{n-1}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[R_1 + R_2 + ... + R_n|X_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_{n-1} + R_n|X_{n-1}] \\
&= X_{n-1} + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[R_n|X_{n-1}] \\
&= X_{n-1} + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[R_n] \quad (\textit{λόγω της ανεξαρτησίας}) \\
&= X_{n-1} + 1p + (-1)(1-p) \\
&= X_{n-1} + 2p - 1
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ότι $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$ αν και μόνο αν $p = 1/2$, δηλαδή ο τ.π. είναι $\mathbb{P}$-MG αν η οι πιθανότητες νίκης και ήττας σε κάθε βήμα του περιπάτου είναι ίδιες.

Άσκηση 5. *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένας τ.π. με μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ για το οποίο $p = 1/2$. Αποδείξτε ότι η σ.δ. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται από την σχέση $Y_n = X_n^2 - n$ είναι $\mathbb{P}$-MG.*

Ολοκληρώνοντας το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 3. *Μια σ.δ. διακριτού χρόνου $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται:*

i. submartingale (sub-MG) κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$$

ii. supermartingale (super-MG) κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n.$$

Chapter 2

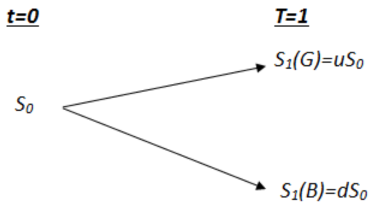
Το Διωνυμικό Μοντέλο

Το διωνυμικό υπόδειγμα (binomial model) μολονότι είναι ιδιαίτερα απλοϊκό και φανερά πέρα από κάθε πραγματική εφαρμογή, έχει τα ελάχιστα απαραίτητα στοιχεία για να αναδείξει τις βασικές αρχές τιμολόγησης no-arbitrage και της αντιστάθμισης κινδύνου (hedging) σε πλήρεις αγορές (complete markets).

2.1 Μοντέλο μιας περιόδου (One-period model)

Υποθέτουμε ότι έχουμε μόνο δύο στιγμές στον χρόνο, $t = 0$ (σήμερα) και $T = 1$ (μια μελλοντική στιγμή). Θεωρητικά υποθέτουμε ότι δεν συμβαίνει τίποτα ανάμεσα στο σήμερα και την στιγμή $T = 1$. Στο μοντέλο αυτό υπάρχουν αρχικά δύο αξιόγραφα. Το ένα που ονομάζεται ριψοκίνδυνο (ή αβέβαιας αξίας) αξιόγραφο/περιουσιακό στοιχείο (risky asset) και ένα που δεν εμπεριέχει καθόλου κίνδυνο. Το risky asset είναι αυτό που εισάγει την τυχαιότητα στο υπόδειγμα, η τιμή του συμβολίζεται με $(S_n)_{n=0,1}$ και μπορεί να υποτεθεί ότι μοντελοποιεί (πολύ απλοϊκά) την τιμή μιας μετοχής, ενός δείκτη, μιας ισοτιμίας κτλ. Χωρίς απώλεια της γενικότητας θα ονομάζουμε (μάλλον συμβολικά) το αξιόγραφο αυτό *μετοχή*, αν και θα πρέπει να τονιστεί ότι μπορεί το μοντέλο να αναφέρεται σε κάποιο άλλο αξιόγραφο.

Η αρχική τιμή S_0 είναι ένας γνωστός θετικός πραγματικός αριθμός (θετικός γιατί υποθέτουμε ότι το αξιόγραφο έχει αξία για το κάτοχό του και δεν εμπεριέχει κάποια υποχρέωση). Από την άλλη, η τιμή στην χρονική στιγμή $T = 1$ είναι τυχαία (γιαυτό και το αξιόγραφο είναι risky) και μπορεί να πάρει **δύο μόνο** τιμές. Αυτό σημαίνει ότι το πείραμα τύχης που δίνει την τιμή της μετοχής έχει δειγματικό χώρο που αποτελείται από δύο μόνο ενδεχόμενα, ένα καλό, $\{G\}$ (στην άνοδο της αξίας της μετοχής) και ένα κακό, $\{B\}$ (το οποίο αντιστοιχεί στην πτώση της), δηλαδή $\Omega = \{G, B\}$ και ο χώρος πιθανότητας στο διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου είναι ένα ζευγάρι $(\Omega, \mathbb{P})$, όπου $\mathbb{P}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας που δίνει μια πιθανότητα p στο ενδεχόμενο $\{G\}$ και μια πιθανότητα $1 - p$ στο $\{B\}$. Οι δύο τιμές που παίρνει η τ.μ. S_1 είναι $S_1(G) = uS_0$ και $S_1(B) = dS_0$, όπου $0 < d < u$. Αν ακόμα $d < 1 < u$, τότε όντως έχουμε άνοδο της μετοχής στο ενδεχόμενο $\{G\}$ και πτώση στο ενδεχόμενο $\{B\}$. Διαγραμματικά έχουμε



Το άλλο αξιόγραφο είναι ακίνδυνο (risk-free) και είναι ουσιαστικά ο δανεισμός (υποθέτουμε ίδιο επιτόκιο για έναν επενδυτή που δανείζει ή δανείζεται νομισματικές μονάδες). Και στα δύο πιθανά ενδεχόμενα μία μονάδα τοποθετημένη στο ακίνδυνο αξιόγραφο γίνεται $1 + r$, όπου r είναι το επιτόκιο για την μία περίοδο (υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει default risk, δηλαδή κίνδυνος χρεοκοπίας για τον δανειστή).

Άλλες υποθέσεις που βάζουμε στο υπόδειγμα αυτό είναι ότι μπορούμε να κάνουμε short-selling (ανοικτή πώληση) της μετοχής, δηλαδή μπορούμε να την δανειστούμε και να την πουλήσουμε αναλαμβάνοντας την υποχρέωση να την αγοράσουμε στην χρονική στιγμή $T = 1$ και να την γυρίσουμε πίσω στον δανειστή. Στο υπόδειγμα δεν μπαίνουν καθόλου περιορισμοί ούτε για το μέγεθος του short-selling δηλαδή το πόσες μετοχές θα πουλήσουμε ανοικτά, αλλά ούτε και στο ποσό που μπορεί ένας επενδυτής να δανειστεί. Επίσης δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών (transaction costs) τόσο στο short-selling, όσο και στην αγοραπωλησία μετοχών (δεν υπάρχει δηλαδή bid-ask sread). Τέλος, ο κάθε επενδυτής μπορεί να αγοράσει ή να πουλήσει ακόμα και δεκαδικό αριθμό μετοχών.

Επενδυτικές στρατηγικές (Investment strategies)

Ο επενδυτής ξεκινάει με αρχικό πλούτο $x_0 \in \mathbb{R}$ και μπορεί να δανειστεί, να δανείσει, να αγοράσει ή και να πουλήσει μετοχές. Το χαρτοφυλάκιο που θα επιλέξει χαρακτηρίζεται από το ζευγάρι (Δ_0, B_0), όπου Δ_0 είναι ο αριθμός των μετοχών που αγοράζει ή πουλάει στην χρονική στιγμή $t = 0$ και B_0 το ποσό που δανείζει ($B_0 > 0$ σημαίνει ότι δανείζει) ή που δανείζεται (όταν $B_0 < 0$). Επειδή υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει άλλη πηγή χρηματοδότησης, ισχύει η σχέση:

$$\Delta_0 S_0 + B_0 = x_0 \tag{2.1}$$

κάτι που σημαίνει ότι ο επενδυτής έχει μόνο μία επιλογή στην αρχική χρονική στιγμή: πόσες μετοχές θα αγοράσει/πουλήσει ή πόσα χρήματα θα δανειστεί/δανείσει.

Με αυτή την αρχική επιλογή, το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή στον χρονική στιγμή $T = 1$ θα έχει αξία X_1, που είναι τυχαία (όταν $\Delta_0 \neq 0$). Η τ.μ. X_1 θα δίνεται από τον τύπο:

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + B_0(1 + r) \tag{2.2}$$

ή ισοδύναμα

$$X_1(G) = \Delta_0 u S_0 + B_0(1 + r)$$
$$X_1(B) = \Delta_0 d S_0 + B_0(1 + r)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.1) μπορούμε να γράψουμε την αξία του χαρτοφυλακίου X_1 ως:

$$\begin{aligned} X_1 &= \Delta_0 S_1 + B_0(1 + r) \\ &= \Delta_0(S_1 - S_0(1 + r)) + x_0(1 + r) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\frac{X_1}{1+r} = \Delta_0 \left(\frac{S_1}{1+r} - S_0 \right) + x_0 \tag{2.3}$$

Το καλό με την αναπαράσταση της αξίας χαρτοφυλακίου μέσω της (2.3) είναι ότι εμφανίζεται καθαρά η πηγή της αλλαγής στον πλούτο του επενδυτή, όταν αυτός επιλέξει να αγοράσει Δ_0 μετοχές. Αυτή η αλλαγή είναι η διαφορά $(S_1/(1+r) - S_0)$, που είναι η παρούσα αξία της αλλαγής της τιμής της μετοχής.

Arbitrage

Η έννοια του arbitrage είναι θεμελιώδης στα χρηματοοικονομικά, τόσο από πρακτικής όσο και από θεωρητικής άποψης. Arbitrage ονομάζεται μια επενδυτική στρατηγική που με πιθανότητα 1 δεν έχει ζημιές (μείωση του κεφαλαίου), ενώ υπάρχει θετική πιθανότητα να έχει κέρδη. Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο προτιμάται από κάθε ορθολογικό (rational) επενδυτή, μιας και του εξασφαλίζει μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση σε σχέση με την επένδυση μηδενικού κινδύνου, χωρίς μάλιστα την ανάληψη κινδύνου. Αν μάλιστα το arbitrage μπορεί να γίνει και με μηδενικό αρχικό πλούτο, τότε ο επενδυτής θα πάρει θεωρητικά όσο μεγαλύτερη θέση μπορεί σε αυτό το χαρτοφυλάκιο[1]. Ο ακριβής ορισμός στο παρών μοντέλο μιας περιόδου δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 4. *Μια επενδυτική στρατηγική με αρχικό πλούτο $x_0 \in \mathbb{R}$ ονομάζεται arbitrage αν*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1}{1+r} \geq x_0 \right) = 1 \quad \textit{και} \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_1}{1+r} > x_0 \right) > 0. \tag{2.4}$$

Ένας αυστηρότερος ορισμός που επίσης χρησιμοποιείται στην βιβλιογραφία αρκείται στην ανισότητα $\mathbb{P}\left(\frac{X_1}{1+r} > x_0 \right) = 1$. Ωστόσο στις παρούσες σημειώσεις θα υιοθετήσουμε τον Ορισμό 4.

Μια θεμελιώδης υπόθεση στην μοντελοποίηση στα χρηματοοικονομικά είναι ο αποκλεισμός της δυνατότητας ενός επενδυτή να μπορεί να κάνει arbitrage. Η υπόθεση αυτή συμβολικά γράφεται (NA), δηλαδή No-Arbitrage, και ο λόγος που τίθεται σχεδόν σε κάθε μοντέλο είναι γιατί σε διαφορετική περίπτωση όλοι οι επενδυτές θα εφάρμοζαν αργά ή γρήγορα την στρατηγική που δίνει το arbitrage, κάτι που σημαίνει ότι θα υπήρχαν πολλές εντολές αγοράς ή πώλησης για συγκεκριμένα αξιόγραφα που θα συνεπάγονταν την αλλαγή των τιμών προς την κατεύθυνση της εξάλειψης της ευκαιρίας arbitrage. Στην περίπτωση του διωνυμικού μοντέλου μιας περιόδου η υπόθεση (NA) εξασφαλίζεται με μια απλή ανισότητα στις παραμέτρους του μοντέλου.

Theorem 2. *Στο διωνιμικό μοντέλο μιας περιόδου ισχύει η ισοδυναμία:*

$$\textit{(NA)} \Leftrightarrow d < 1 + r < u \tag{2.5}$$

Απόδειξη

Έστω ότι δεν υπάρχει arbitrage στην αγορά και υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $d < u \leq 1 + r$. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, αρκεί να βρούμε ένα χαρτοφυλάκιο που να ικανοποιεί τον ορισμό του arbitrage. Έστω, $\Delta_0 = -1$ και επομένως $B_0 = x_0 + S_0$, όπου x_0 ο

[1] Σε ορισμένες περιπτώσεις το arbitrage αναφέρεται και σαν free lunch with vanishing risk, ωστόσο οι ορισμοί δεν είναι ίδιοι και η διαφορετικότητά τους έγκειται σε μαθηματικές τεχνικότητες.

αρχικός πλούτος. Έχουμε

$$\begin{aligned} X_1(G) &= -S_0u + (x_0 + S_0)(1 + r) = S_0(1 + r - u) + x_0(1 + r) \geq x_0(1 + r) \\ X_1(B) &= -S_0d + (x_0 + S_0)(1 + r) = S_0(1 + r - d) + x_0(1 + r) > x_0(1 + r) \end{aligned}$$

και αφού έχουμε θετικές πιθανότητας και για τα δύο δυνατά ενδεχόμενα $\{B, G\}$, το παραπάνω χαρτοφυλάκιο είναι arbitrage. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται η ύπαρξη arbitrage όταν $1 + r < d < u$ (π.χ. επιλέξτε $\Delta_0 = 1$).

Για την άλλη μεριά της ισοδυναμίας υποθέτουμε ότι ισχύει η ανισότητα $d < 1 + r < u$ αλλά και ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο Δ_0 και $B_0 = x_0 - \Delta_0 S_0$ που είναι arbitrage. Θεωρούμε για αρχή ότι $\Delta_0 > 0$. Αφού το χαρτοφυλάκιο δίνει arbitrage και με θετική θέση στην μετοχή τότε τα μεγαλύτερα κέρδη θα τα έχει στο ενδεχόμενο να ανέβει η τιμή της μετοχής. Δηλαδή

$$X_1(G) = \Delta_0 S_0 u + (x_0 - \Delta_0 S_0)(1 + r) = \Delta_0 S_0(u - (1 + r)) + x_0(1 + r) > x_0(1 + r)$$

που συνεπάγεται ότι $\Delta_0 S_0(u - 1 - r) > 0$ και επειδή $\Delta_0, S_0 > 0$ έχουμε ότι $1 + r < u$ (εδώ δεν καταλήγουμε σε άτοπο). Στην περίπτωση πτώσης της μετοχής, ο επενδυτής δεν έχει απώλειες, δηλαδή

$$X_1(B) = \Delta_0 S_0 d + (x_0 - \Delta_0 S_0)(1 + r) = \Delta_0 S_0(d - (1 + r)) + x_0(1 + r) \geq x_0(1 + r)$$

που συνεπάγεται όμως ότι $1 + r \leq d$, που είναι το άτοπο που αναζητούσαμε.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι καταλήγουμε σε άτοπο όταν θεωρήσουμε την περίπτωση που το υποτιθέμενο arbitrage έχει αρνητικό Δ_0 (**αφήνεται σαν άσκηση**). ■

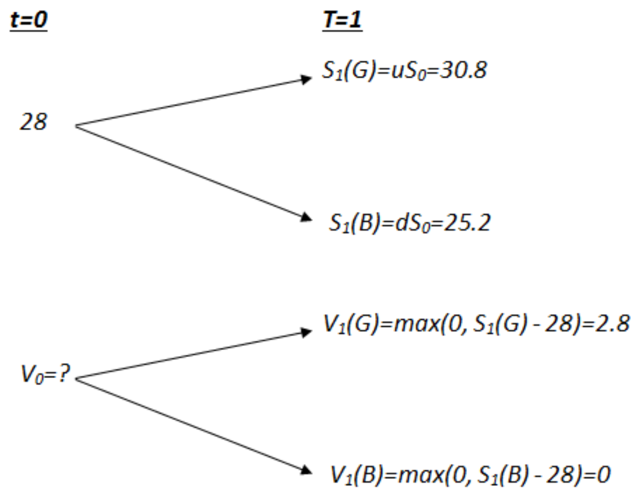
Τιμολόγηση νέων αξιόγραφων

Στο μοντέλο έχουμε υποθέσει έως τώρα ότι η τιμή της μετοχής S_0 είναι ήδη τιμολογημένη εξωγενώς από τις δυνάμεις της αγοράς (που φέρνουν την προσφορά σε ισότητα με την ζήτηση). Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει τώρα είναι πως θα τιμολογήσουμε ενδογενώς την τιμή ενός νέου αξιόγρα-φου που θα εισαχθεί στην αγορά. Αυτό που θα ξέρουμε για το καινούργιο αξιόγραφο είναι η απόδοση (payoff) που θα δίνει στον χρόνο $T = 1$ (κάτι που θα είναι γραμμένο στο συμβόλαιό του αξιόγραφου). Για παράδειγμα, μπορούμε να έχουμε ένα αξιόγραφο που δίνει απόδοση $V_1(G) = 2$ και $V_1(B) = 1$. *Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή του σήμερα;* Το αξιόγραφο μπορεί να είναι ένα παράγωγο πάνω στην μετοχή, όπως για παράδειγμα ένα δικαίωμα αγοράς (call option), με απόδοση $V_1 = \max(0, S_1 - K)$, όπου K είναι η τιμή άσκησης στον χρόνο 1 (η λεγόμενη strike price). Όταν εισάγουμε ένα νέο αξιόγραφο αυτό δεν είναι απαραίτητα παράγωγο πάνω στην μετοχή, ωστόσο από την στιγμή που κρατάμε μόνο δύο ενδεχόμενα πιθανά στον χρόνο $T = 1$ τότε κάθε αξιόγραφο μπορεί να γραφτεί σαν παράγωγο πάνω στην μετοχή, δηλαδή να γραφτεί ως $V_1 = g(S_1)$, όπου g μια απλή συνάρτηση.

Στο πρόβλημα της τιμολόγησης της αρχικής τιμής του νέου αξιόγραφου με απόδοση V_1, μπορούμε να συνοδεύσουμε και το ερώτημα: *Πως ένας επενδυτής που θα πουλήσει το αξιόγραφο θα μπορέσει να αντισταθμίσει τον κίνδυνο πληρωμής της απόδοσή του;* Όπως θα δείξουμε παρακάτω τα δύο αυτά ερωτήματα συνδέοντα άρρηκτα, με την έννοια ότι η απάντηση του ενός δίνει απάντηση και στο άλλο.[2]

[2]Θα πρέπει να τονιστεί ότι η τιμολόγηση της αρχικής αξίας του αξιόγραφου, δεν δίνεται απαραίτητα σαν αναμενόμενη τιμή κάτω από ένα αυθαίρετα επιλεγόμενο μέτρο πιθανότητας. Δηλαδή, δεν ισχύει ότι $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V_1]$, όπου $\mathbb{P}$ είναι το αρχικό μέτρο πιθανότητας που εκτιμά/πιστεύει ένας επενδυτής. Η αναμενόμενη τιμή μπορεί να είναι ένας απλός γραμμικός τρόπος να συνοψίζουμε την τιμή μιας τ.μ., δεν έχει όμως άμεση οικονομική ερμηνεία.

Παράδειγμα 1. *Για παράδειγμα, μπορούμε να έχουμε παραμέτρους στο μοντέλο μας* $u = 1.1$, $d = 0.9$, $r = 5\%$, $S_0 = 28$ *ν.μ. και* V_1 *να είναι η απόδοση ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή άσκησης* 28*ν.μ. Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή* V_0*;*



Για να τιμολογήσουμε το δικαίωμα αγοράς σε αυτό το απλοϊκό μοντέλο, θα βασιστούμε αποκλειστικά στην διατήρηση της υπόθεσης του (NA). Θα πάρουμε την θέση ενός επενδυτή με αρχικό πλούτο x_0 που πουλάει (μπαίνει short) στο συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς. Ο επενδυτής εισπράττει το ποσό V_0, αλλά αναλαμβάνει την υποχρέωση να πληρώσει την απόδοση V_1 στον χρόνο 1.[3] Θα μπορούσε απλά να βάλει τα χρήματά του σε δανεισμό και να έχει στον τελικό χρόνο 1 αξία χαρτοφυλακίου $(x_0 + V_0)(1 + r) - V_1$. Ωστόσο κάτι τέτοιο θα τον άφηνε με τον κίνδυνο να πληρωθεί το δικαίωμα αγοράς (δηλαδή να ανέβει η τιμή της μετοχής) και να χάσει έτσι ένα μέρος από τον αρχικό του πλούτο (με απλά λόγια το χαρτοφυλάκιο να έχει ζημιά). Αν μάλιστα $x_0 = 0$, τότε μια άνοδος της τιμής της μετοχής σημαίνει ότι ο επενδυτής θα είχε αρνητική αξία χαρτοφυλακίου και θα έπρεπε να δανειστεί για να καλύψει την υποχρέωσή του σαν πωλητής του δικαιώματος αγοράς.

Είναι σαφές λοιπόν ότι για να μπορέσει να αντισταθμίσει (hedge) τον κίνδυνο που αναλαμβάνει, θα πρέπει να χρησιμοποιήσει με έναν τρόπο τα χρήματα που εισέπραξε (δηλαδή το ποσό V_0). Η βασική ιδέα είναι να φτιάξει ένα χαρτοφυλάκιο (μια επενδυτική στρατηγική) που να έχει σαν στόχο να καλύψει την υποχρέωσή του στον χρόνο 1. Δηλαδή αναζητάμε το ζευγάρι (Δ_0, B_0), όπου $B_0 = x_0 + V_0 - \Delta_0 S_0$ τέτοιο ώστε

$$X_1 = V_1 + x_0(1 + r) \tag{2.6}$$

ή ισοδύναμα

$$\Delta_0 S_1 + B_0(1 + r) = V_1 + x_0(1 + r) \tag{2.7}$$

Αν μπορέσει να βρει ο επενδυτής το ζευγάρι (Δ_0, B_0) που ικανοποιεί την σχέση (2.7), τότε ο αρχικός του πλούτος θα έχει απόδοση ίση με το επιτόκιο της αγοράς και ταυτόχρονα τα χρήματα που εισέπραξε από την πώληση του δικαιώματος θα έχουν χρησιμοποιηθεί ακριβώς για την κάλυψη της υποχρέωσης V_1. Με άλλα λόγια θα κάνει τέλεια αντιστάθμιση κινδύνου (perfect hedging).

[3] Θα πρέπει να είναι σαφές στον αναγνώστη ότι δεν μπορούμε να έχουμε $\mathbb{P}(V_0(1 + r) > V_1) = 1$ ή $\mathbb{P}(V_0(1 + r) < V_1) = 1$, γιατί κάτι τέτοιο θα παραβίαζε την υπόθεση (NA).

Σε αυτό το σημείο θα μπορούσαμε να αγνοήσουμε την ύπαρξη του αρχικού πλούτου, θα θέσουμε δηλαδή $x_0 = 0$, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο επενδυτής έχει την δυνατότητα να δανειστεί με το ίδιο επιτόκιο όσα χρήματα θελήσει[4]. Επομένως, η σχέση που θα πρέπει να λυθεί είναι:

$$\Delta_0 S_1 + B_0(1+r) = V_1 \tag{2.8}$$

όπου $B_0 = V_0 - \Delta_0 S_0$. Προσέξτε ότι αν βρούμε το ζευγάρι (Δ_0, B_0), θα έχουμε βρει και την τιμή V_0. Η σχέση (2.8) είναι σχέση ανάμεσα σε τυχαίες μεταβλητές και θα πρέπει να ισχύει σε κάθε ένα από τα πιθανά ενδεχόμενα την χρονική στιγμή 1. Δηλαδή, θα πρέπει να ικανοποιείται το σύστημα:

$$\begin{aligned} \Delta_0 S_1(G) + B_0(1+r) &= V_1(G) \\ \Delta_0 S_1(B) + B_0(1+r) &= V_1(B) \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι έναν 2x2 σύστημα γραμμικών εξισώσεων και θα έχει λύσει αν και μόνο αν οι εξισώσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $S_1(G) = uS_0$ και $S_1(B) = dS_0$, η γενική μορφή της λύσης είναι:

$$\Delta_0 = \frac{V_1(G) - V_1(B)}{uS_0 - dS_0} \quad \text{και} \quad B_0 = \frac{uV_1(B) - dV_1(G)}{(u-d)(1+r)} \tag{2.9}$$

και επομένως η αρχική τιμή του αξιόγραφου ή ισοδύναμα το χρηματικό ποσό που χρειάζεται ο επενδυτής για να αντισταθμίσει τελείως τον κίνδυνο που έχει αναλάβει είναι $V_0 = B_0 + \Delta_0 S_0$, δηλαδή:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r)-d}{u-d}V_1(G) + \frac{u-(1+r)}{u-d}V_1(B)\right) \tag{2.10}$$

Επομένως ο επενδυτής θα εισπράξει το ποσό V_0 που δίνεται από τον τύπο (2.10) και για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο θα αγοράσει Δ_0 μετοχές (όταν Δ_0 είναι αρνητικό θα κάνει short sell μετοχές) και θα δανείσει B_0 ν.μ. (αν B_0 είναι αρνητικό τότε θα δανειστεί ν.μ.), όπου (Δ_0, B_0) δίνονται από την (2.9).

Παράδειγμα 2. *Στο Παράδειγμα 1, η εφαρμογή των τύπων δίνει $\Delta_0 = 0.5$, $B_0 = -12$ και $V_0 = 2$. Δηλαδή ο πωλητής του δικαιώματος θα εισπράξει 2 νομισματικές μονάδες, θα δανειστεί άλλες 12 και με τις συνολικά 14 ν.μ. θα αγοράσει μισή μετοχή (η τιμή της μιας μετοχής είναι 28). Στον χρόνο 1 το χαρτοφυλάκιο θα ικανοποιεί την σχέση* (2.8)*, κάτι που σημαίνει ότι αν ανέβει η μετοχή το χαρτοφυλάκιο θα έχει αξία 2.8ν.μ. και αν πέσει θα έχει αξία μηδέν, όπως ακριβώς και το δικαίωμα που πρέπει να καλυφτεί.*

Θα πρέπει να τονιστεί ότι σε περίπτωση που η τιμή του δικαιώματος δεν είναι ίση με αυτή που βγαίνει από τον τύπο (2.10), τότε θα παραβιαστεί η υπόθεση (NA). Αν για παράδειγμα η τιμή ήταν $\tilde{V}_0 > V_0$, τότε ένας επενδυτής θα έκανε arbitrage πουλώντας το αξιόγραφο, αγοράζοντας Δ_0 μετοχές και δανειζόμενος $|B_0|$ ν.μ. Αν από την άλλη μεριά $\tilde{V}_0 < V_0$, το arbitrage θα γινόταν αγοράζοντας το αξιόγραφο, κάνοντας short sell σε $|\Delta_0|$ μετοχές και δανείζοντας B_0 ν.μ.

Παράδειγμα 3. *Στο Παράδειγμα 1, αν η τιμή είναι 2.2 αντί για 2 ν.μ., ο επενδυτής θα χρησιμοποιήσει μόνο τις 2 νομισματικές μονάδες, θα δανειστεί 12 και θα αγοράσει μισή μετοχή για να κάνει ένα χαρτοφυλάκιο που θα του καλύψει την υποχρέωση στον χρόνο 1. Από την άλλη αν η τιμή ήταν π.χ. 1.5*

[4]Αυτή η υπόθεση δεν είναι ιδιαίτερα ρεαλιστική. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ισχύει εν μέρη για κάποια τραπεζικά ιδρύματα και μόνο για δανεισμούς μικρών χρονικών διαστημάτων. Για τους σκοπούς ωστόσο του μαθήματος αλλά και για το υπολογισμό της σωστής τιμής, η υπόθεση αυτή θα μπορούσε να θεωρηθεί έγκυρη.

ν.μ., τότε θα έκανε short sell σε μισή μετοχή, θα εισέπραττε 14 ν.μ., θα αγόραζε το αξιόγραφο με 1.5 από αυτές και τις υπόλοιπες 12.5 θα τις δάνειζε με επιτόκιο 5%. Σύμφωνα με την σχέση (2.8)*, αυτό θα του έδινε αξία χαρτοφυλακίου στον χρόνο 1 μεγαλύτερη από την υποχρέωσή του να αγοράσει την μετοχή και να την γυρίσει πίσω στον δανειστή του short selling.*

Σε αυτό το σημείο αξίζει να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις:

1) Η τιμή V_0 που δίνεται στον τύπο (2.10) είναι η **μοναδική τιμή** που διατηρεί την υπόθεση (NA). Προσέξτε ότι δεν εμφανίζονται πουθενά στην τιμολόγηση οι εκτιμήσεις των επενδυτών για τις πιθανότητες ανόδου/πτώσης της μετοχής ή οι προτιμήσεις τους σχετικά με τον κίνδυνο. Το μόνο που χρειάζεται η τιμολόγηση είναι ότι υπάρχουν μόνο δύο ενδεχόμενα στην χρονική στιγμή $T = 1$ ή με άλλα λόγια κάθε λαμβανόμενο μέτρο πιθανότητας δίνει μηδενική πιθανότητα σε κάθε άλλο ενδεχόμενο (τα μέτρα πιθανότητας που δίνουν μηδενικές πιθανότητες στα ίδια ενδεχόμενα ονομάζονται ισοδύναμα, *equivalent probability measures*).

2) Ο τρόπος που ένας επενδυτής μπορεί να κάνει hedging στον κίνδυνο που έχει αναλάβει μέσα από την αγοραπωλησία μετοχών μπορεί να θεωρηθεί προσέγγιση της παραγώγου της απόδοσης του νέου αξιόγραφου ως προς την τιμή της μετοχής. Πιο συγκεκριμένα,

$$\Delta_0 = \frac{V_1(G) - V_1(B)}{S_1(G) - S_1(B)} \approx \frac{\partial V}{\partial S}$$

όπου ∂V αναπαριστά την μερική παράγωγο της απόδοσης του αξιόγραφου (στην περίπτωση αυτή ως προς την τιμή S). Όσο πιο μικρο είναι το εύρος της πιθανής αλλαγής της τιμής της μετοχής τόσο πιο καλή είναι η προσέγγιση της παραγώγου από την τιμή Δ_0. Διαισθητικά, μπορούμε να πούμε ότι ο επενδυτής προσπαθεί να "πιάσει" την αλλαγή στην τιμή του αξιόγραφου χρησιμοποιώντας το μοναδικό εργαλείο που έχει για αντιστάθμιση, δηλαδή την μετοχή (τον υποκείμενο τίτλο).

3) Το διωνυμικό μοντέλο είναι ένα απλό παράδειγμα αγοράς όπου η απόδοση του κάθε αξιόγραφου μπορεί να αναπαραχθεί 100% από τα υπάρχοντα ήδη τιμολογημένα αξιόγραφα. Το χαρτοφυλά-κιο που κάνει το τέλειο αυτό αντιστάθμισμα ονομάζεται *perfect replication portfolio*. Από ότι γίνεται σαφές από τους παραπάνω υπολογισμούς, το χαρτοφυλάκιο αυτό υπάρχει λόγω του ότι μπορούμε να λύσουμε το σύστημα που συνεπάγεται η ζητούμενη σχέση (2.8). Αυτό συμβαίνει γιατί έχουμε μόνο δύο πιθανά ενδεχόμενα και δύο αγνώστους. Σε περίπτωση που τα ενδεχόμενα γίνουν τρία π.χ. άνοδος, πτώση ή σταθερότητα στην τιμή της μετοχής, τότε το σύστημα δεν θα έχει γενικά λύση. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να αναζητήσουμε και άλλες ιδέες για το πως θα λύσουμε το πρόβλημα της τιμολόγησης. Κάποιες από αυτές θα τις δούμε στο Κεφάλαιο που αναφέρεται στις μη πλήρεις αγορές.

Το ουδέτερο στον κίνδυνο μέτρο πιθανότητας (risk neutral probability measure)

Παρατηρώντας λίγο πιο κοντά τον τύπο (2.10), βλέπουμε ότι η τιμή V_0 μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{1+r}\left[qV_1(G) + (1-q)V_1(B)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_1}{1+r}\right] \end{aligned}$$

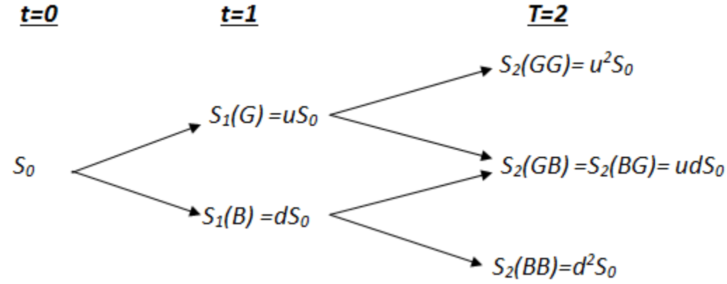
όπου $q = \frac{(1+r)-d}{u-d}$ και $\mathbb{Q}$ είναι το μέτρο στον χώρο $\Omega = \{G, B\}$ που δίνει $\mathbb{Q}(G) = q$ και επομένως $\mathbb{Q}(B) = 1 - q$. Λόγο της υπόθεσης (NA) και του Θεωρήματος 2 έχουμε ότι $0 < q < 1$, δηλαδή q και $1-q$ μπορούν όντως να θεωρηθούν πιθανότητες που μάλιστα δεν εξαρτιόνται από το αξιόγραφο που τιμολογείται αλλά μόνο από τους παραμέτρους του μοντέλου. Αυτό σημαίνει ότι για να υπολογίσουμε την (NA) τιμή ενός αξιόγραφου αρκεί να υπολογίσουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία της απόδοσή του κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$. *Όμως τι ακριβώς είναι αυτό το μέτρο* $\mathbb{Q}$*;* Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα υπολογίζουμε την αναμενόμενη αξία της τιμής S_1 κάτω από αυτό το μέτρο. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1] &= qS_1(G) + (1-q)S_1(B) \\
&= \left(\frac{(1+r)-d}{u-d}uS_0\right) + \left(\frac{u-(1+r)}{u-d}dS_0\right) \\
&= \frac{S_0}{u-d}[((1+r)-d)u + (u-(1+r))d] \\
&= \frac{S_0}{u-d}(1+r)(u-d) \\
&= S_0(1+r).
\end{aligned}$$

Επομένως, κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$ έχουμε ότι η αναμενόμενη ποσοστιαία απόδοση της μετοχής είναι ίση με το επιτόκιο του δανεισμού μηδενικού κινδύνου. Δηλαδή τόσο η μετοχή όσο και το καινούργιο αξιόγραφο V_1 έχει αναμενόμενη ποσοστιαία απόδοση σαν να μην εμπεριέχουν κίνδυνο. Για το λόγο αυτό το μέτρο $\mathbb{Q}$ ονομάζεται μέτρο πιθανότητας **ουδέτερο στον κίνδυνο** (risk neutral probability measure). Θα πρέπει να γίνει σαφές στον αναγνώστη ότι οι πιθανότητες q και $1-q$ δεν είναι πραγματικές αλλά χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση. Το γεγονός δε ότι επενδύσεις με ρίσκο (μετοχές, παράγωγα) έχουν αναμενόμενη απόδοση (κάτω από αυτό το μέτρο) ίση με την απόδοση ακίνδυνης επένδυσης αντανακλά το γεγονός ότι όλοι οι κίνδυνοι που αναλαμβάνονται μπορούν να γίνουν perfectly hedged ακολουθώντας το perfect replication portfolio.

2.2 Διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων (two periods model)

Ένας τρόπος να γενικεύσουμε το μοντέλο που παρουσιάσαμε παραπάνω είναι να δώσουμε την δυνατότητα στον επενδυτή να κάνει αναδιανομή του χαρτοφυλακίου του κάποια χρονική στιγμή πριν τον τερματικό χρόνο. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσθέσουμε περισσότερα δυνατά ενδεχόμενα στον τερματικό χρόνο χωρίς να θυσιάσουμε την δυνατότητα να κάνουμε τέλεια αντιστάθμιση κινδύνου. Πιο συγκεκριμένα, το μοντέλο δύο περιόδων θεωρεί τρεις χρονικές στιγμές, $t = 0, 1, 2$, η μετοχή είναι μια στοχαστική διαδικασία $(S_n)_{n\in\{0,1,2\}}$ και οι τιμές που παίρνουν οι τ.μ. S_1 και S_2 εμφανίζονται στο παρακάτω διάγραμμα.



Δηλαδή στο διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων έχουμε

$$\Omega = \{GG, BG, GB, BB\}$$

και μέτρα πιθανότητας που δίνουν την ίδια πιθανότητα στο ενδεχόμενο $\{BG\}$ και στο ενδεχόμενο $\{GB\}$.

Η τιμολόγηση κάθε νέου αξιόγραφου που πληρώνει απόδοση στον χρόνο $T = 2$, δεν θα γίνεται πλέον μόνο στον αρχικό χρόνο αλλά και στον ενδιάμεσο χρόνο $t = 1$, όπου και θα έρχεται η πληροφορία για την άνοδο ή την πτώση της μετοχής στην πρώτη περίοδο και ο επενδυτής θα μπορεί να κάνει αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου του. Το επιτόκιο r που αναφέρεται σε αυτό το μοντέλο αφορά τον απλό τοκισμό μιας περιόδου και θεωρείται ότι μένει το ίδιο και για την δεύτερη περίοδο.

Αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια (self-financing porfolios)

Ο επενδυτής με αρχικό πλούτο $x_0 \in \mathbb{R}$ σε ένα μοντέλο δύο περιόδων έχει δύο επιλογές: Στον αρχικό χρόνο να φτιάξει ένα χαρτοφυλάκιο (Δ_0, B_0), όπως ακριβώς και στο μοντέλο μιας περιόδου. Και να το αναπροσαρμόσει στον χρόνο 1 επιλέγοντας τον αριθμό μετοχών Δ_1, που θα έχει στην κατοχή του από αρχή της δεύτερης περιόδου μέχρι και τον τερματικό χρόνο $T = 2$ αλλά και τα χρήματα που θα δανείσει/δανειστεί την ίδια χρονική περίοδο, δηλαδή την (τυχαία) μεταβλητή B_1. Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} x_0 &= \Delta_0 S_0 + B_0 \\ X_1 &= \Delta_1 S_1 + B_1 \\ X_2 &= \Delta_1 S_2 + (1 + r/2) B_1 \end{aligned}$$

Θα πρέπει να τονιστεί εδώ ότι η μεταβλητές Δ_1, B_1 και κατά συνέπεια η X_1 είναι τυχαίες μεταβλητές και γίνονται γνωστές μόνο όταν έχουμε την πληροφόρηση για την τιμή της μετοχής στον χρόνο 1. Είναι δηλαδή $\mathcal{F}_1^S$-μετρήσιμες τ.μ. Ο βασικός λόγος για τον οποίο ο επενδυτής έχει κίνητρο να αναπροσαρμόσει το χαρτοφυλάκιό του είναι ότι με τον τρόπο αυτό θα λάβει υπόψη του την πληροφορία για την κίνηση της μετοχής στον χρόνο 1.

Ο τρόπος που γίνεται η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου στον χρόνο $t = 1$ είναι πολύ συγκεκριμένος. Η βασική υπόθεση που γίνεται εδώ είναι ότι ο επενδυτής θα χρησιμοποιήσει σαν αρχικό πλούτο για την επένδυσή του από την χρόνο 1 έως στον χρόνο 2, ακριβώς τον πλούτο που παρήγαγε το χαρτοφυλάκιο που δημιούργησε την περίοδο από τον αρχικό χρόνο έως στον χρόνο 1. Με άλλα λόγια, δεν θα χρησιμοποιήσει κάποιο μέρος του πλούτο του για κατανάλωση ούτε θα έχει άλλη πηγή χρηματοδότησης. Το χαρτοφυλάκιο χρηματοδοτείται μόνο του και γιαυτό αυτά τα χαρτοφυλάκια ονομάζονται *αυτοχρηματοδοτούμενα (self-financing)*. Αυτό σημαίνει ότι

$$\Delta_0 S_1 + (1 + r/2) B_0 = \Delta_1 S_1 + B_1 \tag{2.11}$$

Λαμβάνοντας υπόψη της παραπάνω σχέσεις μπορούμε να γενικεύσουμε την σχέση (2.3) στην περίπτωση δύο περιόδων

$$\begin{aligned} X_2 &= \Delta_1 S_2 + (1 + r/2) B_1 \\ &= \Delta_1 S_2 + (1 + r/2)(X_1 - \Delta_1 S_1) \\ &= \Delta_1 (S_2 - (1 + r/2) S_1) + (1 + r)(\Delta_0 S_1 + (1 + r/2)(x_0 - \Delta_0 S_0)) \\ &= \Delta_1 (S_2 - (1 + r/2) S_1) + (1 + r)\Delta_0 (S_1 - (1 + r/2) S_0) + (1 + r/2)^2 x_0 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\frac{X_2}{(1+r/2)^2} = \Delta_1 \left(\frac{S_2}{(1+r/2)^2} - \frac{S_1}{(1+r/2)} \right) + \Delta_1 \left(\frac{S_1}{1+r/2} - S_0 \right) + x_0 \qquad (2.12)$$

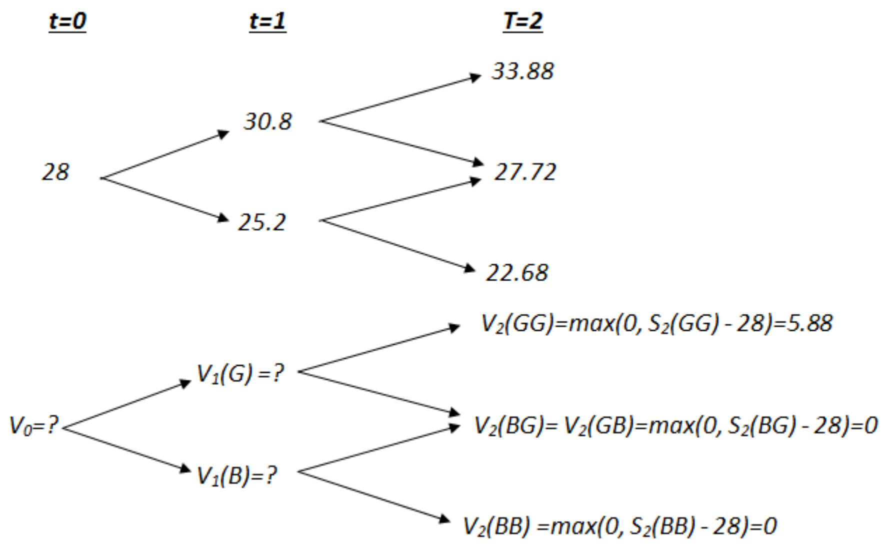
Το επόμενο βήμα είναι να δώσουμε τον ορισμό της στρατηγικής arbitrage στην περίπτωση δύο περιόδων.

Ορισμός 5. *Μια επενδυτική στρατηγική δύο περιόδων με αρχικό πλούτο $x_0 \in \mathbb{R}$ ονομάζεται arbitrage αν για τουλάχιστον ένα $i = 1, 2$ ισχύει ότι:*

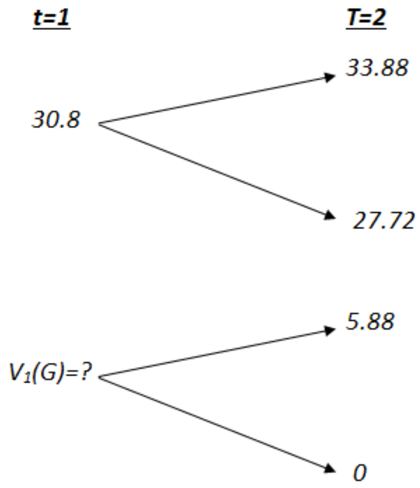
$$\mathbb{P}\left(\frac{X_i}{(1+r/2)^i} \geq x_0 \right) = 1 \quad and \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_i}{(1+r/2)^i} > x_0 \right) > 0. \qquad (2.13)$$

Η διαφορά με την περίπτωση της μίας περιόδου είναι ότι το arbitrage μπορεί να υπάρξει είτε στον χρόνο 1, είτε στον χρόνο 2. Θα πρέπει να τονιστεί ότι το Θεώρημα 2 ισχύει και στην περίπτωση του μοντέλου με δύο περιόδους (**η απόδειξη**, που ακολουθεί τα ίδια βήματα **αφήνεται σαν άσκηση**).

Όταν ένα καινούργιο αξιόγραφο που δίνει απόδοση μόνο στον τερματικό χρόνο 2 εισάγεται σε αυτή την αγορά, τότε η τιμολόγηση του θα πρέπει να γίνει όχι μόνο στον αρχικό χρόνο αλλά και στην ενδιάμεσο χρόνο $t = 1$. Δηλαδή εισάγουμε ένα αξιόγραφο που έχει τυχαία απόδοση V_2 και θέλουμε να βρούμε τις τιμές που παίρνει η τ.μ. V_1 όσο και η αρχική τιμή V_0. Στο Παράδειγμα 1 όταν το αξιόγραφο είναι ένα δικαίωμα αγοράς (Ευρωπαϊκου τύπου), θα πρέπει να συμπληρώσουμε τα ερωτηματικά του στο παρακάτω σχήμα



Θα επιχειρηματολογήσουμε πάλι παίρνοντας την θέση ενός επενδυτή με μηδενικό αρχικό πλούτο που πουλάει το αξιόγραφο στην τιμή V_0 και θέλει να αντισταθμίσει τον κίνδυνο που έχει αναλάβει να πληρώσει την απόδοση V_2. Η πρώτη παρατήρηση που κάνουμε είναι ότι για να μπορεί να γίνει η τέλεια αντιστάθμιση της απόδοσης V_2, θα πρέπει ο επενδυτής να κάνει μια αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου του στον χρόνο 1, γιατί διαφορετικά θα έχει να λύσει 3 εξισώσεις με 2 αγνώστους (δες την παρατήρηση 3) παραπάνω). Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για να βρούμε τις τιμές στα διάφορα σημεία του δέντρου είναι δουλεύοντας **ανάποδα στον χρόνο** (από πίσω προς μπροστά) ή αλλιώς **backwards in time**. Πρώτα θα απομονώσουμε το πάνω δεξιά κομμάτι του δέντρου, δηλαδή την απόδοση του αξιόγραφου όταν στον χρόνο 1 έχουμε το ενδεχόμενο $\{G\}$.



Αν βρισκόμαστε στον χρόνο 1 και έχει συμβεί το ενδεχόμενο $\{G\}$, τότε ο επενδυτής θα πρέπει να έχει αξία χαρτοφυλακίου $V_1(G)$ τέτοια ώστε να μπορεί να γίνεται τέλεια αντιστάθμιση στην υποχρέωση που έχει αναλάβει στην χρόνο 2, δηλαδή στο παράδειγμά μας 5.88 ν.μ. σε περίπτωση περεταίρω ανόδου της τιμής της μετοχής και 0 σε περίπτωση πτώσης. Για να βρούμε την αξία $V_1(G)$ λειτουργούμε ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση του μοντέλου μιας περιόδου. Θα πρέπει δηλαδή να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \Delta_1(G)S_2(GG) + B_1(G)(1+r/2) &= V_2(GG) \\ \Delta_1(G)S_2(GB) + B_1(G)(1+r/2) &= V_2(GB) \end{aligned}$$

όπου $\Delta_1(G)$ είναι ο αριθμός των μετοχών που θα πρέπει να αγοράσει ο επενδυτής στην χρόνο 1 (εάν έχει γίνει το ενδεχόμενο {G}), και $B_1(G)$ το αντίστοιχο ποσό που θα πρέπει να δανειστεί/δανείσει. Λύνοντας το σύστημα ως προς $\Delta_1(G)$ και $B_1(G)$, βρίσκουμε και την τιμή $V_1(G)$, μιας και η αξία του χαρτοφυλακίου θα πρέπει να είναι ίση με την αξία του αξιόγραφου, δηλαδή

$$\Delta_1(G)S_1(G) + B_1(G) = V_1(G)$$

(όπως ακριβώς κάναμε και στο μοντέλο μιας περιόδου). Στο παράδειγμά μας (θέτοντας $r = 10\%$) έχουμε:

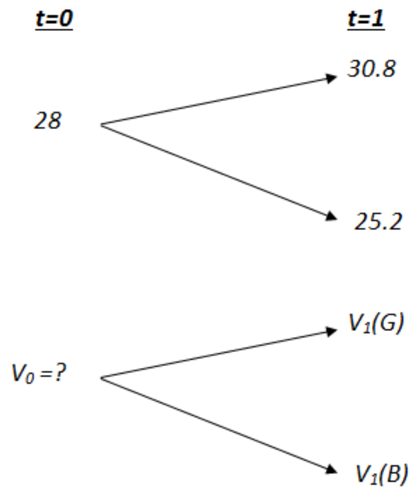
$$\begin{aligned} \Delta_1(G)33.88 + B_1(G)(1.05) &= 5.88 \\ \Delta_1(G)27.72 + B_1(G)(10.5) &= 0 \end{aligned}$$

που δίνει λύσεις $\Delta_1(G) = 0.95$, $B_1(G) = -25.06$ και επομένως $V_1(G) = 4.2$. Την ίδια επιχειρηματολογία αναπτύσσουμε στην περίπτωση όπου στον χρόνο 1 έχει γίνει το ενδεχόμενο $\{B\}$ λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{aligned} \Delta_1(B)S_2(BG) + B_1(B)(1+r/2) &= V_2(BG) \\ \Delta_1(B)S_2(BB) + B_1(B)(1+r/2) &= V_2(BB) \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση $\Delta_1(B)S_1(B) + B_1(B) = V_1(B)$. Ωστόσο, στο παράδειγμά μας κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο και αυτό γιατί η απόδοση του αξιόγραφου θα είναι μηδενική και στα δύο πιθανά ενδεχόμενα στον χρόνο 2 ($\{BG\}$ και $\{BB\}$) και επομένως χωρίς να επεκταθούμε περισσότερο θα έχουμε $V_1(B) = 0$.

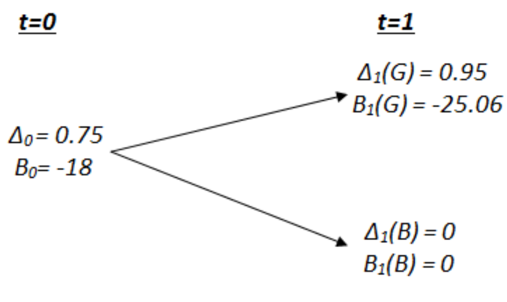
Από την στιγμή τώρα που έχουμε βρει τις τιμές $V_1(G)$ και $V_1(B)$ μπορούμε να κινηθούμε προς την πρώτη περίοδο του μοντέλου και να αντιμετωπίσουμε το αρχικό μέρος του δέντρου



Το σύστημα που θα χρειαστεί να λύσουμε είναι

$$\begin{aligned} \Delta_0 S_1(G) + B_0(1 + r/2) &= V_1(G) \\ \Delta_0 S_1(B) + B_0(1 + r/2) &= V_1(B) \end{aligned}$$

με την συνθήκη $\Delta_0 S_0 + B_0 = V_0$ να μας δίνει την αρχική τιμή του αξιόγραφου. Στο παράδειγμά μας έχουμε $\Delta_0 = 0.75$, $B_0 = -18$ και $V_0 = 3$ (προσέξτε ότι η τιμή δεν είναι η ίδια με το μοντέλο μιας περιόδου. *Γιατί μπορεί να συμβαίνει αυτό;*). Το παρακάτω διάγραμμα μας περιγράφει την διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει ο επενδυτής για να κάνει perfect replication την υποχρέωση που θα αναλάβει αν πουλήσει το δικαίωμα αγοράς στον αρχικό χρόνο στην τιμή $V_0 = 3$.



Πιο συγκεκριμένα στον χρόνο $t = 0$, ο επενδυτής πουλάει το δικαίωμα και παίρνει 3 ν.μ. Με αυτές και ένα δάνειο μιας περιόδου 18 ν.μ., αγοράζει το 75% της μετοχής που στοιχίζει $0.75 \times 28 = 21$. Στον χρόνο 1, αν έχει γίνει το ενδεχόμενο $\{G\}$, η αξία του χαρτοφυλακίου του θα είναι $X_1(G) =$

4.2 (όσο δηλαδή η αξία του αξιόγραφο σε αυτό το σημείο του δέντρου). Η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου είναι ότι θα πρέπει να αγοράσει άλλο ένα 20% της μετοχής αλλά και να αποπληρώσει το δάνειο που είχε πάρει μαζί με τον τόκο του 5%. Δηλαδή δανείζεται 25.06 ν.μ. και με αυτές ξεχρεώνει το πρώτο δάνειο πληρώνοντας 18.9 ν.μ. και με τις υπόλοιπες αγοράζει το 20% της μετοχής πληρώνοντας ($0.2 \times 30.8 = 6.16$). Στον χρόνο 2 η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι ακριβώς ίση με την υποχρέωση που έχει αναλάβει, δηλαδή $V_2(GG)$ ή $V_2(GB)$. Αυτό γιατί σε περίπτωση ανόδου της μετοχής θα έχει στην κατοχή του 95% της μετοχής που έχει αξία $0.95 \times 33.88 = 32.186$ ν.μ. και την υποχρέωση να αποπληρώσει 26.31 ν.μ. στο δάνειο. Το ποσό που θα περισσέψει είναι ακριβώς η υποχρέωση του να πληρώσει στον κάτοχο του δικαιώματος το ποσό $V_2(GG) = 5.88$ ν.μ.

Στην περίπτωση που συμβεί το ενδεχόμενο $\{B\}$ στον χρόνο 1, τότε ο επενδυτής κλείνει την θέση του καθώς δεν έχει καμία υποχρέωση στον κάτοχο του δικαιώματος (η αξία του οποίου είναι μηδέν). Ο επενδυτής θα πουλήσει το 75% της μετοχής εισπράττοντας $0.75 \times 25.2 = 18.9$ ν.μ. όσο δηλαδή θα πρέπει να πληρώσει στο δάνειο που έχει πάρει.

Άσκηση 6. *Στο παραπάνω παράδειγμα, εξηγήστε πως ένας επενδυτής θα κάνει arbitrage σε περίπτωση που η τιμή $V_1(G)$ είναι 4 ν.μ. και όχι 4.2.*

Άσκηση 7. *Θεωρείστε το Παράδειγμα 1 σε δύο περιόδους και ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκου τύπου με τιμή άσκησης $K = 28$, δηλαδή $V_2 = \max(0, 28 - S_2)$. Ποιο είναι το χαρτοφυλάκιο που κάνει perfect replication σε αυτό το αξιόγραφο; Περιγράψτε λεπτομερώς τις κινήσεις του χαρτοφυλακίου στον αρχικό χρόνο αλλά και στον χρόνο 1. Αν $V_0 = 3$, πως θα μπορούσε ένας επενδυτής να κάνει arbitrage;*

Άσκηση 8. *Θεωρείστε το Παράδειγμα 1 μίας περιόδου και ένα αξιόγραφο που έχει απόδοση $V_1(G) = 3$ και $V_1(B) = 5$. Ποιο είναι το χαρτοφυλάκιο που κάνει perfect replication σε αυτό το αξιόγραφο; Περιγράψτε λεπτομερώς τις κινήσεις του χαρτοφυλακίου στον αρχικό χρόνο αλλά και στον χρόνο 1. Αν $V_0 = 3$, πως θα μπορούσε ένας επενδυτής να κάνει arbitrage;*

Σε αυτό το σημείο αξίζει να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις:

1) Η τιμή του αξιόγραφου είναι μια στοχαστική διαδικασία $(V_n)_{n\in\{0,1,2\}}$, όπως δηλαδή και η μετοχή. Μόνο η αρχική τιμή τόσο της μετοχής όσο και του αξιόγραφου είναι πραγματικός αριθμός. Οι υπόλοιπες τιμές είναι τυχαίες μεταβλητές.

2) Από τις λύσεις των συστημάτων που μας δίνουν το χαρτοφυλάκιο τέλειας αντιστάθμισης, μπορούμε πάλι να παρατηρήσουμε ότι η τιμολόγηση μπορεί να γραφτεί σαν αναμενόμενη τιμή και μάλιστα κάτω από το μέτρο ουδέτερου κινδύνου που είδαμε στην περίπτωση της μιας περιόδου. Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} V_1(G) &= \frac{1}{1+r/2}\left[qV_2(GG) + (1-q)V_2(GB)\right] \quad \text{και} \\ V_1(B) &= \frac{1}{1+r/2}\left[qV_2(GB) + (1-q)V_2(BB)\right] \end{aligned}$$

ή με άλλα λόγια

$$V_1 = \frac{1}{1+r/2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_2|\mathcal{F}_1] \tag{2.14}$$

όπου $\mathbb{Q}$ είναι το ουδέτερο στον κίνδυνο μέτρο πιθανότητας. Ομοίως υπολογίζουμε ότι

$$V_0 = \frac{1}{1+r/2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1] \tag{2.15}$$

Συνδυάζοντας (2.14) και (2.15) και εφαρμόζοντας την ιδιότητα tower έχουμε:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{1+r/2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{1+r/2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_2|\mathcal{F}_1]\right] \\ &= \frac{1}{(1+r/2)^2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_2] \end{aligned}$$

που δίνει έναν απλοϊκό τρόπο να υπολογίζουμε την αρχική τιμή του καινούργιου αξιόγραφου.

Άσκηση 9. *Επαληθεύστε έχοντας λύσει την Άσκηση 7, τον τύπο* $V_0 = \frac{1}{(1+r/2)^2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_2]$.

3) Κάνοντας απλές πράξεις μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η τιμή της μετοχής κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$ έχει κάθε περίοδο αναμενόμενη ποσοστιαία απόδοση ίση με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

$$S_1 = \frac{1}{1+r/2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_2|\mathcal{F}_1] \quad \text{και} \quad S_0 = \frac{1}{1+r/2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1] \tag{2.16}$$

Λαμβάνοντας υπόψη και τις σχέσεις (2.14) και (2.15), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι σ.δ. $\left(\frac{S_n}{(1+r/2)^n}\right)_{n\in\{0,1,2\}}$ και $\left(\frac{V_n}{(1+r/2)^n}\right)_{n\in\{0,1,2\}}$ είναι MG κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$ (*η αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία και των δύο αυτών αβέβαιων αξιογράφων έχει κάτω από το μέτρο* $\mathbb{Q}$ *την συμπεριφορά ενός συμμετρικού τυχαίου περιπάτου*).

2.3 Περισσότερες από δύο περίοδοι

Το μοντέλο των δύο περιόδων που μόλις περιγράψαμε μπορεί να επεκταθεί και σε $N > 2$ περιόδους με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Όπως και πριν, το επιτόκιο r αφορά απλό τοκισμό για μία από τις περιόδους και κρατάτε σταθερό για όλες. Από την άλλη μεριά, η μετοχή είναι μια στοχαστική διαδικασία $(S_n)_{n\in\{0,1,2,...,N\}}$, όπου σε κάθε βήμα έχουμε άνοδο της τιμής κατά u και πτώση κατά παράγοντα d. Δηλαδή, για κάθε $n \in \{0,1,2,...,N\}$ έχουμε

$$S_n = S_0 u^{k_n} d^{n-k_n}$$

όπου k_n ο αριθμός των περιόδων που είχαμε άνοδο της τιμής της μετοχής στις πρώτες n περιόδους[5]. Ο προφανής δειγματικός χώρος συμβολίζεται με $\Omega = \{B, G\}^N$ (όλες οι πιθανές Ν-άδες από B και G).

Σε αυτό το μοντέλο ο επενδυτής μπορεί να αλλάξει το χαρτοφυλάκιό του σε $N-1$ χρονικές στιγμές μέχρι και τον τερματικό χρόνο επιλέγοντας ζευγάρια $(\Delta_n, B_n)_{n\in\{0,1,2,...,N-1\}}$ όπου Δ_n είναι οι μετοχές που έχει στο διάστημα $[n, n+1)$ και B_n το αντίστοιχο ποσό που έχει δανειστεί/δανείσει σε αυτό το διάστημα. Ασφαλώς και στην περίπτωση αυτή έχουμε αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια, ιδιότητα που διασφαλίζεται αν ισχύει ότι

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r/n)(X_n - \Delta_n S_n)$$

για κάθε $n = 1, 2, ..., N-1$ (ο αρχικός πλούτος στην περίοδο $[n, n+1)$ είναι ο τελικός πλούτος την περίοδο $[n-1, n)$). Ακολουθώντας τα βήματα για την απόδειξη της σχέσης (2.12) μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο τελικός πλούτος X_N μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{X_N}{(1+r/N)^N} = \sum_{i=0}^{N-1}\Delta_i\left(\frac{S_i}{(1+r/N)^i} - \frac{S_{i-1}}{(1+r/N)^{i-1}}\right) + x_0 \tag{2.17}$$

[5]Τα δυνατά μονοπάτια πάνω στο δέντρο για να φτάσει η μετοχή στην τιμή $S_n = S_0 u^{k_n} d^{n-k_n}$ είναι $\frac{n!}{k_n!(n-k_n)!}$.

Αναλόγως έχουμε και τον ορισμό του arbitrage.

Ορισμός 6. *Μια επενδυτική στρατηγική N περιόδων με αρχικό πλούτο $x_0 \in \mathbb{R}$ ονομάζεται arbitrage αν για τουλάχιστον ένα $i = 1, 2, ..., N$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_i}{(1+r/N)^i} \geq x_0\right) = 1 \quad and \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_i}{(1+r/N)^i} > x_0\right) > 0. \tag{2.18}$$

Παρατήρηση 7. *Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις έχουμε ότι $(NA) \Leftrightarrow d < 1 + (r/N) < u$.*

Χωρίς να αναλύσουμε όλα τα βήματα από την αρχή και καθώς η μεθοδολογία δεν διαφέρει σε τίποτα ουσιαστικά από την περίπτωση των δύο περιόδων, θα κάνουμε ενδεικτικά μόνο κάποιες επισημάνσεις.

i. Ο τρόπος που τιμολογούνται νέα αξιόγραφα που δίνουν απόδοση στον τερματικό χρόνο $T = N$ είναι ο ίδιος με το μοντέλο δύο περιόδων. Πιο συγκεκριμένα, δουλεύοντας ανάποδα στον χρόνο (από την τελευταία περίοδο προς την αρχική, backwards) απομονώνουμε κάθε φορά ένα μέρος του δέντρου που έχει δύο κλαδιά. Για παράδειγμα, αρχίζουμε από το πάνω δεξιά κομμάτι του δέντρου που δίνει μόνο δυο τιμές στην μετοχή $S_N = u^N S_0$ ή $S_N = u^{N-1} d S_0$. Σε αυτά τα ενδεχόμενα (N συνεχόμενες άνοδοι και $N-1$ άνοδοι και πτώση μόνο στην τελευταία περίοδο), σημειώνουμε την τιμή του αξιόγραφου που θα είναι γνωστή μιας και θα αναφέρεται στο συμβόλαιο του (π.χ. αν πρόκειται για δικαίωμα αγοράς θα έχουμε $V_N = \max(0, S_N - K)$). Στην συνέχεια φτιάχνουμε το σύστημα που βρίσκει το χαρτοφυλάκιο τέλειας αντιστάθμισης όταν ένα επενδυτής έχει την υποχρέωση να πληρώσει την απόδοση του αξιόγραφου στον χρόνο N. Πάλι θα έχουμε ένα σύστημα με 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους που συγκεκριμένα θα είναι οι Δ_{N-1} και B_{N-1}, στο σημείο του δέντρου που έχουμε την τιμή της μετοχής ίση με $S_{N-1} = u^{N-1} S_0$. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι τα χαρτοφυλάκια είναι αυτοχρηματοδοτούμενα θα εξάγουμε και την τιμή που θα πρέπει να έχει το αξιόγραφο στο χρόνο $N-1$. Από εκεί και πέρα η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι και την αρχική περίοδο. Το αποτέλεσμα θα είναι να έχουμε βρει τις τιμές του αξιόγραφου σε κάθε σημείο του δέντρου, αλλά και το χαρτοφυλάκιο που αναπροσαρμοζόμενο θα κάνει την τέλεια αντιστάθμιση κινδύνου ενός επενδύτη που έχει πουλήσει το αξιόγραφο αυτό.

ii. Μια σημαντική ιδιότητα που έχει το διωνυμικό μοντέλο δύο ή και περισσότερων περιόδων είναι ότι η τιμή της μετοχής (που ουσιαστικά κινείται σαν ένας τυχαίος περίπατος) έχει την **ιδιότητα Markov**. Αυτό γίνεται σαφές από τον τρόπο που κινείται η τιμή της μετοχής: $S_n = aS_{n-1}$ όπου $a = u$ ή $a = d$, δηλαδή για την τιμή της μετοχής στην επόμενη ακριβώς χρονική στιγμή, μας ενδιαφέρει μόνο η τιμή της τώρα (όχι ποιο μονοπάτι ακολούθησε η μετοχή για να φτάσαμε στην τρέχουσα τιμή της). Αυτή η ιδιότητα πέρα ότι συνάδει και με την υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς, είναι και εξαιρετικά σημαντική για τις εφαρμογές, καθώς καταστεί πιο εύκολο και εύχρηστο τον τρόπο που γίνονται οι υπολογιστικές μελέτες (computational methods) σε προβλήματα τιμολόγησης και επενδύσεων.

   Επίσης, όπως είδαμε ο υπολογισμός της τιμής (σε κάθε σημείο του δέντρου) ενός αξιόγραφου που πληρώνει απόδοση μόνο στον τερματικό χρόνο γίνεται βήμα βήμα. Αυτό σημαίνει ότι για την τιμή στην επόμενη περίοδο θα λάβουμε υπόψη μας μόνο την τιμή στην αμέσως προηγούμενη περίοδο. Με άλλα λόγια η ιδιότητα Markov θα κληροδοτηθεί και στην σ.δ. που αναπαριστά την τιμή του αξιόγραφου, δηλαδή την σ.δ. $(V_n)_{n\in\{0,1,2,...,N\}}$.

iii. Επαναλαμβάνοντας τα βήματα για τον υπολογισμό της τιμής V_n για κάποιο σημείο του δέντρου στον χρόνο $t = n$ θα καταλήξουμε (όπως και στην περίπτωση 2 περιόδων) στον τύπο

$$V_n = \frac{1}{1+r/N}\left[qV_{n+1}(\{\text{άνοδος στον χρόνο } n+1\}) + (1-q)V_{n+1}(\{\text{πτώση στον χρόνο } n+1\})|S_n\right]$$

ή ισοδύναμα

$$V_n = \frac{1}{1+r/N}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_{n+1}|S_n]$$

όπου $q = \frac{(1+r/N)-d}{u-d}$, το ουδέτερο στον κίνδυνο μέτρο πιθανότητας. Επίσης, λόγω της ιδιότητας Markov έχουμε

$$V_n = \frac{1}{1+r/N}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_{n+1}|\mathcal{F}_n] \tag{2.19}$$

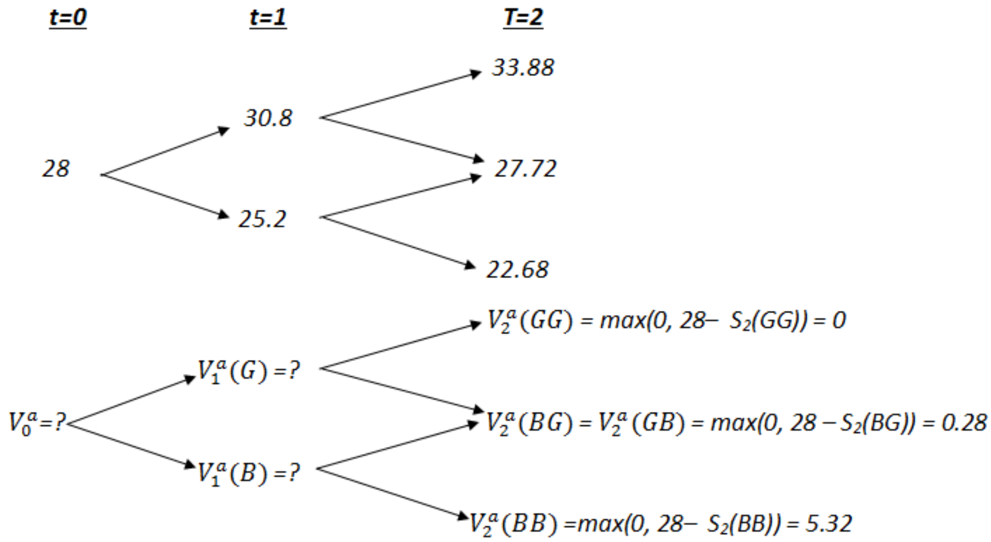
για κάθε $n \in \{0, 1, 2, ..., N-1\}$. Η σχέση (2.19) σημαίνει ότι η σ.δ. $\left(\frac{V_n}{(1+r/N)^n}\right)_{n\in\{0,1,2,...,N\}}$ είναι ένα $\mathbb{Q}$-MG. Κάνοντας απλές πράξεις μπορούμε επίσης να επαληθεύσουμε ότι η ιδιότητα martingale κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ ικανοποιείται και από την στοχαστική διαδικασία $\left(\frac{S_n}{(1+r/N)^n}\right)_{n\in\{0,1,2,...,N\}}$.

Άσκηση 10. *Αναπτύξτε το Παράδειγμα 1 για τρεις περιόδους και βρείτε την τιμή του δικαιώματος αγοράς σε κάθε σημείο του δέντρου.*

2.4 Μια αναφορά στα δικαιώματα Αμερικάνικου τύπου

Τα περισσότερα δικαιώματα αγοράς ή πώλησης είναι Αμερικάνικου τύπου δηλαδή δίνουν στον κάτοχό τους το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν από την λήξη τους. Ο τρόπος που υπολογίζεται στο διωνυμικό μοντέλο η τιμή ενός τέτοιου δικαιώματος καθώς και ο χρόνος για την πρόωρη άσκησή του μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε κάθε αξιόγραφο που δίνει το δικαίωμα στον κάτοχό του να καρπωθεί μια πρόωρη απόδοση η οποία ωστόσο θα σημαίνει και το τέλος του συμβολαίου.

Για την ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας θα επικεντρωθούμε σε ένα παράδειγμα δύο περιόδων που είχαμε δει και στις προηγούμενες σελίδες και σε ένα αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης. Το παρακάτω διάγραμμα έχει όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε (θέτοντας όπως πριν $r = 5\%$).



V_n^a είναι η τιμή του αμερικάνικου δικαιώματος την χρονική στιγμή n. Η μόνη διαφορά που έχουμε με το ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης είναι ότι ο κάτοχός του μπορεί να το εξασκήσει και την χρονική στιγμή $t = 1$ αλλά και στον αρχικό χρόνο. Η αξία της θέση του σε περίπτωση πρόωρης άσκησης ονομάζεται *εσωτερική αξία* (intrinsic value) και συμβολίζεται με $g(S_n)$. Για παράδειγμα, στο παραπάνω δέντρο $g(S_1(\{B\})) = \max(0, 28 - S_1(\{B\})) = \max(0, 28 - 25.2) = 2.8$.

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στον χρόνο $t = 1$. Οι δύο επιλογές που έχει ο κάτοχος του δικαιώματος είναι να ασκήσει το δικαίωμά του ή να το αφήσει μέχρι και την λήξη του, κάνοντας το ουσιαστικά ίδιο με το δικαίωμα ευρωπαϊκού τύπου. Είναι προφανές ότι όταν κάνει πρόωρη άσκηση του δικαιώματος θα εισπράξει $g(S_1)$ ν.μ., ενώ σε διαφορετική περίπτωση θα του έχει μείνει ένα δικαίωμα ευρωπαϊκού τύπου που όπως έχουμε δει προηγουμένως θα έχει αξία ίση με την προεξοφλημένη αναμενόμενη τιμή της απόδοσης κάτω από το ουδέτερο στον κίνδυνο μέτρο πιθανότητας. Συνοπτικά έχουμε:

Επιλογή:	Άσκηση δικαιώματος	Μη άσκηση δικαιώματος
Αξία θέσης:	$g(S_1)$	$V_1 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[V_2^a \middle| S_1\right]$

Πρόταση 2. *Για κάθε δικαίωμα ισχύει ότι*

$$V_1^a = \max(g(S_1), V_1) \tag{2.20}$$

όπου V_1 είναι η αξία του αντίστοιχου δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου.

<u>Απόδειξη</u>
Θα δείξουμε ότι σε περίπτωση που δεν ισχύει ο τύπος (2.20) θα παραβιάζεται η υπόθεση (NA).

Έστω ότι $V_1^a > \max(g(S_1), V_1)$. Τότε ένας επενδυτής θα πουλούσε το δικαίωμα εισπράττοντας V_1^a. Αν γίνει πρόωρη άσκηση του δικαιώματος από τον αγοραστή τότε ο επενδυτής θα έχει άμεσο κέρδος $V_1^a - g(S_1) > 0$. Ακόμα όμως και να μην γίνει πρόωρη άσκηση, το δικαίωμα μετατρέπεται στην ουσία σε ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα και όπως έχουμε δει θα χρειαστεί μόνο V_1 ν.μ. για να κάνει τέλεια αντιστάθμιση του κινδύνου που θα έχει στον χρόνο 2. Οι υπόλοιπες $V_1^a - V_1$ ν.μ. είναι σίγουρο κέρδος.

Εάν $V_1^a < \max(g(S_1), V_1)$, τότε ένας επενδυτής θα μπορούσε να κάνει arbitrage αγοράζοντας το δικαίωμα. Αν μάλιστα $V_1^a < g(S_1)$, το arbitrage γίνεται άμεσα με την πρόωρη άσκηση του δικαιώματος. Στην περίπτωση που έχουμε την ανισότητα $V_1^a < V_1$, ο επενδυτής θα μπορούσε να αναπαράγει την απόδοση του δικαιώματος με περισσότερα χρήματα από αυτά που έδωσε για να το αγοράσει. Αυτό θα του αφήσει στον χρόνο 1 ένα πόσο $V_1 - V_1^a$ ν.μ. χωρίς καμία υποχρέωση στον τερματικό χρόνο. ■

Πότε συμφέρει η πρόωρη άσκηση δικαιώματος;

Θα μπορούσαμε να έχουμε ένα κριτήριο σε κάθε σημείο του δέντρου που να μας υποδεικνύει πότε θα ήταν συμφέρον να κάνουμε πρόωρη άσκηση του δικαιώματος; Η απάντηση είναι θετική.

Πρόταση 3. *Για κάθε δικαίωμα ισχύει ότι η πρόωρη άσκηση του δικαιώματος γίνεται όταν*[6]

$$V_1^a > V_1 \quad \text{ή ισοδύναμα όταν } g(S_1) > V_1. \tag{2.21}$$

όπου V_1 είναι η αξία του αντίστοιχου δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου.

Απόδειξη

Πρώτα θα πρέπει να δούμε ότι δεν συμφέρει έναν κάτοχο αμερικάνικου δικαιώματος να το ασκήσει πρόωρα όταν $V_1^a < V_1$ δηλαδή όταν $g(S_1) < V_1$. Αυτό συμβαίνει γιατί θα ήταν προτιμότερο για τον επενδυτή αντί να ασκήσει το δικαίωμά του, να το πουλήσει στην τιμή V_1^a που είναι μεγαλύτερη από τα έσοδα πρόωρης άσκησης και την τιμή V_1 (προσέξτε ότι δεν χρειάζεται να βρεθεί αγοραστής, γιατί ο επενδυτής μπορεί να χρησιμοποιήσει το ποσό V_1^a για να αναπαράξει την απόδοση στην χρόνο 2).

Στην περίπτωση όπου $V_1^a > V_1$ ο επενδυτής θα έχει συμφέρον να κάνει πρόωρη άσκηση του δικαιώματός του. Και αυτό γιατί θα πάρει μια απόδοση που θα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή του ευρωπαϊκού δικαιώματος, αλλά και το κυριότερο ότι ακόμα και να ήθελε να ποντάρει σε μια μετέπειτα ευνοϊκότερη για αυτόν κίνηση της μετοχής θα ήταν προτιμότερο να ασκήσει το δικαίωμα και να χρησιμοποιήσει μόνο το ποσό V_1 για να αναπαράξει την απόδοση του ευρωπαϊκού δικαιώματος περιμένοντας την ευνοϊκότερη αυτή απόδοση. Αυτό σημαίνει ότι η άσκηση του δικαιώματος όταν $V_1^a > V_1$ είναι πάντα συμφέρουσα. ■

Ο τρόπος τιμολόγησης

Ο τρόπος που γίνεται η τιμολόγηση πηγάζει από την θεωρία που αναπτύξαμε στην περίπτωση των δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου και την σχέση (2.20). Πάλι η διαδικασία τιμολόγησης γίνεται δουλεύοντας ανάποδα στον χρόνο (backwards in time). Σε κάθε σημείο του δέντρου της προτελευταίας περιόδου, βρίσκουμε πρώτα την τιμή του αντίστοιχου ευρωπαϊκού δικαιώματος και εφαρμόζουμε τον τύπο (2.20) για να προκύψει η τιμή του αμερικάνικου δικαιώματος. Στην συνέχεια, πάμε μια περίοδο πίσω και εφαρμόζουμε ακριβώς την ίδια μέθοδο μόνο που τώρα οι τιμές του αμερικάνικου δικαιώματος στην προτελευταία περίοδο χρησιμοποιούνται σαν οι τελικές αποδόσεις του αξιόγραφου. Ο αναγνώστης ενθαρρύνεται να λύσει τις παρακάτω ασκήσεις για την εμπέδωση αυτής της μεθοδολογίας.

Άσκηση 11. *Θεωρείστε το περιβάλλον της Άσκησης 7 και βρείτε την τιμή του αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης σε κάθε ένα από τα σημείο του δέντρου δύο περιόδων. Σε ποια σημεία του δέντρου είναι η πρόωρη άσκηση του δικαιώματος συμφέρουσα;*

[6] Η ίδια ακριβώς σχέση προκύπτει και όταν έχουμε ένα μοντέλο με περισσότερες από δύο περιόδους.

Άσκηση 12. *Θεωρείστε και πάλι το περιβάλλον της Άσκησης 7 και επαληθεύστε ότι η τιμή του αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς είναι η ίδια με αυτή του αντίστοιχου δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου σε κάθε ένα από τα σημείο του δέντρου δύο περιόδων. Σε ποια σημεία του δέντρου είναι η πρόωρη άσκηση του δικαιώματος συμφέρουσα;*

Chapter 3

Μη Πλήρεις Αγορές

Το διωνυμικό μοντέλο που περιγράψαμε στις παραπάνω σελίδες μπορεί να είναι ιδιαίτερα απλοϊκό, ωστόσο επεκτάσεις και παραλλαγές του έχουν μεγάλη εφαρμογή σε πρακτικά ζητήματα υπολογισμών, τόσο για τιμολογήσεις όσο και για επιλογές χαρτοφυλακίων. Η πιο γενναία όμως υπόθεση που γίνεται στο μοντέλο αυτό είναι ότι σε κάθε ένα νέο αξιόγραφο μπορεί να γίνει τέλεια αντιστάθμιση με την χρήση μόνο των υπαρχόντων και ήδη τιμολογημένων αξιόγραφων. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι δεν θα έχει νόημα η εισαγωγή κανενός άλλου νέου αξιόγραφου στην αγορά, αφού οι ανάγκες (επενδυτικές ή αντισταθμιστικές) θα μπορούν να καλυφτούν από τα άλλα αξιόγραφα. Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να λύσουμε το σύστημα που μας δίνει τα Δ και το B (ένα γραμμικό σύστημα 2×2). Όπως τονίσαμε και παραπάνω, αυτή είναι μια πολύ ειδική περίπτωση αγορών, που ονομάζονται **πλήρεις** (**complete markets**). Για οποιαδήποτε άλλη αγορά όπου υπάρχουν (νέα) αξιόγραφα για τα οποία η απόδοση δεν μπορεί να αναπαραχθεί από τα υπόλοιπα ήδη τιμολογημένα αξιόγραφα, η μέθοδος τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνου που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δεν είναι αρκετή.

Ένα απλό παράδειγμα μη πλήρους αγοράς είναι το λεγόμενο **τριωνυμικό μοντέλο** (**trinomial model**) μιας περιόδου, όπου αντί για δύο πιθανά ενδεχόμενα στον μελλοντικό χρόνο έχουμε τρία. Δηλαδή, $\Omega = \{G, B, M\}$ και οι τιμές που παίρνει η μετοχή είναι $S_1(G) = uS_0$, $S_1(B) = dS_0$ και $S_1(M) = mS_0$, όπου χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$d < 1 \leq m < u.$$

Τα μέτρα πιθανότητας πάνω σε αυτόν τον χώρο θα είναι της μορφής $(p_1, p_2, 1 - p_1 - p_2)$, όπου $p_1 = \mathbb{P}(G)$ και $p_2 = \mathbb{P}(M)$. Και σε αυτή την περίπτωση βεβαίως υποθέτουμε την ύπαρξη ενός αξιόγραφου μηδενικού κινδύνου με ποσοστιαία απόδοση $r > 0$, που θα έχει την έννοια του δανεισμού (όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο).

Άσκηση 13. *Αποδείξτε ότι και στο τριωνυμικό μοντέλο ισχύει η ισοδυναμία:*

$$\textit{(NA)} \Leftrightarrow d < 1 + r < u.$$

Ακολουθώντας τα βήματα του διωνυμικού υποδείγματος ένα αξιόγραφο που θα έχει απόδοση στον χρόνο 1 ίση με μια τυχαία μεταβλητή V_1 θα μπορέσει να γίνει *perfectly replicated* αν μπορούμε να βρούμε ένα χαρτοφυλάκιο (Δ_0, B_0) τέτοιο ώστε (συγκρίνετε με την σχέση (2.8)):

$$\Delta_0 S_1 + B_0(1 + r) = V_1 \tag{3.1}$$

που συνεπάγεται την λύση του γραμμικού συστήματος 3×2

$$\begin{aligned}
\Delta_0 u S_0 + B_0(1+r) &= V_1(G) \\
\Delta_0 m S_0 + B_0(1+r) &= V_1(M) \\
\Delta_0 d S_0 + B_0(1+r) &= V_1(B)
\end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση μόνο στην πολύ ειδική περίπτωση όπου δύο από τις τρεις παραπάνω εξισώσεις είναι γραμμικώς εξαρτημένες (linearly dependent). Με άλλα λόγια αυτό σημαίνει ότι όταν ένας επενδυτής πουλήσει αυτό το αξιόγραφο δεν υπάρχει τρόπος να αντισταθμίσει εντελώς τον κίνδυνο που αναλαμβάνει χρησιμοποιώντας την μετοχή και τον δανεισμό.

Ένας τρόπος να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα είναι όταν πέρα από την αρχική μετοχή και τον δανεισμό υπάρχει και ένα ακόμα ριψοκίνδυνο αξιόγραφο (έστω μια δεύτερη μετοχή) που να έχει ήδη τιμολογηθεί στην αγορά. Τότε ο επενδυτής θα έχει ένα ακόμα "εργαλείο" να χρησιμοποιήσει για να φτιάξει ένα χαρτοφυλάκιο που να κάνει τέλεια αντιστάθμιση κινδύνου. Έστω ότι η τιμή της δεύτερης μετοχής συμβολίζεται με $S_0^{(2)}$ στον αρχικό χρόνο και με $S_1^{(2)}$ στον χρόνο $T = 1$[1]. Τότε, το χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται από τρία στοιχεία $(\Delta_0^{(1)}, \Delta_0^{(2)}, B_0)$ όπου $\Delta_0^{(1)}$ ο αριθμός των κομματιών της πρώτης μετοχής και $\Delta_0^{(2)}$ ο αριθμός των κομματιών της δεύτερης που θα επιλέξει ο επενδυτής. Τώρα το πρόβλημα αντιστάθμισης είναι ένα γραμμικό σύστημα 3×3 που λύνεται (εκτός και αν οι δύο μετοχές έχουν γραμμικώς εξαρτημένες αποδόσεις).

$$\begin{aligned}
\Delta_0^{(1)} u S_0 + \Delta_0^{(2)} S_1^{(2)}(G) + B_0(1+r) &= V_1(G) \\
\Delta_0^{(1)} m S_0 + \Delta_0^{(2)} S_1^{(2)}(M) + B_0(1+r) &= V_1(M) \\
\Delta_0^{(1)} d S_0 + \Delta_0^{(2)} S_1^{(2)}(D) + B_0(1+r) &= V_1(B)
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη και την αρχική σχέση $\Delta_0^{(1)} S_0 + \Delta_0^{(2)} S_0^{(2)} + B_0 = V_0$, μπορούμε να εξάγουμε και την μοναδική no-arbitrage τιμή του αξιόγραφου με απόδοση V_1.

Άσκηση 14. *Λαμβάνοντας υπόψη τα παρακάτω δεδομένα:*

$$S_0 = 10,\ u = 1.1,\ d = 0.9,\ m = 1,\ r = 5\%,\ S_0^{(2)} = 20,$$
$$S_1^{(2)}(G) = 23,\ S_1^{(2)}(M) = 21,\ S_1^{(2)}(B) = 15$$

υπολογίστε την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς πάνω στην πρώτη μετοχή με τιμή άσκησης (strike price) $K = 9$. Ποιο είναι το μέτρο ουδέτερου κινδύνου;

M **πιθανές καταστάσεις και** $N + 1$ **αξιόγραφα**

Γενικεύοντας την παραπάνω συζήτηση μπορούμε να θεωρήσουμε μια αγορά μιας χρονικής περιόδου, με N το πλήθος ριψοκίνδυνα αξιόγραφα (risky assets), έστω μετοχές, όπου τα κάθε ένα μπορεί να πάρει μέχρι και M τιμές στον χρόνο $T = 1$ (εννοείται ότι υποθέτουμε και την ύπαρξη της επένδυσης μηδενικού κινδύνου. με ποσοστιαία απόδοση r). Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_M\}$$

[1] Για κάθε μετοχή που έχει ήδη τιμολογηθεί θα πρέπει να ισχύει μια αντίστοιχη σχέση όπως η $d < 1 + r < u$ για να διατηρείται η υπόθεση (NA). Δηλαδή θα πρέπει η μεγαλύτερη (χαμηλότερη) απόδοση που θα έχει η μετοχή να μην είναι μεγαλύτερη (χαμηλότερη) από την απόδοση της επένδυσης μηδενικού κινδύνου.

και $S_1^{(i)}(\omega_j)$ είναι η τιμή που παίρνει η i μετοχή στην χρονική στιγμή 1, όταν συμβεί το ενδεχόμενο ω_j, όπου $i = 1, 2, ..., N$ και $j = 1, 2, ..., M$.

Σε τέτοιες καταστάσεις είναι σύνηθες να υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει ζευγάρι από μετοχές οι οποίες να έχουν απόδοση γραμμικά εξαρτημένη. Πιο αυστηρά, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i S_1^{(i)}(\omega_j) = \mathbf{b}$$

για κάθε $j = 1, 2, ..., M$. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν μετοχές που οι πιθανές αποδόσεις της μίας είναι γραμμική συνάρτηση μιας άλλης (σε μια τέτοια περίπτωση η λειτουργία της μιας από τις δύο μετοχές δεν θα είχε νόημα).

Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ορισμό μιας πλήρους αγοράς.

Ορισμός 7. *Μια αγορά που αποτελείται από N αξιόγραφα, $\left(S_n^{(i)}\right)_{n\in\{0,1\}}$, όπου $i = 1, 2, ..., N$ ονομάζεται **πλήρης** αν για κάθε τυχαία μεταβλητή V_1 που είναι μετρήσιμη ως προς την πληροφορία που παράγουν τα N αξιόγραφα, υπάρχει διάνυσμα $\left(B_0, \Delta_0^{(1)}, \Delta_0^{(2)}, ..., \Delta_0^{(N)}\right) \in \mathbb{R}^{N+1}$ που να λύνει την εξίσωση*

$$V_1 = \sum_{i=1}^{N} \Delta_0^{(i)} S_1^{(i)} + B_0(1+r) \tag{3.2}$$

Αν η εξίσωση (3.2) έχει λύσει για **κάθε** απόδοση V_1, τότε **κάθε** αξιόγραφο μπορεί να γίνει perfectly replicated, δηλαδή η απόδοσή του να αναπαραχθεί από τα υπάρχοντα αξιόγραφα. Σε αυτή την περίπτωση η μοναδική τιμή που διατηρεί την υπόθεση (NA) θα δίνεται από το τύπο

$$V_0 = \sum_{i=1}^{N} \Delta_0^{(i)} S_0^{(i)} + B_0 \tag{3.3}$$

Με δεδομένο ότι έχουμε μη γραμμικές αποδόσεις μετοχών η εξίσωση (3.2) αναπαριστά ένα γραμμικό σύστημα $M \times (N+1)$. Επομένως, η αγορά γραμμικώς ανεξάρτητων μετοχών θα είναι

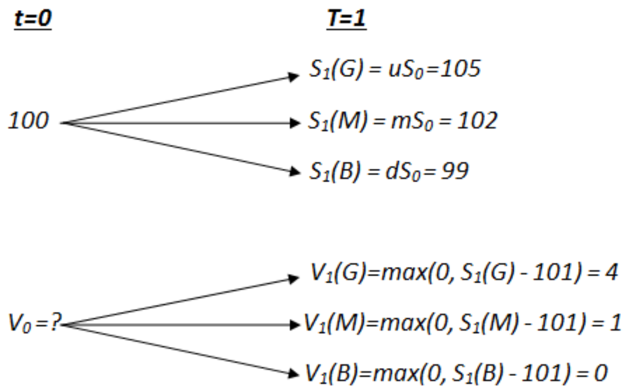
πλήρης *αν και μόνο αν* $M \leq N+1$.

Δηλαδή αν τα γραμμικώς ανεξάρτητα αξιόγραφα στην αγορά είναι περισσότερα από τα πιθανά ενδεχόμενα στον χρόνο $T = 1$.

Είναι όμως οι αγορές πλήρεις? Η απάντηση είναι σαφώς **αρνητική**. Ακόμα και στα απλοϊκά υποδείγματα των πεπερασμένων πιθανών καταστάσεων, είναι πέρα για πέρα μη ρεαλιστικό να υποθέσει κανείς ότι τα πιθανά αξιόγραφα είναι τόσα πολλά όσα και οι πιθανές καταστάσεις που επηρεάζουν άμεσα ή έμμεσα τις αγορές. Γιαυτό άλλωστε έχουμε κάθε τόσο καινούργια προϊόντα στην χρηματοοικονομική αγορά. Επειδή προσθέτουν κάλυψη ή κερδοσκοπικές ευκαιρίες σε ενδεχόμενα που τα υπάρχοντα αξιόγραφα δεν μπορούν να καλύψουν. Αν όντως οι αγορές μετοχών (ακόμα και οι μεγαλύτερες) ήταν πλήρεις, τότε δεν θα είχε ουσιαστικό νόημα η ύπαρξη των παραγώγων προϊόντων ή τουλάχιστον δεν θα ήταν τόσο υψηλός ο όγκος συναλλαγών τους. Υπάρχουν ακόμα πολλοί λόγοι που δικαιολογούν την μη πληρότητα των αγορών, όπως τα κόστη συναλλαγών που καθιστούν τα perfect replication χαρτοφυλάκια συχνά ανεφάρμοστα, οι περιορισμοί στις συναλλαγές που μειώνουν τα εργαλεία των επενδυτών για αντιστάθμιση, τα πιθανά ενδεχόμενα που αφορούν μη διαπραγματεύσιμα αξιόγραφα, όπως η θερμοκρασία ή μη διαπραγματεύσιμες μετοχές κ.α. Αυτό που πρέπει να κρατήσουμε από αυτή την συζήτηση είναι ότι γενικά οι αγορές δεν έχουν την πληρότητα που απαιτείται για να γίνει η τιμολόγηση για όλα τα αξιόγραφα με τον τρόπο που την κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ωστόσο οι γνώσεις που έχουμε πάρει έως τώρα είναι ένα καλό πρώτο βήμα.

Τιμολόγηση στις μη πλήρεις αγορές

Θα αναπτύξουμε την επιχειρηματολογία μας μέσα από ένα απλό παράδειγμα ενός τριωνυμικού μοντέλου μιας περιόδου και την τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς. Έχοντας επιτόκιο $r = 1\%$ υποθέτουμε ότι η αγορά έχει μόνο ένα ριψοκίνδυνο αξιόγραφο (μία μόνο μετοχή) και οι απαραίτητες πληροφορίες δίνονται στο παρακάτω διάγραμμα.



Η αρχική σχέση $\Delta_0 S_0 + B_0 = V_0$ θα μας έδινε την λύση στο πρόβλημα τιμολόγησης αν μπορούσαμε να λύσουμε το σύστημα $\Delta_0 S_1 + 1.01 B_0 = V_1$ ή ισοδύναμα το σύστημα

$$\begin{aligned} 105\Delta_0 + 1.01B_0 &= 4 \\ 102\Delta_0 + 1.01B_0 &= 1 \\ 99\Delta_0 + 1.01B_0 &= 0 \end{aligned}$$

Ωστόσο δεν έχουμε λύση.[2] *Πώς λοιπόν θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα τιμολόγησης αλλά αυτό της αντιστάθμισης κινδύνου;*

Στην περίπτωση που μπορούσαμε να κάνουμε τέλεια αντιστάθμιση στον κίνδυνο που έχει η πώληση ενός παραγώγου είδαμε ότι η (NA) τιμή μπορούσε να δοθεί σαν αναμενόμενη τιμή της προεξοφλημένης απόδοσης του παραγώγου κάτω από το μέτρο πιθανότητας μηδενικού κινδύνου. Θα μπορούσαμε ενδεχομένως να χρησιμοποιήσουμε πάλι τον ίδιο τύπο για την τιμολόγηση για το παράγωγο, δηλαδή

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1].$$

[2] Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να μπορεί να γίνει σε ένα αξιόγραφο τέλεια αντιστάθμιση είναι η ισότητα

$$\frac{V_1(G) - V_1(M)}{uS_0 - mS_0} = \frac{V_1(M) - V_1(B)}{mS_0 - dS_0}.$$

Αυτή η σημαντική σχέση **αφήνεται σαν άσκηση**.

Ωστόσο θα πρέπει πρώτα να βρεθεί το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου $\mathbb{Q}$, δηλαδή το μέτρο που κάνει την αναμενόμενη ποσοστιαία απόδοση της μετοχής ίση με r. Δηλαδή θα πρέπει να βρούμε τις τιμές $(q_1, q_2, 1 - q_1 - q_2)$ για τις οποίες

$$0 < q_1 < 1, \quad 0 < q_2 < 1, \quad 0 < 1 - q_1 - q_2 < 1 \tag{3.4}$$

και

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1].$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει την εξίσωση

$$S_0 = q_1 \frac{uS_0}{1+r} + q_2 \frac{mS_0}{1+r} + (1 - q_1 - q_2)\frac{dS_0}{1+r} \tag{3.5}$$

που είναι ισοδύναμη με

$$1 + r = q_1 u + q_2 m + (1 - q_1 - q_2)d \tag{3.6}$$

Η σχέση (3.6) κάτω από τους περιορισμούς (3.4) είναι μία εξίσωση με δύο αγνώστους και το πιθανότερο είναι να έχει άπειρες λύσεις. Αυτό θα σημαίνει στην ουσία ότι θα έχουμε άπειρα και όχι ένα μέτρα πιθανότητας που θα είναι ουδέτερα στον κίνδυνο.

Ο τρόπος που θα πρέπει να λυθεί η (3.6) είναι κρατώντας μια από τις δύο μεταβλητές q_1 ή q_2 ελεύθερη. Έστω ότι θέτουμε $q_2 = \lambda$, όπου λ μια ελεύθερη μεταβλητή, όπου $0 < \lambda < 1$. Τότε η εξίσωση (3.6) δίνει λύση

$$q_1 = \frac{(1+r) - d - \lambda(m-d)}{u-d} \tag{3.7}$$

$$q_2 = \lambda \tag{3.8}$$

Το επόμενο βήμα είναι να δούμε τους περιορισμούς (3.4). Η ανισότητα $0 < q_1 < 1$ δίνει την ανισότητα

$$-\frac{u-(1+r)}{m-d} < \lambda < \frac{(1+r)-d}{m-d}.$$

Από την άλλη η ανισότητα $0 < 1 - q_1 - q_2 < 1$ μας δίνει

$$-\frac{(1+r)-d}{u-m} < \lambda < \frac{u-(1+r)}{u-m}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη και την ανισότητα $0 < q_2 < 1$ ή ισοδύναμα την ανισότητα $0 < \lambda < 1$, θα έχουμε ότι ένα μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου θα είναι το μέτρο

$$\mathbb{Q} = (q_1, q_2, 1 - q_1 - q_2) = \left(\frac{(1+r) - d - \lambda(m-d)}{u-d}, \lambda, \frac{u - (1+r) - \lambda(u-m)}{u-d} \right)$$

για κάθε λ τέτοιο ώστε

$$0 < \lambda < \min\left\{ \frac{(1+r)-d}{m-d}, \frac{u-(1+r)}{u-m} \right\}. \tag{3.9}$$

Για να υπάρχει επομένως λύση στην εξίσωση (3.6) κάτω από τους περιορισμούς (3.4) θα πρέπει ο όρος $\min\left\{ \frac{(1+r)-d}{m-d}, \frac{u-(1+r)}{u-m} \right\}$ να είναι μεγαλύτερος από το 0 ή ισοδύναμα θα πρέπει και οι δύο όροι $\frac{(1+r)-d}{m-d}$ και $\frac{u-(1+r)}{u-m}$ να είναι θετικοί. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με την ανισότητα

$d < 1 + r < u$, που έχουμε δει ότι είναι ισοδύναμη με υπόθεση (NA). Ωστόσο, οι λύσεις είναι περισσότερες από μία. Ουσιαστικά έχουμε άπειρα μέτρα πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου!

Στο παράδειγμά μας, έχουμε ότι η ελεύθερη μεταβλητή λ θα πρέπει να ανήκει στο διάστημα $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ και τα ουδέτερα στον κίνδυνο μέτρα πιθανότητας θα είναι της μορφής

$$\mathbb{Q} = (q_1, q_2, 1 - q_1 - q_2) = \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{2}{3} - \frac{\lambda}{2}\right).$$

Το σύνολο όλων αυτών των μέτρων θα συμβολίζεται με $\mathcal{M}$ και θα ονομάζεται το σύνολο των (ισοδύναμων[3]) *MG μέτρων πιθανότητας.*

Η επόμενη ερώτηση είναι ποιες τιμές παίρνει η αναμενόμενη τιμή της προεξοφλημένης αξίας του παραγώγου κάτω από όλα αυτά τα μέτρα. Αναζητούμε δηλαδή τις τιμές που παίρνει ο όρος $\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1]$, για κάθε $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$. Γενικά θα έχουμε

$$\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1] = \frac{1}{1+r}\left(q_1 V_1(G) + q_2 V_1(M) + (1 - q_1 - q_2)V_1(B)\right)$$

που στο παράδειγμά μας είναι ίσο με $\frac{1}{1.01}\left(\frac{4}{3} - \lambda\right)$, που για τις πιθανές τιμές του λ δίνει το διάστημα $(0.66, 1.32)$ δηλαδή έχουμε

$$\tfrac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1] \in (0.66, 1.32), \text{ για } \mathbb{Q} \in \mathcal{M}.$$

Αυτό που μπορούμε να δείξουμε είναι ότι αν η τιμή του αξιόγραφου είναι έξω από παραπάνω διάστημα τότε θα δημιουργηθεί δυνατότητα arbitrage. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4. *Με την εισαγωγή ενός αξιόγραφου με απόδοση V_1 ισχύει ότι:*

$$\text{διατήρηση της υπόθεσης (NA)} \quad \Leftrightarrow \quad V_0 \in \left(\min_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1], \max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1]\right). \quad (3.10)$$

Γενικά χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\underline{V}_0 = \min_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1]$ *και* $\bar{V}_0 = \max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1]$.

Απόδειξη

Θα κοιτάξουμε μόνο την περίπτωση του παραδείγματος μιας και η γενική περίπτωση αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. Έστω ότι η τιμή του αξιόγραφου είναι ίση με (ή μεγαλύτερη από) την τιμή $\bar{V}_0 = 1.32$. Το αξιόγραφο θα είναι μάλλον ακριβό επομένως ο επενδυτής θα μπορούσε να το πουλήσει. Για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο θα μπορούσε να αγοράσει Δ_0 μετοχές δανειζόμενος το ποσό $\Delta_0 S_0 - \bar{V}_0$. Επομένως η θέση του τον χρόνο 1 θα είναι

$$\Delta_0 S_1 - (1 + r)(\Delta_0 S_0 - \bar{V}_0) - V_1 = \Delta_0(S_1 - 1.01 S_0) + 1.01\bar{V}_0 - V_1$$

Αυτή η στρατηγική θα δώσει arbitrage αν ισχύουν και οι τρεις παρακάτω ανισότητες με μία να ισχύει αυστηρά.

$$\begin{aligned} 100\Delta_0(1.05 - 1.01) + \frac{4}{3} - 4 &\geq 0 \\ 100\Delta_0(1.02 - 1.01) + \frac{4}{3} - 1 &\geq 0 \\ 100\Delta_0(0.99 - 1.01) + \frac{4}{3} &\geq 0 \end{aligned}$$

[3] Δύο μέτρα πιθανότητας ονομάζονται ισοδύναμα εάν δίνουν μηδενικές πιθανότητες στα ίδια ενδεχόμενα, δηλαδή $\mathbb{P}(A) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbb{Q}(A) = 0$, όπου A ένα ενδεχόμενο. Στο τριωνυμικό (διωνυμικό) υπόδειγμα, δύο μέτρα είναι ισοδύναμα αν δίνουν θετικές πιθανότητες και στα τρία (δύο) πιθανά ενδεχόμενα.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για την τιμή $\Delta_0 = \frac{2}{3}$ η πρώτη και η τρίτη ανισότητα ισχύουν στην ισότητά τους, αλλά στην δεύτερη το αριστερό μέρος είναι ίσο με 1. Αυτό σημαίνει ότι αν επενδυτής πουλήσει το δικαίωμα αγοράς στην τιμή $\bar{V}_0 = 1.32$ και δανειστεί $\frac{2}{3}S_0 - \bar{V}_0 = 66.7 - 1.32 = 65.35$ ν.μ. και αγοράσει τα 2/3 της μετοχής, θα έχει κάνει arbitrage.

Παρομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι έχουμε arbitrage όταν η τιμή είναι ίση (ή μικρότερη από) την τιμή $\underline{V}_0 = 0.66$ (ο επενδυτής θα αγοράσει το αξιόγραφο, θα κάνει short selling σε 1/3 της μετοχής και θα δανείσει την διαφορά[4]). Για την άλλη μεριά της ισοδυναμίας (3.10), υποθέτουμε ότι η τιμή είναι μέσα διάστημα $(\underline{V}_0, \bar{V}_0)$. Αν υπήρχε arbitrage τότε θα μπορούσε ένας επενδυτής να αγοράσει (πουλήσει) Δ_0 μετοχές και να αγοράσει (πουλήσει) ϵ δικαιώματα αγοράς είτε δανείζοντας είτε δανειζόμενος έχοντας πλούτο στον χρόνο $T = 1$

$$X_1 = \Delta_0(S_1 - (1+r)S_0) + \epsilon(V_1 - (1+r)V_0) \tag{3.11}$$

με την ιδιότητα του arbitrage, δηλαδή

$$\mathbb{P}(X_1 \geq 0) = 1 \quad \text{και} \quad \mathbb{P}(X_1 > 0) > 0. \tag{3.12}$$

Όμως τα μέτρα πιθανότητας που ανήκουν στο $\mathcal{M}$ είναι ισοδύναμα με το μέτρο $\mathbb{P}$ δηλαδή δίνουν μηδενικές πιθανότητες στα ίδια ενδεχόμενα. Επομένως, οι σχέσεις στην (3.12) θα ισχύουν και για όλα τα μέτρα $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$, δηλαδή

$$\mathbb{Q}(X_1 \geq 0) = 1 \quad \text{και} \quad \mathbb{Q}(X_1 > 0) > 0. \tag{3.13}$$

Όμως παίρνοντας αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X_1 που δίνεται στην σχέση (3.11) κάτω από κάθε μέτρο $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$, θα έχουμε ότι $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_1] = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο λόγω της ανισότητας στην (3.13) (δεν μπορεί μια μη εκφυλισμένη τ.μ. που είναι θετική ή μηδέν να έχει αναμενόμενη τιμή ίση με το μηδέν). Επομένως arbitrage δεν μπορεί να υπάρχει κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη της ισοδυναμίας (3.10). ■

Χαρακτηρίζοντας τα αξιόγραφα που αντισταθμίζονται

Στις μη πλήρεις αγορές δεν μπορούν να γίνουν perfectly replicated *όλα* τα αξιόγραφα, μπορεί ωστόσο να γίνει τέλεια αντιστάθμιση κινδύνου σε *κάποια* από αυτά. Είδαμε προηγουμένως (έχει δοθεί σαν άσκηση) ότι στο τριωνυμικό υπόδειγμα όταν για την απόδοση V_1 ενός αξιόγραφου ισχύει η (πολύ ειδική) σχέση $\frac{V_1(G)-V_1(M)}{uS_0-mS_0} = \frac{V_1(M)-V_1(B)}{mS_0-dS_0}$, τότε μπορεί να γίνει τέλειο αντιστάθμισμα κινδύνου. Ωστόσο, σε πιο γενικά υποδείγματα μια παρόμοια σχέση δεν μπορεί να δοθεί. Μπορούμε όμως να δώσουμε έναν χαρακτηρισμό για το ποια αξιόγραφα εμπεριέχουν κίνδυνο που μπορεί να αντισταθμιστεί, μέσω των ουδέτερων στον κίνδυνο μέτρων πιθανότητας. Η πρόταση που ακολουθεί αναφέρεται στο τριωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου με μία μετοχή, ισχύει όμως και σε γενικότερα μοντέλα.

Πρόταση 5. *Η απόδοση ενός αξιόγραφου μπορεί να αναπαραχθεί από την μετοχή και από τον δανεισμό αν και μόνο αν η τιμή $\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1]$ είναι η ίδια για κάθε $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$. Στην περίπτωση αυτή, αυτή η κοινή τιμή είναι και η μοναδική τιμή του αξιόγραφου που διατηρεί την υπόθεση (NA).*

Απόδειξη
Έστω ότι μπορεί η γίνει τέλεια αντιστάθμιση, δηλαδή υπάρχει ένα Δ_0 και ένα x_0 τέτοια ώστε

[4] Το μέρος αυτό της απόδειξης **αφήνεται σαν άσκηση**.

$\Delta_0 S_1 + (1+r)(x_0 - \Delta_0 S_0) = V_1$. Παίρνοντας αναμενόμενη τιμή κάτω από ένα αυθαίρετα επιλεγόμενο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1] &= \Delta_0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1] + (1+r)(x_0 - \Delta_0 S_0) \\ &= \Delta_0 S_0 (1+r) + (1+r)(x_0 - \Delta_0 S_0) \\ &= (1+r)x_0 \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$, θα έχουμε $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1] = (1+r)x_0$, κάτι που συνεπάγεται και ότι η τιμή θα πρέπει να είναι ίση με x_0.

Για την άλλη μεριά της ισοδυναμίας[5] υποθέτουμε ότι $\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1]$ είναι ίδια για κάθε $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$, δηλαδή υπάρχει ένα x_0 τέτοιο ώστε

$$x_0 = \frac{1}{1+r}(q_1 V_1(G) + q_2 V_1(M) + (1 - q_1 - q_2) V_1(B))$$

για κάθε $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ ή ισοδύναμα για κάθε λ που ικανοποιεί την σχέση (3.9) ισχύει ότι

$$x_0 = \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r) - d - \lambda(m-d)}{u-d} V_1(G) + \lambda V_1(M) + \frac{u - (1+r) - \lambda(u-m)}{u-d} V_1(B)\right).$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέρη της παραπάνω εξίσωσης ως προς λ έχουμε

$$0 = -\frac{(m-d)}{u-d} V_1(G) + V_1(M) - \frac{(u-m)}{u-d} V_1(B)$$

Μετά από μια διαχείριση της παραπάνω εξίσωσης (προσθαφαιρώντας του κατάλληλους όρους) μπορούμε να αποδείξουμε ότι η παραπάνω σχέση συνεπάγεται την ισότητα

$$\frac{V_1(G) - V_1(M)}{uS_0 - mS_0} = \frac{V_1(M) - V_1(B)}{mS_0 - dS_0},$$

που σημαίνει ότι το αξιόγραφο μπορεί να αντισταθμιστεί. ■

Θεμελιώδη θεωρήματα τιμολόγησης

Η κατάσταση που περιγράψαμε στο τριωνυνικό υπόδειγμα μπορεί να γενικευτεί σε μοντέλα με $N+1$ αξιόγραφα και M πιθανές καταστάσεις[6]. Για ευκολία θα μιλήσουμε μόνο για αποτελέσματα σε υποδείγματα μιας περιόδου αν και θα πρέπει να τονιστεί ότι τα αποτελέσματα ισχύουν και σε μοντέλα περισσότερων περιόδων.

Στο υπόδειγμα λοιπόν με N μετοχές και M καταστάσεις, τα μέτρα πιθανότητας που είναι ουδέτερα στον κίνδυνο (αυτά δηλαδή που ανήκουν στο σύνολο $\mathcal{M}$), θα είναι της μορφής $\mathbb{Q} = (q_1, q_2, ..., q_M)$, όπου $q_M = 1 - q_1 - q_2 - ... - q_{M-1}$, και θα λύνουν την εξίσωση

$$\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^{(i)}] = S_0^{(i)}, \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, ..., N, \tag{3.14}$$

μαζί με τους περιορισμούς $0 < q_j < 1$ για κάθε $j = 1, 2, ..., M$. Το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα της τιμολόγησης αξιογράφων (*First Fundamental Theorem of Asset Pricing*) συνδυάζει την ύπαρξη μέτρων που λύνουν την εξίσωση (3.14) με την υπόθεση (NA)[7].

[5] Αυτό το μέρος της απόδειξης είναι διαφορετικό όταν έχουμε γενικά M καταστάσεις και $N+1$ αξιόγραφα. Ωστόσο και σε αυτή την περίπτωση το αποτέλεσμα του της πρότασης ισχύει αυτούσιο.

[6] Υπάρχει και μια αντίστοιχη θεωρία που γενικεύει τα εν λόγω αποτελέσματα ακόμα και σε μοντέλα συνεχούς χρόνου.

[7] Σημειώστε ότι έχουμε δει αυτή την σχέση στο απλό τριωνυμικό υπόδειγμα.

Θεώρημα 3. *Δεν υπάρχει στην αγορά arbitrage αν και μόνο αν υπάρχει έστω και μια λύση στην εξίσωση* (3.14)*. Με άλλα λόγια*

$$\text{(NA)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \neq \emptyset \tag{3.15}$$

όπου $\mathcal{M} \neq \emptyset$ σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα μέτρο πιθανότητας ουδέτερο στον κίνδυνο.

Η μία μεριά της απόδειξης είναι απλή και αφήνεται σαν άσκηση (είναι η Άσκηση 15). Η άλλη κατεύθυνση της (3.15) είναι κάπως πιο δύσκολη και δεν θα μας απασχολήσει στο μάθημα αυτό.

Άσκηση 15. *Αποδείξτε ότι αν υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας που να λύνει την εξίσωση* (3.14) *τότε δεν μπορεί να υπάρξει χαρτοφυλάκιο* $(\Delta_0^{(1)}, \Delta_0^{(2)}, ..., \Delta_0^{(N)}, B_0)$ *που να δίνει arbitrage.*
(Υπόδειξη: Υποθέστε ότι υπάρχει ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο με αρχικό πλούτο μηδέν και μετά πάρτε την αναμενόμενη τελική του απόδοση κάτω από ένα μέτρο $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$.)

Προσέξτε ότι στο παραπάνω θεώρημα δεν έχουμε αναφερθεί στο εάν το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ είναι μοναδικό ή όχι. Αν είναι μοναδικό, τότε η αναμενόμενη τιμή της προεξοφλημένης απόδοσης **κάθε** καινούργιου αξιόγραφου κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$, θα είναι και η μοναδική τιμή που θα διατηρεί την υπόθεση (NA). Σύμφωνα με το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα της τιμολόγησης αξιογράφων (*Second Fundamental Theorem of Asset Pricing*), αυτή η μοναδικότητα του μέτρου ισοδυναμεί με την πληρότητα της αγοράς.

Θεώρημα 4. *Έστω ότι δεν υπάρχει arbitrage στην αγορά (δηλαδή $\mathcal{M} \neq \emptyset$). Τότε, το σύνολο $\mathcal{M}$ περιέχει **μόνο ένα** μέτρο πιθανότητας αν και μόνο αν η αγορά είναι **πλήρης**.*

Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος είναι εξαιρετικά έξυπνη, αλλά δεν θα μας απασχολήσει στο μάθημα αυτό.

Ακολουθούν μερικές ενδιαφέρουσες ασκήσεις.

Άσκηση 16. *Υιοθετείστε το παράδειγμα τριωνυμικού μοντέλου που εξετάσαμε παρακάτω ($S_0 = 100$, $u = 1.05$, $m = 1.02$, $d = 0.99$ και $r = 1\%$). Βρείτε το εύρος των τιμών που θα πρέπει να έχει η τιμή ενός δικαιώματος πώλησης με τιμή άσκησης $K = 104$. Πώς θα αλλάξει το εύρος αυτό αν η τιμή άσκησης ήταν $K = 100$;*

Άσκηση 17. *Υιοθετείστε το τριωνυμικό υπόδειγμα με μία μόνο μετοχή. Δείξτε ότι τα μόνα δικαιώματα αγοράς που μπορούν να γίνουν perfectly replicated είναι αυτά με τιμή άσκησης $K \leq dS_0$ ή $K \geq uS_0$. Βρείτε το Δ_0 και το B_0 του replicating portfolio. Σχολιάστε το αποτέλεσμά που βρήκατε.*

Άσκηση 18. *Υιοθετείστε ένα τριωνυμικό υπόδειγμα με μία μόνο μετοχή όπου $S_0 = 10$, $u = 1.1$, $m = 1.04$, $d = 0.9$ και $r = 5\%$). Υπολογίστε:*

(i) Το σύνολο των ουδέτερων στον κίνδυνο μέτρων πιθανότητας.

(ii) Τις τιμές ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή άσκησης $K = 10$ διατηρούν την υπόθεση (NA).

Chapter 4

Βέλτιστα Χαρτοφυλάκια

Στα προηγούμενα κεφάλαια έχουμε ασχοληθεί με χαρτοφυλάκια που δημιουργούνται με σκοπό την αντιστάθμιση κάποιων δεδομένων κινδύνων που έχουν να κάνουν με τα νέα αξιόγραφα που εισάγουμε στην αγορά. Στην περίπτωση που ο κίνδυνος που έχει αναληφθεί μπορεί να αντισταθμιστεί πλήρως με ένα χαρτοφυλάκιο ο σκοπός μας ήταν να βρούμε αυτό το χαρτοφυλάκιο (που το ονομάσαμε perfect replication portfolio) και να υπολογίσουμε το αρχικό του κόστος που ήταν και η μοναδική τιμή του αξιόγραφου που διατηρούσε την υπόθεση (NA). Όταν όμως οι αγορές δεν είναι πλήρεις τότε αυτό το χαρτοφυλάκιο δεν υπάρχει πάντα και ο τρόπος που γίνεται η αντιστάθμιση κινδύνου είναι διαφορετικός. Αναζητώντας τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια τόσο όταν ο σκοπός του επενδυτή είναι αντισταθμιστικός τόσο και όταν είναι κερδοσκοπικός (speculation) θα πρέπει να θέσουμε το κριτήριο που θα θελήσει να μεγιστοποιήσει ο επενδυτής. Στην παρακάτω συζήτηση θα υιοθετήσουμε το μοντέλο μιας χρονικής περιόδου με τις M πιθανές καταστάσεις και τα N ριψοκίνδυνα αξιόγραφα και το ένα μη-ριψοκίνδυνο αξιόγραφο (δηλαδή τον δανεισμό).

Έτσι ένας επενδυτής με αρχικό πλούτο $x_0 \in \mathbb{R}$ θα φτιάξει ένα χαρτοφυλάκιο επιλέγοντας τον αριθμό των μετοχών που θα πάρει από κάθε αξιόγραφο στην τιμή $S_0^{(i)}$. Ο πλούτος τους στον χρόνο 1 θα είναι τυχαίος και δίνεται από τον τύπο:

$$X_1 = \sum_{i=1}^{N} \Delta^{(i)} \left(S_1^{(i)} - (1+r) S_0^{(i)} \right) + (1+r) x_0 \tag{4.1}$$

με την επιλογή του επενδυτή να είναι τα $\Delta^{(i)}$, δηλαδή ο αριθμός από κάθε μετοχή που θα αγοράσει ή θα πουλήσει ο επενδυτής στον χρόνο 0.

Σε αυτό το σημείο είναι που θα πρέπει να εισάγουμε δύο παραμέτρους στην επιλογή χαρτοφυλακίου που δεν τις είχαμε αναφέρει στις προηγούμενες σελίδες. Αυτές οι παράμετροι είναι οι προτιμήσεις του επενδυτή ως προς τον κίνδυνο που είναι διατεθειμένος να αναλάβει (το επίπεδο της αποστροφής στο κίνδυνο - risk aversion level) και τις πεποιθήσεις/εκτιμήσεις του ως προς τις πιθανότητες των M καταστάσεων στον μέλλον (δηλαδή το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ που θα υιοθετήσει).

Ένα κλασσικό παράδειγμα προτιμήσεων

Το πλέον κλασσικό παράδειγμα προτιμήσεων δίνεται από τις επιλογές του χαρτοφυλακίου του Markowitz που ο επενδυτής καθορίζει το επίπεδο κινδύνου που είναι διατεθειμένος να αναλάβει, όπως αυτό μετριέται με την διακύμανση και ο σκοπός του είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση (ή ισοδύναμα τον αναμενόμενο πλούτο) που θα πάρει στον μελλοντικό χρόνο 1. Το πρόβλημα αυτό επιλογής χαρτοφυλακίου μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{array}{l} \max\limits_{\Delta^{(i)}\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_1] \\ \text{δεδομένο ότι } \mathbb{V}\text{ar}_{\mathbb{P}}[X_1] = c \end{array}$$

όπου c είναι το επίπεδο κινδύνου που θέλει να αναλάβει ο επενδυτής. Θα πρέπει να αναφερθεί εδώ ότι τόσο η αναμενόμενη τιμή όσο και η διακύμανση υπολογίζεται κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}$ που επιλέγει ο επενδυτής. Πιο συγκεκριμένα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_1] &= \sum_{i=1}^{N} \Delta^{(i)} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_1^{(i)}] - (1+r)S_0^{(i)} \right) + (1+r)x_0 \\ \mathbb{V}\text{ar}_{\mathbb{P}}[X_1] &= \sum_{i=1}^{N} \left(\Delta^{(i)}\right)^2 \mathbb{V}\text{ar}_{\mathbb{P}}[S_1^{(i)}] + \sum\sum_{i\neq j} \Delta^{(i)}\Delta^{(j)}\, \mathbb{C}\text{ov}_{\mathbb{P}}(S_1^{(i)}, S_1^{(j)}) \end{aligned}$$

Η μαθηματική μέθοδος με την οποία λύνεται το παραπάνω πρόβλημα είναι μέσω της χρήσης της μεθόδου Lagrange. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, ..., \Delta^{(N)}, \lambda) =$

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta^{(i)} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_1^{(i)}] - (1+r)S_0^{(i)} \right) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\Delta^{(i)}\right)^2 \mathbb{V}\text{ar}_{\mathbb{P}}[S_1^{(i)}] + \sum\sum_{i\neq j} \Delta^{(i)}\Delta^{(j)}\, \mathbb{C}\text{ov}_{\mathbb{P}}(S_1^{(i)}, S_1^{(j)}) - c \right) \tag{4.2}$$

Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο προκύπτει από την λύση των εξισώσεων:

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta^{(i)}} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0, \quad \forall i = 1, 2, .., N. \tag{4.3}$$

Ενώ θα πρέπει και η χεσιαννή μήτρα να είναι αρνητικά ημιορισμένη στο σημείο της λύσης.

Παράδειγμα 4. *Έστω ότι*

$$\begin{array}{ll} (1+r)S_0^{(1)} = 10 & (1+r)S_0^{(2)} = 20 \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_1^{(1)}] = 11 & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_1^{(2)}] = 23 \\ \mathbb{V}\text{ar}_{\mathbb{P}}[S_1^{(1)}] = 4 & \mathbb{V}\text{ar}_{\mathbb{P}}[S_1^{(2)}] = 9 \\ \mathbb{C}\text{ov}_{\mathbb{P}}(S_1^{(1)}, S_1^{(2)}) = -3 & \end{array}$$

Επομένως, $f(\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \lambda) = \Delta^{(1)} + 3\Delta^{(2)} - \lambda \left(4\left(\Delta^{(1)}\right)^2 + 9\left(\Delta^{(2)}\right)^2 - 6\Delta^{(1)}\Delta^{(2)} - c \right)$. *Οι εξισώσεις* (4.3) *δίνουν το σύστημα*

$$\Delta^{(1)} = \frac{1}{8\lambda} + \frac{3}{4}\Delta^{(2)}, \quad \Delta^{(2)} = \frac{1}{6\lambda} + \frac{2}{6}\Delta^{(1)}$$

$$4\left(\Delta^{(1)}\right)^2 + 9\left(\Delta^{(2)}\right)^2 - 6\Delta^{(1)}\Delta^{(2)} = c$$

Που δίνει τις λύσεις

$$\lambda = \pm\frac{0.39}{\sqrt{c}}, \quad \Delta^{(1)} = \frac{0.211}{\lambda}, \quad \Delta^{(2)} = \frac{0.115}{\lambda}$$

Το μέγιστο δίνεται στο σημείο όπου $\lambda = \frac{0.39}{\sqrt{c}}$ *(η εξέταση της δεύτερης παραγώγου* ***αφήνεται σαν άσκηση*** *για τον αναγνώστη). Έτσι, για επίπεδο κινδύνου* $c = 1$*, έχουμε* $\Delta^{(1)} = \frac{0.211}{0.39} = 0.54$ *και* $\Delta^{(2)} = \frac{0.115}{0.39} = 0.29$*, κάτι που σημαίνει ότι ο επενδυτής θα αγοράσει 54% από την πρώτη μετοχή και 29% από την δεύτερη, δανειζόμενος 11.2 ν.μ. με αναμενόμενο βέλτιστο πλούτο* $\mathbb{E}[X_1] = 1.42$ *ν.μ.*

Για το χαρτοφυλάκιο Markowitz θα κάνουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις:

i. Ο επενδυτής δεν χρειάζεται να εκτιμήσει όλο το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$, αλλά μόνο τις αναμενόμενες τιμές, τις διακυμάνσεις και τις συνδιακυμάνσεις των μετοχών. Αυτό συμβαίνει γιατί ο στόχος του αναφέρεται μόνο στην αναμενόμενη αξία του πλούτου, ενώ η αποστροφή του στον κίνδυνο δίνεται μόνο μέσω από την διακύμανση του πλούτου και όχι χρησιμοποιώντας μεγαλύτερες ροπές (π.χ. η τρίτη ροπή είναι ένα μέτρο ασυμμετρίας).

ii. Το τίμημα που πληρώνεται για να χρησιμοποιηθεί η διακύμανση σαν μέτρο κινδύνου είναι ότι υπάρχει περίπτωση επενδύσεις με μεγάλη διακύμανση να έχουν θετική συμμετρία (δηλαδή να έχουν μεγάλη πιθανότητα κερδών), αλλά λόγω της υψηλής διακύμανσης να μην προτιμηθούν από τους επενδυτές με χαμηλή επιλογή της σταθεράς c.

Μεγιστοποίηση συναρτήσεων χρησιμότητας

Η μεγιστοποίηση του αναμενόμενου πλούτου με δεδομένο τον κίνδυνο που μετράται μόνο μέσω από την διακύμανση είναι το πλέον απλό επενδυτικό κριτήριο, που όπως είδαμε έχει σημαντικά μειονεκτήματα. Αναζητώντας ένα καλύτερο κριτήριο που θα δώσει και το στόχο μεγιστοποίησης σε ένα χαρτοφυλάκιο, αναζητούμε στην ουσία μία σχέση σύγκρισης ανάμεσα σε κάθε δυνατό πλούτο που θα μπορούσε να δημιουργήσει ένας επενδυτής αγοράζοντας ή πουλώντας τις διαθέσιμες μετοχές. Θέλουμε δηλαδή να βρούμε μία σχέση $\succ$ που να συγκρίνει δύο πλούτους X_1 και $\tilde{X}_1$:

$$X_1 \succ \tilde{X}_1 \text{ αν ο πλούτος } X_1 \text{ είναι προτιμότερος από τον πλούτο } \tilde{X}_1.$$

και ακόμα

$$X_1 \succeq \tilde{X}_1 \text{ αν ο πλούτος } X_1 \text{ είναι προτιμότερος από ή ίδιας προτίμησης με τον πλούτο } \tilde{X}_1.$$

Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι X_1 και $\tilde{X}_1$ είναι τυχαίες μεταβλητές και η σύγκρισή τους μέσω από μία σχέση προτίμησης $\succeq$ δεν θα πρέπει να συγχέεται με την σχέση $\geq$ που συγκρίνει πραγματικούς αριθμούς.

Οι ελάχιστες απαιτήσεις "λογικής" που θα πρέπει να τεθούν είναι ότι

$$X \succeq Y \quad \text{και} \quad Y \succeq Z \quad \text{τότε} \quad X \succeq Z.$$

Μπορεί να αποδειχθεί (δεν θα μας απασχολήσει η απόδειξη) ότι με δεδομένο ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$, για κάθε "λογική" σχέση προτίμησης υπάρχει μια συνάρτηση $U : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, τέτοια ώστε

$$X_1 \succeq Y_1 \Leftrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X_1)] \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(Y_1)] \tag{4.4}$$

Η παραπάνω ισοδυναμία μας δίνει την δυνατότητα να αντιστοιχήσουμε κάθε σχέση προτίμησης ενός επενδυτή με μια απλή συνάρτηση που θα ονομάζεται από δω και στο εξής **συνάρτηση χρησιμότητας** (utility function). Επειδή οι σχέσεις προτίμησης είναι δύσκολο να οριστούν είναι σαφώς πιο εύχρηστο να μοντελοποιήσουμε τις προτιμήσεις των επενδυτών μέσω της επιλογής μιας συνάρτησης χρησιμότητας. *Ποιες όμως είναι οι ελάχιστες ιδιότητες που θα πρέπει να ζητήσουμε από μία συνάρτηση χρησιμότητας;*

1. Αν $X_1(\omega) \geq Y_1(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$, τότε θα πρέπει $U(X_1) \geq U(Y_1)$, δηλαδή η συνάρτηση χρησιμότητας θα πρέπει να είναι ***γνησίως αύξουσα*** (περισσότερος πλούτος σημαίνει και περισσότερη χρησιμότητα).

2. Επίσης θα πρέπει να ζητήσουμε να ικανοποιείται η σχέση

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X_1)] \leq U(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_1]), \forall X_1 \tag{4.5}$$

   Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι αν μια επένδυση έχει πλούτο ίσο με την τιμή $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_1]$ θα είναι προτιμότερη από την επένδυση που έχει πλούτο ίσο με X_1 (και οι δύο επενδύσεις έχουν αναμενόμενο πλούτο $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_1]$, αλλά η πρώτη είναι σίγουρη, ενώ η δεύτερη τυχαία ή με άλλα λόγια ριψοκίνδυνη). Η σχέση (4.5) συνεπάγεται ότι ο επενδυτής έχει αποστροφή στον κίνδυνο (risk aversion) και θα ικανοποιείται πάντα αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι ***κοίλη*** (concave).

Πιο γενικά, για κάθε συνάρτηση χρησιμότητας υποθέτουμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση και για τις τιμές που δεν απειρίζεται είναι γνησίως αύξουσα, κοίλη και τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη.

Παράδειγμα 5. *Παραδείγματα γνωστών συναρτήσεων χρησιμότητας είναι η* ***εκθετική*** *συνάρτηση χρησιμότητας*

$$U(x) = -e^{-\gamma x}, \quad \gamma > 0. \tag{4.6}$$

Η ***λογαριθμική*** *συνάρτηση χρησιμότητας*

$$U(x) = \begin{cases} \log(x), & x > 0 \\ -\infty, & x \leq 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Η ***δυναμική*** *συνάρτηση χρησιμότητας*

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x^{\gamma}-1}{\gamma}, & x > 0 \\ -\infty, & x \leq 0 \end{cases} \quad \textit{όπου} \quad 0 < \gamma < 1. \tag{4.8}$$

Έχοντας υποθέσει ότι οι προτιμήσεις του κάθε επενδυτή δίνονται μέσα από μια συνάρτηση χρησιμότητας U, ο επενδυτικός στόχος του είναι να φτιάξει αυτό το χαρτοφυλάκιο που να έχει τον μελλοντικό πλούτο X_1, που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης χρησιμότητάς του. Με άλλα λόγια, αν X_1 δίνεται από την σχέση (4.1), τότε το πρόβλημα του επενδυτή είναι το ακόλουθο πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max_{\Delta^{(i)} \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X_1)] \tag{4.9}$$

Το γεγονός ότι η μεγιστοποίηση γίνεται ως προς τα $\Delta^{(i)}$ που ανήκουν σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών συνεπάγεται ότι υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στο short selling αλλά ούτε και στον δανεισμό.

Παράδειγμα 6. *Έστω ότι έχουμε το διωνυμικό υπόδειγμα, δηλαδή $M = 2$ και $N = 1$, ενώ η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι η λογαριθμική που δίνεται από την σχέση* (4.8). *Τότε το πρόβλημα* (4.9) *γίνεται*

$$\begin{aligned} & \max_{\Delta\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X_1)] = \max_{\Delta\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\log(X_1)] \\ = \ & \max_{\Delta\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\log(\Delta(S_1 - (1+r)S_0) + (1+r)x_0)] \\ = \ & \max_{\Delta\in\mathbb{R}} \{p\log\left(\Delta S_0(u-(1+r)) + (1+r)x_0\right) + (1-p)\log\left(\Delta S_0(d-(1+r)) + (1+r)x_0\right)\} \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς Δ και θέτοντας την παράγωγο ίση με το μηδέν, βγάζουμε την σχέση

$$\frac{\Delta^* S_0}{x_0} = (1+r)\frac{pu + (1+r) - (1-p)d}{(u-(1+r))((1+r)-d)} \tag{4.10}$$

Προσέξτε ότι το αριστερό μέρος της παραπάνω ισότητας είναι το ποσοστό των χρημάτων του επενδυτή που βάζει στην αγορά της μετοχής. Με άλλα λόγια, η παραπάνω σχέση μας λέει ότι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή έχει την ιδιότητα ότι το ποσοστό των χρημάτων του που θα βάλει στην μετοχή είναι ανεξάρτητο από τον αρχικό του πλούτο αλλά και από την τιμή της μετοχής. Είναι σαφές λοιπόν ότι εάν οι προτιμήσεις ενός επενδυτή δεν έχουν αυτή την ιδιότητα, τότε δεν θα πρέπει να προτιμήσει την λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας.

Άσκηση 19. *Στο παραπάνω παράδειγμα αποδείξτε ότι σε περίπτωση που στην αγορά της μετοχής υπάρχει δυνατότητα arbitrage, τότε*

$$\max_{\Delta\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X_1)] = +\infty.$$

(Θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε την ισοδυναμία: (NA) $\Leftrightarrow d < 1 + r < u$).

Το πρόβλημα (4.9) είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης χωρίς περιορισμούς και για να λυθεί αρκεί να θέσουμε όλες τις μερικές παραγώγους ως προς κάθε μεταβλητή $\Delta^{(i)}$ ίσες με το μηδέν[1]. Επειδή ο χώρος πιθανότητας που έχουμε είναι πεπερασμένος μπορούμε να βάλουμε την παράγωγο μέσα στην αναμενόμενη τιμή. Επομένως, έχουμε για κάθε $i = 1, 2, ..., N$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Delta^{(i)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X_1)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\partial}{\partial \Delta^{(i)}} U(X_1)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U'(X_1)\left(S_1^{(i)} - (1+r)S_0^{(i)}\right)\right] \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση $\frac{\partial}{\partial \Delta^{(i)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(\hat{X}_1)] = 0$ γίνεται

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U'(\hat{X}_1)\left(S_1^{(i)} - (1+r)S_0^{(i)}\right)\right] = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., N\} \tag{4.11}$$

Επειδή η ποσότητα $(1+r)S_0^{(i)}$ είναι σταθερή και όχι τυχαία, έχουμε ότι η σχέση (4.11) γίνεται

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U'(\hat{X}_1)S_1^{(i)}\right] = (1+r)S_0^{(i)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U'(\hat{X}_1)\right], \quad \forall i \in \{1, 2, ..., N\}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{(1+r)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{U'(\hat{X}_1)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U'(\hat{X}_1)]}S_1^{(i)}\right] = S_0^{(i)}, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., N\} \tag{4.12}$$

[1] Το γεγονός ότι έχουμε μέγιστο εκεί που μηδενίζονται οι παράγωγοι είναι άμεση συνέπεια της κοιλότητας της συνάρτησης.

όπου $\hat{X}_1$ είναι ο πλούτος που δίνει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο, δηλαδή

$$\hat{X}_1 = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Delta}^{(i)} \left(S_1^{(i)} - (1+r) S_0^{(i)} \right) + (1+r) x_0$$

όπου $\hat{\Delta}^{(i)}$ είναι οι λύσεις των N εξισώσεων που δίνονται μέσω της (4.12).

Παράδειγμα 7. *Θεωρούμε το τριωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου με μία μετοχή και τα εξής δεδομένα:*

$$S_0 = 100,\ S_1(G) = 104,\ S_1(M) = 102,\ S_1(B) = 99,\ 1 + r = 1.01,$$
$$\mathbb{P}[\{G\}] = 0.3,\ \mathbb{P}[\{M\}] = 0.5,\ \mathbb{P}[\{B\}] = 0.2,\ x_0 = 100 \text{ και } U(x) = \log(x).$$

Η εξίσωση (4.11) *γίνεται*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{S_1 - 101}{\hat{X}_1} \right] = 0.$$

Επίσης $\hat{X}_1 = \hat{\Delta}(S_1 - (1+r)S_0) + (1+r)x_0 = \hat{\Delta}(S_1 - 101) + 101$. *Επομένως, θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση*

$$\mathbb{P}[\{G\}] \frac{S_1(G) - 101}{\hat{\Delta}(S_1(G) - 101) + 101} + \mathbb{P}[\{M\}] \frac{S_1(M) - 101}{\hat{\Delta}(S_1(M) - 101) + 101} + \mathbb{P}[\{B\}] \frac{S_1(B) - 101}{\hat{\Delta}(S_1(B) - 101) + 101} = 0$$

δηλαδή

$$0.3 \frac{3}{3\hat{\Delta} + 101} + 0.5 \frac{1}{\hat{\Delta} + 101} - 0.2 \frac{2}{-2\hat{\Delta} + 101} = 0 \tag{4.13}$$

Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα, η παραπάνω εξίσωση καταλήγει σε μια πολυωνυμική εξίσωση δευτέρου βαθμού. Αυτή θα έχει δύο λύσεις (δύο τοπικά ακρότατα). Για να βρεθεί το ολικό μέγιστο βλέπουμε σε ποιο από αυτά τα δύο σημεία η αντικειμενική μας συνάρτηση (δηλαδή $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\log(X_1)]$*) παίρνει μεγαλύτερη τιμή. Η λύση που θα πάρουμε είναι* $\hat{\Delta} \simeq 27.7$. *Επομένως, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο για τον επενδυτή είναι να δανειστεί 2670 ν.μ. και μαζί με τις 100 που είχε αρχικά να αγοράσει 27.7 μετοχές (μια ιδιαίτερα επιθετική στρατηγική με συντελεστή μόχλευσης 1 προς 27.7). Μπορούμε τέλος να υπολογίσουμε ότι ο τελικός βέλτιστος πλούτος του επενδυτή παίρνει τις τιμές*

$$\begin{aligned} \hat{X}_1(G) &= \hat{\Delta}(S_1(G) - 101) + 101 \simeq 184.1 \\ \hat{X}_1(M) &= \hat{\Delta}(S_1(M) - 101) + 101 \simeq 128.7 \\ \hat{X}_1(B) &= \hat{\Delta}(S_1(B) - 101) + 101 \simeq 45.5 \end{aligned}$$

Άσκηση 20. *Για κάθε μοντέλο* M *καταστάσεων και* N *μετοχών αποδείξτε ότι για την εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας που δίνεται στην* (4.6) *το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο* $\hat{\Delta}$ *είναι ανεξάρτητο από τον αρχικό πλούτο, δηλαδή για κάθε τιμή του* x_0, *το* $\hat{\Delta}$ *παίρνει την ίδια τιμή.*

Οι εξισώσεις (4.12) θα πρέπει να θυμίζουν τις εξισώσεις που είχαμε όταν θέλαμε να βρούμε ή να ορίσουμε τα μέτρα πιθανότητας που είναι ουδέτερα στον κίνδυνο, δηλαδή τα μέτρα πιθανότητας που ανήκουν στον χώρο $\mathcal{M}$. Συγκρίνουμε δηλαδή την (4.12) με την σχέση (3.14). Για να μπορέσουμε να δούμε αν σημαίνει κάτι αυτή η ομοιότητα των σχέσεων θα πρέπει να δούμε πως μπορούμε να υπολογίζουμε αναμενόμενες τιμές κάτω από διαφορετικά μέτρα.

Αλλαγή μέτρου πιθανότητας

Το υποκεφάλαιο αυτό μπαίνει εμβόλιμα μέσα στην ροή του παρόντος κεφαλαίου με μοναδικό σκοπό να βοηθήσει στην συσχέτιση των σχέσεων (4.12) *και* (3.14).

Έστω δύο ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}$ και $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}(\omega) > 0$ και $\mathbb{Q}(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ (όπου Ω είναι ένας πεπερασμένος χώρος πιθανότητας). Ο σκοπός μας είναι να δούμε πως μπορούμε να πάμε από την αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y]$ στον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y]$, όπου Y είναι μια δοσμένη τυχαία μεταβλητή. Για τον σκοπό αυτό, ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή Z που δίνεται από τον τύπο

$$Z(\omega) = \frac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}. \tag{4.14}$$

Από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής έχουμε

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y] = \sum_{k \in \mathcal{Y}} k \mathbb{P}_Y[Y = k] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\omega).$$

όπου $\mathcal{Y}$ είναι το σύνολο τιμών της τυχαίας μεταβλητής Y. Επίσης,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] = \sum_{k \in \mathcal{Y}} k \mathbb{Q}_Y[Y = k] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{Q}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[ZY].$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι για κάθε τ.μ. Y ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[ZY] \tag{4.15}$$

όπου η τ.μ. Z δίνεται από την σχέση (4.14).

Άσκηση 21. *Αποδείξτε ότι για την τ.μ. Z που δίνεται από την σχέση* (4.14) *ισχύουν ότι*

1. $Z(\omega) > 0$, $\forall \omega \in \Omega$.
2. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z] = 1$.

Το ερώτημα που τίθεται στην συνέχεια είναι αν για κάθε τ.μ. Z που ικανοποιεί τις ιδιότητες 1. και 2. στην παραπάνω άσκηση μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ που να δίνεται από την σχέση

$$\mathbb{Q}(\omega) = Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) \tag{4.16}$$

Η απάντηση είναι καταφατική και δίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 6. *Για κάθε τ.μ. Z και μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ για τα οποία ισχύει ότι $\mathbb{P}(\omega), Z(\omega) > 0$, για κάθε $\omega \in \Omega$ και $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z] = 1$, η απεικόνιση $\mathbb{Q}$ που ορίζεται από την σχέση* (4.16) *είναι ένα μέτρο πιθανότητας και για κάθε τ.μ. Y ισχύει ότι $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[ZY]$.*

Απόδειξη

Για να δείξουμε ότι $\mathbb{Q}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{Q}(\omega) \geq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ (κάτι που ισχύει γιατί και η Z αλλά και το μέτρο $\mathbb{P}$ είναι θετικά) και ότι $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$. Η τελευταία σχέση όμως προκύπτει άμεσα γιατί

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{Q}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} Z\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z] = 1.$$

Τέλος η σχέση $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[ZY]$ προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής. ■

Μια εφαρμογή της παραπάνω πρότασης είναι όταν για Z χρησιμοποιήσουμε την τ.μ. που δίνεται ως

$$\hat{Z} = \frac{U'(\hat{X}_1)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U'(\hat{X}_1)]}.$$

Λόγω του ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι η $\hat{Z}$ ικανοποιεί τόσο την ιδιότητα 1. Προσέξτε επίσης ότι η ιδιότητα 2. ικανοποιείται γιατί η ποσότητα $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U'(\hat{X}_1)]$ είναι σταθερή και μπορεί να βγει έξω από την αναμενόμενη τιμή. Επομένως, υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας $\hat{\mathbb{Q}}$ (που δίνεται από την σχέση $\hat{\mathbb{Q}} = \hat{Z}\mathbb{P}$) για το οποίο ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{U'(\hat{X}_1)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U'(\hat{X}_1)]}Y\right] = \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}[Y],$$

για κάθε τ.μ. Y. Αν τώρα εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση για τις τ.μ. $S_1^{(i)}$, όπου $i = 1, 2, ..., N$ και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (4.12) έχουμε ότι

$$\frac{1}{(1+r)}\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}[S_1^{(i)}] = S_0^{(i)}, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., N\}.$$

Όμως αυτό σημαίνει ότι το μέτρο $\hat{\mathbb{Q}}$ είναι ένα μέτρο ουδέτερο στον κίνδυνο, με άλλα λόγια δείξαμε ότι $\hat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{M}$. Η χρησιμότητα αυτής της παρατήρησης θα φανεί στην συνέχεια.

Παράδειγμα 8. *Στο Παράδειγμα 7 μπορούμε να υπολογίσουμε ότι το μέτρο* $\hat{\mathbb{Q}}$ *δίνεται από την σχέση*

$$\hat{\mathbb{Q}}(\omega) = \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\hat{X}_1(\omega)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1/\hat{X}_1]}$$

όπου $\omega \in \{G, M, B\}$. *Από την στιγμή που έχουμε υπολογίσει τις τιμές που παίρνει η τ.μ.* $\hat{X}_1$, *υπολογίζουμε πρώτα την αναμενόμενη τιμή* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1/\hat{X}_1]$ *και κατόπιν με απλές πράξεις υπολογίζουμε ότι* $\hat{\mathbb{Q}}(G) \simeq 0.17$, $\hat{\mathbb{Q}}(M) \simeq 0.39$ *και* $\hat{\mathbb{Q}}(B) \simeq 0.44$.

Βέλτιστα χαρτοφυλάκια σε πλήρεις αγορές

Σε περίπτωση που η αγορά είναι πλήρης τότε σύμφωνα με το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα τιμολόγησης αξιόγραφων, το σύνολο $\mathcal{M}$ αποτελείται από ένα μόνο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}^*$. Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (4.12), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε συνάρτηση χρησιμότητας και αρχικό πλούτο x_0, το μέτρο πιθανότητας $\hat{\mathbb{Q}}$ που ορίζεται από την σχέση

$$\hat{\mathbb{Q}} = \frac{U'(\hat{X}_1)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U'(\hat{X}_1)]}\mathbb{P}$$

θα είναι ίσο με το μέτρο $\mathbb{Q}^*$ ακριβώς γιατί η (4.12) σημαίνει ότι $\hat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{M}$. Επομένως θα έχουμε την εξίσωση:

$$U'(\hat{X}_1) = k\frac{\mathbb{Q}^*}{\mathbb{P}} \tag{4.17}$$

όπου $\mathbb{Q}^*$ είναι το μοναδικό μέτρο πιθανότητας που είναι ουδέτερο στον κίνδυνο και k είναι μια σταθερά που ισούται με $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U'(\hat{X}_1)]$ και που την τιμή της θα την βρούμε σε λίγο. Επομένως, σε περίπτωση που η αγορά είναι πλήρης, για να βρούμε τον βέλτιστο πλούτο ενός επενδυτή αρκεί να λύσουμε την εξίσωση (4.17). Για παράδειγμα, αν η συνάρτηση χρησιμότητας είναι $U(x) = \log(x)$ τότε η (4.17) γίνεται

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{k}\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}^*} \tag{4.18}$$

Επειδή το μέτρο $\mathbb{Q}^*$ υπολογίζεται από τα δεδομένα της αγοράς λύνοντας τις εξισώσεις της σχέσης (3.14) για να βρούμε τον βέλτιστο πλούτο $\hat{X}_1$ αρκεί να βρούμε την σταθερά k. Όμως αυτό προκύπτει εύκολα αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\hat{X}_1 = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Delta}^{(i)}(S_1^{(i)} - (1+r)S_0^{(i)}) + (1+r)x_0$, για κάποιες επιλογές μετοχών $\hat{\Delta}^{(i)}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}[\hat{X}_1] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}\left[\sum_{i=1}^{N} \hat{\Delta}^{(i)}(S_1^{(i)} - (1+r)S_0^{(i)}) + (1+r)x_0\right] \\
&= (1+r)x_0
\end{aligned}$$

αλλά σύμφωνα με την (4.18), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}[\hat{X}_1] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}\left[\frac{1}{k}\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}^*}\right] \\
&= \frac{1}{k}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}\left[\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}^*}\right] \\
&= \frac{1}{k}\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{Q}^*(\omega)\frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{Q}^*(\omega)} = \frac{1}{k}\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Άρα,

$$k = \frac{1}{(1+r)x_0}$$

Επομένως, $\hat{X}_1 = (1+r)x_0\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}^*}$ που είναι μια ποσότητα που βρίσκεται από τα δεδομένα της αγοράς (δηλαδή των μετοχών).

Για να ολοκληρωθεί η διαδικασία ανεύρεσης του βέλτιστου χαρτοφυλακίου σε περίπτωση που έχουμε πλήρης αγορά θα πρέπει να βρούμε και ποιο είναι το ακριβές χαρτοφυλάκιο που μας δίνει τον βέλτιστο πλούτο $\hat{X}_1$, αναζητούμε δηλαδή τα $\hat{\Delta}^{(i)}$ τέτοια ώστε

$$\hat{X}_1 = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Delta}^{(i)}(S_1^{(i)} - (1+r)S_0^{(i)}) + (1+r)x_0 \tag{4.19}$$

Η αναζήτηση αυτή μας φέρνει πίσω στο πρόβλημα ανεύρεσης του perfect replication χαρτοφυλακίου για ένα νέο αξιόγραφο. Αρκεί να θέσουμε σαν απόδοση V_1 την απόδοση $\hat{X}_1$, όπου η αρχική τιμή είναι ίση με $\hat{X}_0 = x_0$. Όμως επειδή ακριβώς η αγορά είναι πλήρης η εξίσωση (4.19) έχει πάντα λύση. Για παράδειγμα, αν η αγορά είναι το απλό διωνυμικό υπόδειγμα με μία μόνο μετοχή, η λύση θα δινόταν από τον τύπο (2.9) δηλαδή

$$\hat{\Delta} = \frac{\hat{X}_1(G) - \hat{X}_1(B)}{S_0(u-d)}.$$

Παράδειγμα 9. *Θα μπορούσαμε να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 6 δηλαδή τον τύπο* (4.10) *που αναφέρεται σε λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας χρησιμοποιώντας την* *παραπάνω ανάλυση. Από το Κεφάλαιο 2 έχουμε ότι στο διωνυμικό υπόδειγμα* $\mathbb{Q}^* = (q, 1-q) = \left(\frac{(1+r)-d}{u-d}, \frac{u-(1+r)}{u-d}\right)$. *Οπότε,*

$$\hat{X}_1(G) = (1+r)x_0 \frac{\mathbb{P}(G)}{\mathbb{Q}^*(G)} = (1+r)x_0 \frac{p(u-d)}{(1+r)-d}$$

και

$$\hat{X}_1(B) = (1+r)x_0 \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{Q}^*(B)} = (1+r)x_0 \frac{(1-p)(u-d)}{u-(1+r)}.$$

Επομένως, ο βέλτιστος αριθμός αγοράς μετοχών θα είναι

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta} &= \frac{\hat{X}_1(G) - \hat{X}_1(B)}{S_0(u-d)} \\
&= \frac{(1+r)x_0}{S_0(u-d)} \left(\frac{p(u-d)}{(1+r)-d} + \frac{(1-p)(u-d)}{u-(1+r)} \right) \\
&= \frac{(1+r)x_0}{S_0} \left(\frac{p}{(1+r)-d} + \frac{(1-p)}{u-(1+r)} \right) \\
&= \frac{(1+r)x_0}{S_0} \frac{pu + (1+r) - (1-p)d}{(u-(1+r))((1+r)-d)}
\end{aligned}$$

που συμπίπτει με την (4.10).

Βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου και hedging

Τα χαρτοφυλάκια που είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο έως τώρα είναι μόνο κερδοσκοπικού χαρακτήρα, δηλαδή οι επενδυτές δεν έχουν αναλάβει κάποιο κίνδυνο πριν αρχίσουν τον σχεδιασμό των χαρτοφυλακίων αυτών. Αντίθετα, με την αγορά ή την ανοικτή πώληση μετοχών όπως αυτή καθορίζεται από την βέλτιστη επιλογή $\hat{\Delta}^{(i)}$, ο επενδυτής αναλαμβάνει μια ριψοκίνδυνη θέση (από έναν σταθερό πλούτο x_0 πήγε σε έναν τυχαίο πλούτο $\hat{X}_1$). Ωστόσο, η μεθοδολογία που αναπτύξαμε παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για σκοπούς αντιστάθμισης κινδύνου (hedging). Η ουσία της διαδικασίας δεν αλλάζει, αλλά τροποποιείται ελαφρώς.

Θεωρούμε έναν επενδυτή με μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$, αρχικό πλούτο x_0 και συνάρτηση χρησιμότητας U που πουλάει στην τιμή V_0 ένα αξιόγραφο με απόδοση στον χρόνο 1 ίση με την τυχαία μεταβλητή V_1. Το πρόβλημα επιλογής βέλτιστου χαρτοφυλακίου (4.9) γίνεται

$$\max_{\Delta^{(i)} \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X_1 - V_1)] \tag{4.20}$$

όπου

$$X_1 = \sum_{i=1}^{N} \Delta^{(i)} \left(S_1^{(i)} - (1+r)S_0^{(i)} \right) + (1+r)(x_0 + V_0)$$

δηλαδή η τελική θέση θα πρέπει να συμπεριλάβει την υποχρέωση καταβολής της απόδοσής V_1 ενώ η αρχική θέση ενισχύεται κατά V_0. Η μαθηματική διαδικασία επίλυσης του προβλήματος (4.20) είναι η ίδια με αυτή που ακολουθήσαμε για να λύσουμε το πρόβλημα (4.9). Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $i = 1, 2, ..., N$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \Delta^{(i)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X_1 - V_1)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{\partial}{\partial \Delta^{(i)}} U(X_1 - V_1) \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[U'(X_1 - V_1) \left(S_1^{(i)} - (1+r)S_0^{(i)} \right) \right]
\end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση $\frac{\partial}{\partial \Delta^{(i)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X_1 - V_1)] = 0$ γίνεται

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[U'(\hat{X}_1 - V_1) \left(S_1^{(i)} - (1+r) S_0^{(i)} \right) \right] = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., N\} \tag{4.21}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{(1+r)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{U'(\hat{X}_1 - V_1)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U'(\hat{X}_1 - V_1)]} S_1^{(i)} \right] = S_0^{(i)}, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., N\} \tag{4.22}$$

όπου $\hat{X}_1$ είναι ο πλούτος που δίνει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο, δηλαδή

$$\hat{X}_1 = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Delta}^{(i)} \left(S_1^{(i)} - (1+r) S_0^{(i)} \right) + (1+r)(x_0 + V_0)$$

όπου $\hat{\Delta}^{(i)}$ είναι οι λύσεις των N εξισώσεων που δίνονται μέσω της (4.22).

Ακολουθώντας την διαδικασία αλλαγής μέτρου που είδαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, έχουμε ότι το ουδέτερο στον κίνδυνο μέτρο πιθανότητας που χρησιμοποιεί ο επενδυτής θα αλλάξει όταν έχει αναλάβει την υποχρέωση V_1. Θα έχουμε

$$\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{P} \frac{U'(\hat{X}_1 - V_1)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U'(\hat{X}_1 - V_1)]}.$$

Άσκηση 22. *Θεωρείστε το Παράδειγμα 7. Πώς θα αλλάξει η εξίσωση* (4.13) *όταν ο επενδυτής έχει ήδη πουλήσει ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης 100 ν.μ. στην τιμή* $V_0 = 5$*; Πιστεύετε ότι η λύση* $\hat{\Delta}$ *θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη σε σχέση με την λύση (*$\hat{\Delta} = 27.7$*) που είχαμε όταν δεν υπήρχε το δικαίωμα αγοράς; (Η απάντηση θα πρέπει να είναι με οικονομικούς όρους και όχι μαθηματικούς)*

Άσκηση 23. *Πώς θα αλλάξει το πρόβλημα* (4.20) *εάν υποθέσουμε ότι το αξιόγραφο μπορεί να γίνει perfectly replicated; (Χρησιμοποιείστε το διωνυμικό υπόδειγμα για να δείξετε τι θα αλλάξει).*

Βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου και τιμολόγηση

Πέρα του ότι η λύση του προβλήματος (4.20) δίνει το τρόπο με τον οποίο ένας επενδυτής μπορεί να κάνει αντιστάθμιση κινδύνου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξάγουμε τον τρόπο με τον οποίο ένας επενδυτής με μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$, αρχικό πλούτο x_0 και συνάρτηση χρησιμότητας U τιμολογεί την θέση σε ένα αξιόγραφο (πχ μια θέση long σε ένα δικαίωμα αγοράς) με απόδοση V_1.

Έστω ότι η τιμή που δίνεται στην αγορά για το αξιόγραφο είναι V_0. Αν ο επενδυτής αγοράσει ϵ κομμάτια από αυτό το αξιόγραφο στην τιμή V_0, τότε ο συνολικός του πλούτος στον χρόνο 1 θα είναι

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta^{(i)} \left(S_1^{(i)} - (1+r) S_0^{(i)} \right) + \epsilon V_T + (1+r)(x_0 - \epsilon V_0)$$

Επομένως οι επιλογές του δεν είναι μόνο πόσα κομμάτια από κάθε μετοχή θα αγοράσει/πουλήσει, αλλά και πόσα αξιόγραφα θα αγοράσει/πουλήσει στην τιμή V_0. Άρα, το πρόβλημα μεγιστοποίησης που θα πρέπει ο επενδυτής να λύσει γίνεται:

$$\max_{\Delta^{(i)}, \epsilon \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[U \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta^{(i)} \left(S_1^{(i)} - (1+r) S_0^{(i)} \right) + \epsilon (V_T - (1+r) V_0) + (1+r) x_0 \right) \right] \tag{4.23}$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι η λύση ϵ^* εξαρτάται από την τιμή V_0. Αυτό που θέλουμε πρωτίστως να βρούμε είναι για ποια τιμή V_0^*, ο βέλτιστος αριθμός από το αξιόγραφο με απόδοση V_1 που θα αγοράσει ο επενδυτής είναι μηδέν. Στην τιμή V_0^* ο επενδυτής θα είναι αδιάφορος αν θα αγοράσει το αξιόγραφο ή όχι γιατί το καλύτερο που θα μπορούσε να κάνει είναι να μην συμμετάσχει στην αγορά του V_1. Για τον λόγο αυτό, η τιμή V_0^* για την οποία η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα (4.23) είναι $\epsilon^* = 0$ ονομάζεται τιμή αδιαφορίας (indifference price) του επενδυτή για το αξιόγραφο με απόδοση V_1. Πιο αναλυτικά, έστω ότι πρώτα μεγιστοποιούμε την αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας ως προς τα $\Delta^{(i)}$. Δηλαδή, ο επενδυτής μεγιστοποιεί την αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητάς τους αγνοώντας σε πρώτη φάση την δυνατότητα να αγοράσει/πουλήσει το αξιόγραφο με απόδοση V_1. Άρα πρώτα λύνει το πρόβλημα

$$\max_{\Delta^{(i)}\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta^{(i)}\left(S_1^{(i)}-(1+r)S_0^{(i)}\right)+(1+r)x_0\right)\right] \tag{4.24}$$

Έστω ότι $\left(\hat{\Delta}^{(i)}\right)_{i=1,2,\dots,N}$ είναι η λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης (4.24). Πλέον για να επιλέξει ο επενδυτής πόσο αξιόγραφα θα αγοράσει, θα πρέπει να βρει για ποια τιμή του ϵ η παρακάτω συνάρτηση μεγιστοποιείται

$$g(\epsilon)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(\sum_{i=1}^{N}\hat{\Delta}^{(i)}\left(S_1^{(i)}-(1+r)S_0^{(i)}\right)+\epsilon(V_T-(1+r)V_0)+(1+r)x_0\right)\right] \tag{4.25}$$

Η τιμή αδιαφορίας είναι αυτή για την οποία το μέγιστο της συνάρτησης $g(\epsilon)$ είναι το μηδέν δηλαδή

$$g'(0)=0.$$

Έχουμε

$$g'(\epsilon)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U'\left(\sum_{i=1}^{N}\hat{\Delta}^{(i)}\left(S_1^{(i)}-(1+r)S_0^{(i)}\right)+\epsilon(V_T-(1+r)V_0)+(1+r)x_0\right)(V_T-(1+r)V_0)\right]$$

επομένως, για να βρούμε την τιμή V_0^* θέτουμε $\epsilon=0$ και λύνουμε την εξίσωση

$$g'(0)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U'\left(\sum_{i=1}^{N}\hat{\Delta}^{(i)}\left(S_1^{(i)}-(1+r)S_0^{(i)}\right)+(1+r)x_0\right)(V_T-(1+r)V_0^*)\right]=0.$$

Ακολουθώντας την μέθοδο που αναφέραμε προηγουμένως με την αλλαγή του μέτρου, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί συνοπτικά ως εξής:

$$\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}\left[\frac{V_T}{(1+r)}\right]=V_0^* \quad \text{και} \quad \hat{\mathbb{Q}}=\frac{U'\left(\sum_{i=1}^{N}\hat{\Delta}^{(i)}\left(S_1^{(i)}-(1+r)S_0^{(i)}\right)+(1+r)x_0\right)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U'\left(\sum_{i=1}^{N}\hat{\Delta}^{(i)}\left(S_1^{(i)}-(1+r)S_0^{(i)}\right)+(1+r)x_0\right)\right]}.$$

Η τιμή V_0^* προκύπτει σαν αναμενόμενη τιμή της προεξοφλημένης απόδοσης του αξιόγραφου κάτω από το μέτρο $\hat{\mathbb{Q}}$. Ο αναγνώστης θα πρέπει να προσέξει ότι το μέτρο αυτό προκύπτει από την μεγιστοποίηση της συνάρτησης χρησιμότητας χωρίς το αξιόγραφο (δηλαδή το πρόβλημα (4.9)). Ακόμα, από την στιγμή που το μέτρο $\hat{\mathbb{Q}}$ ανήκει στο σύνολο $\mathcal{M}$, η τιμή V_0^* είναι μια τιμή που διατηρεί την υπόθεση (NA), δηλαδή η τιμή V_0^* ανήκει στο διάστημα $\left(\min_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_1}{1+r}\right], \max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_1}{1+r}\right]\right)$ (δες επίσης την Πρόταση 4).

Έτσι αν η τιμή στην αγορά είναι μικρότερη από την τιμή που δίνει ο επενδυτής με βάση τον τύπο $\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}\left[\frac{V_T}{(1+r)}\right]$, τότε θα αγοράσει το αξιόγραφο γιατί το τιμολογεί ακριβότερα από την αγορά. Σε αντίθετη περίπτωση θα το πουλήσει (θα πάρει θέση short). Το πόσα αξιόγραφα θα αγοράσει ή θα πουλήσει ο επενδυτής θα δοθούν από την λύση του προβλήματος (4.23).

Παράδειγμα 10. *Για το Παράδειγμα 7 (δες και το Παράδειγμα 8) είχαμε ήδη υπολογίσει τις τιμές που παίρνει το μέτρο $\hat{\mathbb{Q}}$ όταν ο επενδυτής έχει συνάρτηση χρησιμότητας $U(x) = \log(x)$. Η τιμή αδιαφορίας που θα δώσει ο επενδυτής αυτός σε ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $K = 101$ θα είναι*

$$\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}}\left[\frac{V_T}{(1+r)}\right] = \frac{1}{1.01}(0.44 \times 0 + 0.39 \times 1 + 0.17 \times 3) \simeq 0.88.$$

Αν η τιμή του δικαιώματος στην αγορά είναι 0.85, ο επενδυτής είναι διατεθειμένος να αγοράσει το δικαίωμα αυτό.

Άσκηση 24. *Αποδείξτε ότι αν η συνάρτηση του επενδυτή είναι εκθετική (δες την σχέση* (4.6)*), τότε η τιμή αδιαφορίας του επενδυτή είναι ανεξάρτητη από τον αρχικό πλούτο. Δηλαδή, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι η τιμή V_0^* παραμένει η ίδια. (Αρκεί να δείξετε ότι το μέτρο πιθανότητας του επενδυτή $\hat{\mathbb{Q}}$ σε αυτή την περίπτωση δεν εξαρτάται από την τιμή x_0).*

Βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου σε περισσότερες περιόδους

Έως τώρα έχουμε δει τις βασικές αρχές για το πως γίνεται η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης συνάρτησης χρησιμότητας όταν ο επενδυτής δεν κάνει καθόλου αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου του μέχρι τον τερματικό χρόνο T. Κάτι τέτοιο προφανώς και δεν ισχύει σε πραγματικές καταστάσεις (εκτός μόνο στις ακραίες περιπτώσεις των buy-and-hold επενδυτικών στρατηγικών). Για να γενικεύσουμε των θεωρία δίνοντας την δυνατότητα αναδιαμόρφωσης του χαρτοφυλακίου, εισάγουμε διακριτούς χρόνους μέχρι τον τερματικό χρόνο T, όπως και στην περίπτωση του διωνυμικού υποδείγματος περισσότερων από δύο περιόδων. Έχουμε λοιπόν $t = 0, 1, ..., T$ χρόνους και αντίστοιχα filtration $(\mathcal{F}_t^S)_{t=0,1,...,T}$, όπου S είναι το διάνυσμα των μετοχών $S_t = (S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, ..., S_t^{(N)})$, για κάθε t. Ακολουθώντας τους ίδιους υπολογισμούς όπως και για την εξίσωση (2.17), έχουμε ότι ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με επενδυτικές επιλογές μέχρι τον χρόνο t που δίνονται από μία σ.δ. $\left(\Delta_s^{(i)}\right)_{s=0,1,..,t-1}^{i=1,2,...,N}$ θα έχει αξία στον χρόνο t ίση με

$$X_t^{\Delta} = \sum_{s=1}^{t}\sum_{i=1}^{N} \Delta_{s-1}^{(i)}\left(S_s^{(i)} - S_{s-1}^{(i)}(1+r)\right) + x_0(1+r)^t. \tag{4.26}$$

Όπως και στους προηγούμενους συμβολισμούς $\Delta_s^{(i)}$ είναι ο αριθμός των μεριδίων της μετοχής $S^{(i)}$ που έχει στην κατοχή του ο επενδυτής την χρονική περίοδο $[s, s+1)$. Επίσης το επιτόκιο r είναι το επιτόκιο για έναν απλό τοκισμό από τον χρόνο s στον χρόνο $s+1$, για κάθε $s = 0, 1, ..., t-1$.[2] Ο στόχος του επενδυτή προφανώς και παραμένει η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης συνάρτησης χρησιμότητας στον τερματικό χρόνο T, όπως ακριβώς το πρόβλημα (4.9), με την μόνη διαφορά ότι ο επενδυτής έχει την δυνατότητα να αλλάξει το χαρτοφυλάκιό του, λαμβάνοντας υπόψη και την πληροφορία που έρχεται από την πορεία της αγοράς μέχρι τον χρονο T. Πιο συγκεκριμένα,

$$\max_{\Delta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[U(X_T^{\Delta})], \tag{4.27}$$

[2] Ο συμβολισμός X^{Δ} δηλώνει ότι το χαρτοφυλάκιο είναι αυτό που ακολουθεί την επενδυτική στρατηγική Δ. Δεν πρόκειται για δύναμη, αλλά απλά για συμβολισμό.

όπου Δ είναι συντομογραφία όλων των επιλογών που έχει ο επενδυτής $\left(\Delta_s^{(i)}\right)_{s=0,1,..,T-1}^{i=1,2,...,N}$.

Ο τρόπος υπολογισμού της λύσης του προβλήματος (4.27), γίνεται ανάποδα στον χρόνο, αρχίζοντας δηλαδή με την τελευταία επενδυτική επιλογή, την περίοδο $[T-1,T]$. Η διαδικασία θα πρέπει να θυμίζει και τον τρόπο προσέγγισης της τιμολόγησης στο διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων όπου πάλι εργαζόμασταν backward in time. Για το τελευταίο αυτό βήμα της επενδυτικής στρατηγικής έχουμε στην ουσία ένα πρόβλημα μιας μόνο περιόδου, με την μόνη διαφορά ότι τόσο η αξία του πλούτου στο ξεκίνημα της περιόδου, όσο και οι τιμές των μετοχών είναι στοχαστικές. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι η επιλογή της τελευταίας περιόδου $[T-1,T]$ δεδομένης όλης της πληροφορίας μέχρι τον χρόνο $T-1$ είναι η λύση του παρακάτω προβλήματος βελτιστοποίησης

$$\max_{\Delta_{T-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_{T-1}^{(i)}\left(S_T^{(i)}-S_{T-1}^{(i)}(1+r)\right)+x(1+r)\right)\middle|\mathcal{F}_{T-1}^{S}, X_{T-1}=x_{T-1}\right]. \quad (4.28)$$

Η λύση του προβλήματος (4.28) γίνεται όπως και αυτή του προβλήματος μιας περιόδου. Δηλαδή, θα πάρουμε μια λύση Δ_{T-1}^{*} που προφανώς θα είναι ένα τυχαίο διάνυσμα που θα εξαρτάται από την πληροφορία της αγοράς μέχρι τον χρόνο $T-1$ και από την αξία του χαρτοφυλακίου στον χρόνο $T-1$. Παρατηρώντας λίγο πιο προσεκτικά το πρόβλημα (4.28), βλέπουμε ότι γεννά μια συνάρτηση για κάθε επίπεδο πλούτο στον χρόνο $T-1$. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\tilde{U}_{T-1}(x) := \max_{\Delta_{T-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(X_T^{\Delta_{T-1}}\right)\middle|\mathcal{F}_{T-1}^{S}, X_{T-1}=x\right]. \quad (4.29)$$

Η συνάρτηση $\tilde{U}_{T-1}(x)$ είναι το επίπεδο της βέλτιστης αναμενόμενης χρησιμότητας στον χρονο $T-1$, όταν ο πλούτος στον χρόνο αυτό είναι ίσος με x.

Άσκηση 25. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\tilde{U}_{T-1}$ είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.*

Εάν όντως η $\tilde{U}_{T-1}$ είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη, έχουμε μια νέα συνάρτηση χρησιμότητας που θα τοποθετείται στον χρόνο $T-1$. Στην σχετική βιβλιογραφία η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας* (indirect utility function).

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα (4.27), συνειδητοποιούμε ότι το βασικό ζήτημα είναι πως θα γίνει το βήμα στην αμέσως προηγούμενη περίοδο $[T-2,T-1]$ και πιο συγκεκριμένα ποιος θα πρέπει να είναι ο στόχος μεγιστοποίησης που θα βάλουμε στον χρόνο $T-1$. Θα είναι πάλι η συνάρτηση χρησιμότητας U ή μια άλλη συνάρτηση; Με άλλα λόγια ψάχνουμε την σωστή συνάρτηση U_{T-1}, την αναμενόμενη τιμή της οποίας θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε:

$$\max_{\Delta_{T-2}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U_{T-1}\left(X_{T-1}^{\Delta_{T-2}}\right)\middle|\mathcal{F}_{T-2}^{S}, X_{T-2}=x_{T-2}\right]. \quad (4.30)$$

Το κριτήριο για το ποια συνάρτηση U_{T-1} θα επιλέξουμε έχει να κάνει με την ιδιότητα της *χρονικής συνέπειας της βέλτιστης επένδυσης* (time-consistency of the optimal investment). Η χρονική συνέπεια είναι ένα επιθυμητό χαρακτηριστικό των επενδυτικών επιλογών και λέει το εξής απλό:

“*Εάν μια στρατηγική είναι βέλτιστη για όλη την διάρκεια της περιόδου $[0,T]$, θα πρέπει να είναι βέλτιστη και σε κάθε ξεχωριστό διάστημα $[s-1,s]$, $s=1,2,...,T$.*”

Άμεση συνέπεια του παραπάνω είναι για παράδειγμα ότι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο για την περίοδο $[T-2,T]$, δηλαδή η λύση του προβλήματος

$$\max_{\Delta_{T-1},\Delta_{T-2}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(\sum_{s=0}^{1}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{T-2+s}^{(i)}\left(S_{T-1+s}^{(i)}-S_{T-2+s}^{(i)}(1+r)\right)+x_{T-2}(1+r)^2\right)\middle|\mathcal{F}_{T-2}^{S}, X_{T-2}=x_{T-2}\right]. \quad (4.31)$$

θα πρέπει να συμπίπτει με την λύση Δ^*_{T-1} του προβλήματος (4.28) και τη λύση Δ^*_{T-2} του προβλήματος (4.30), με την κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης U_{T-1}. Σημειώστε δε ότι το παραπάνω πρόβλημα δημιουργεί μια επιπλέον (έμμεση) συνάρτηση χρησιμότητας στον χρόνο $T-2$, δηλαδή ορίζουμε

$$\tilde{U}_{T-2}(x) := \max_{\Delta_{T-1},\Delta_{T-2}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(X_T^{\Delta}\right)\middle|\,\mathcal{F}^S_{T-2}, X_{T-2}=x\right]. \tag{4.32}$$

Η απάντηση για το ποια είναι η σωστή επιλογή για το κριτήριο μεγιστοποίησης που θα πρέπει να τοποθετηθεί στον χρόνο $T-1$ και να εξασφαλίζει την χρονική συνέπεια της επενδυτικής στρατηγικής δίνεται από τη περίφημη αρχή δυναμικού προγραμματισμού (dynamic programming principle, DPP).[3] Στην πολύ ειδική περίπτωση που εξετάζουμε εδώ, η αρχή αυτή έχει την εξής απλή συνέπεια: "*Η συνάρτηση βελτιστοποίησης που θα πρέπει να τοποθετηθεί στον χρόνο $T-1$ για να εξασφαλιστεί η χρονική συνέπεια του βέλτιστου χαρτοφυλακίου είναι η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας $\tilde{U}_{T-1}$.*" Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{T-2}(x) &= \max_{\Delta_{T-1},\Delta_{T-2}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(X_T^{\Delta}\right)\middle|\,\mathcal{F}^S_{T-2}, X_{T-2}=x\right] &(4.33)\\ &= \max_{\Delta_{T-2}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\tilde{U}_{T-1}\left(X_{T-1}^{\Delta}\right)\middle|\,\mathcal{F}^S_{T-2}, X_{T-2}=x\right] &(4.34)\end{aligned}$$

και ακόμα πιο γενικά ότι για κάθε $0 \leq t < \tau \leq T$

$$\begin{aligned}\tilde{U}_t(x_t) &= \max_{\Delta_{s,t\leq s\leq T-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(X_T^{\Delta}\right)\middle|\,\mathcal{F}^S_t, X_t=x_t\right]\\ &= \max_{\Delta_{s,t\leq s\leq \tau-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\tilde{U}_\tau\left(X_\tau^{\Delta}\right)\middle|\,\mathcal{F}^S_t, X_t=x_t\right]\\ &= \max_{\Delta_{s,t\leq s\leq \tau-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\max_{\Delta_{s,\tau\leq s\leq T-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(X_T^{\Delta}\right)\middle|\,\mathcal{F}^S_\tau, X_\tau=x_\tau\right]\middle|\,\mathcal{F}^S_t, X_t=x_t\right].\end{aligned}$$

Με πολύ πιο απλά λόγια, για να μεγιστοποιήσουμε την αναμενόμενη χρησιμότητα στον τερματικό χρονο T, λύνουμε πρώτα το τελευταίο βήμα $[T-1,T]$ και βρίσκουμε την έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας στον χρόνο $T-1$. Έπειτα λύνουμε το αμέσως προηγούμενο βήμα για την περίοδο $[T-2,T-1]$, βάζοντας σαν συνάρτηση χρησιμότητας στον χρόνο $T-1$, όχι την αρχική συνάρτηση χρησιμότητας U αλλά την (έμμεση) $\tilde{U}_{T-1}$. Λύνοντας και αυτό το πρόβλημα προχωράμε ανάποδα στον χρόνο με τον ίδιο τρόπο μέχρι να φτάσουμε στο πρώτο βήμα του διαστήματος $[0,1]$. Η όλη διαδικασία θα φανεί καλύτερα μέσα από το παρακάτω απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 11. *Θεωρείστε το απλό διωνυμικό υπόδειγμα δύο περιόδων με μία μετοχή, $r=0$ και επιτρέποντας τις υποκειμενικές πιθανότητες του επενδυτή να αλλάζουν σε κάθε σημείο του δέντρου. Υποθέστε επίσης ότι ένας επενδυτής έχει εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας $U(x)=-e^{-\gamma x}$. Σύμφωνα με τον κανόνα που έχουμε υιοθετήσει θα λύσουμε πρώτο το πρόβλημα μεγιστοποίησης για την περίοδο $[1,2]$, δηλαδή θα βρούμε ποια είναι η καλύτερη επένδυση στον χρόνο 1 δεδομένης της πληροφορίας για την πορεία της μετοχής και την αξία του χαρτοφυλακίου X_1. Με άλλα λόγια ψάχνουμε την τιμή*

[3] Ο όρος dynamic programming principle, εισήχθη από τον Richard Bellman (1920-84) την δεκαετία του 1940 με σκοπό να περιγράψει την διαδικασία λύσεως προβλημάτων βελτιστοποίησης όπου απαιτούνται αποφάσεις σε διαδοχικούς χρόνους. Η βασική αναφορά είναι Bellman R. (1954), "*The Theory of Dynamic Programming*", Bulletin of the American Mathematical Society 60 (6): 503–516.

Δ_1^* που μεγιστοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_1(x_1) &= \max_{\Delta_1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[U\left(X_2^{\Delta_1} \right) \Big| \mathcal{F}_1^S, X_1 = x_1 \right] \\
&= \max_{\Delta_1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[U\left(x_1 + \Delta_1(S_2 - S_1) \right) \middle| \mathcal{F}_1^S, X_1 = x_1 \right] \\
&= \max_{\Delta_1} \{ p_1 U(x_1 + \Delta_1 S_1(u-1)) + (1-p_1) U(x_1 + \Delta_1 S_1(d-1)) \} \\
&= -e^{-\gamma x_1} \min_{\Delta_1} \{ p_1 e^{-\gamma \Delta_1 S_1(u-1)} + (1-p_1) e^{-\gamma \Delta_1 S_1(d-1)} \},
\end{aligned}$$

όπου $p_1 := \mathbb{P}(\{G\}|\mathcal{F}_1^S)$, δηλαδή η πιθανότητα ανόδου στην δεύτερη περίοδο όταν ξέρουμε σε ποιο σημείο του δέντρου βρισκόμαστε στον χρόνο 1. Το παραπάνω πρόβλημα είναι πολύ απλό. Αρκεί να βρούμε τη τιμή Δ_1^* που μηδενίζει την παράγωγο της συνάρτησης $A_1(\Delta_1) := p_1 e^{-\gamma \Delta_1 S_1(u-1)} + (1-p_1) e^{-\gamma \Delta_1 S_1(d-1)}$ (προσέξτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι κυρτή, επομένως η δεύτερη παράγωγος θα είναι πάντα θετική). Η μοναδική λύση δίνεται από τον παρακάτω τύπο (ο υπολογισμός αφήνεται σαν άσκηση):

$$\Delta_1^* = \ln\left(\frac{p_1(u-1)}{(1-p_1)(1-d)} \right) \frac{1}{\gamma S_1(u-d)}. \tag{4.35}$$

Από την σχέση (4.35) *παρατηρούμε ότι όπως ήταν αναμενόμενο (γιατί;) ο βέλτιστος αριθμός μετοχών δεν εξαρτάται από το επίπεδο του πλούτου στον χρόνο 1. Επίσης ο αριθμός αυτός είναι φθίνουσα συνάρτηση του συντελεστή γ, πράγμα επίσης αναμενόμενο μιας και ο συντελεστής αυτός αναπαριστά το επίπεδο αποστροφής στον κίνδυνο που έχει ο επενδυτής. Από την στιγμή που έχουμε την λύση Δ_1^*, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μορφή που έχει η έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας $\tilde{U}_1(x)$. Πράγματι, λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω*

$$\tilde{U}_1(x_1) = -e^{-\gamma x_1} A_1(\Delta_1^*) = U(x_1) A_1(\Delta_1^*)$$

για κάθε τιμή πλούτου $x_1 \in \mathbb{R}$, όπου Δ_1^* δίνεται από την (4.35)*. Επιπλέον απλοί υπολογισμοί δίνουν ότι*

$$A_1(\Delta_1^*) = p_1 \left(\frac{p_1(u-1)}{(1-p_1)(1-d)} \right)^{-\frac{u-1}{u-d}} + (1-p_1) \left(\frac{p_1(u-1)}{(1-p_1)(1-d)} \right)^{\frac{1-d}{u-d}}.$$

Η σημαντική παρατήρηση εδώ είναι ότι η τιμή $A_1(\Delta_1^*)$ είναι τυχαία μεταβλητή και εξαρτάται από την πιθανότητα $\mathbb{P}(\{G\}|\mathcal{F}_1^S)$, που ενδεχομένως να μην είναι η ίδια όταν στο πρώτο βήμα έχουμε άνοδο ή πτώση (A_1^G θα είναι η τιμή της μεταβλητής $A_1(\Delta_1^*)$ όταν στην πρώτη περίοδο είχαμε άνοδο και $p_1 = \mathbb{P}(\{G\}|S_1 = uS_0)$ και αντίστοιχα στην περίπτωση πτώσης την πρώτη περίοδο θα έχουμε $A_1(\Delta_1^*) = A_1^B$ με $p_1 = \mathbb{P}(\{G\}|S_1 = dS_0)$).

Επομένως, το πρόβλημα για την περίοδο $[1,2]$ έχει λυθεί για κάθε δυνατό ενδεχόμενο. Το επόμενο βήμα είναι να υιοθετήσουμε την συνάρτηση $\tilde{U}_1(x)$ σαν συνάρτηση βελτιστοποίησης στον χρόνο 1 (δηλαδή να θέσουμε $U_1 = \tilde{U}_1$), έτσι όπως καθορίζει η DPP. Για την περίοδο δηλαδή $[0,1]$ θα πρέπει να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_0(x_0) &= \max_{\Delta_0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[U_1\left(X_1^{\Delta_0} \right) \right] \\
&= \max_{\Delta_0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[U_1\left(x_0 + \Delta_0(S_1 - S_0) \right) \right] \\
&= \max_{\Delta_0} \{ p_0 U(x_0 + \Delta_0 S_0(u-1)) A_1^G + (1-p_0) U(x_0 + \Delta_0 S_0(d-1)) A_1^B \} \\
&= -e^{-\gamma x_0} \min_{\Delta_0} \{ p_0 e^{-\gamma \Delta_0 S_0(u-1)} A_1^G + (1-p_0) e^{-\gamma \Delta_0 S_0(d-1)} A_1^B \},
\end{aligned}$$

όπου $p_0 := \mathbb{P}(\{G\})$. *Το τελευταίο πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι απλό και λύνεται όπως και αυτό της περιόδου* $[1,2]$ *και συγκεκριμένα έχουμε*

$$\Delta_0^* = \ln\left(\frac{p_0 A_1^G(u-1)}{(1-p_0)A_1^B(1-d)}\right)\frac{1}{\gamma S_0(u-d)}. \tag{4.36}$$

Σύμφωνα με το DPP έχουμε ότι το ζευγάρι (Δ_0^*, Δ_1^*) *λύνει το (αρχικό) πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης χρησιμότητας, δηλαδή λύνει το πρόβλημα*

$$\max_{\Delta_0,\Delta_1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U\left(x_0 + \sum_{k=1}^{2}\Delta_{k-1}(S_k - S_{k-1})\right)\right].$$