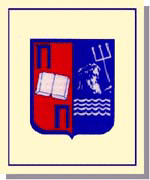
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

Πρόγραμμα Προπτυχιακών Σπουδών

****

Προχωρημένη Θεωρία Χαρτοφυλακίου Ι

Μάρτιος 2022

©Δημήτρης Μαλλιαρόπουλος

Καθηγητής

e-mail: dmalliaropulos@bankofgreece.gr

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

**Προχωρημένη Θεωρία Χαρτοφυλακίου**

Μέρος Ι: Καθηγητής Δημήτρης Μαλλιαρόπουλος

Μέρος ΙΙ: Καθηγητής Γιώργος Σκιαδόπουλος

**Περίληψη μέρους Ι μαθήματος:**

Το 1ο μέρος του μαθήματος καλύπτει την θεωρία και πρακτική επιλογής χαρτοφυλακίου καθώς και των μέτρων αξιολόγησης χαρτοφυλακίων. Παράλληλα με την κλασσική θεωρία του Markowitz, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου για στρατηγικούς επενδυτές του Merton. Ο στρατηγικός επενδυτής επιλέγει χαρτοφυλάκια τα οποία αντισταθμίζουν (μακρο-)οικονομικούς κινδύνους πέρα από τον γνωστό κίνδυνο της αγοράς. Η επιλογή χαρτοφυλακίου μπορεί να διαφέρει ανάλογα με την φάση του οικονομικού κύκλου και τον ορίζοντα του επενδυτή. Τα μέτρα αξιολόγησης αφορούν τον έλεγχο του κατά πόσο η διαφορά της απόδοσης ανά μονάδα κινδύνου μεταξύ δυο χαρτοφυλακίων είναι στατιστικά σημαντική. Σκοπός του μαθήματος είναι να παρέχει μια βαθύτερη αντίληψη της διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων στη διάρκεια του οικονομικού κύκλου. Παράλληλα με τη θεωρία, δίδεται έμφαση και σε εφαρμογές.

**Βαθμολόγηση:** 100% τελική γραπτή εξέταση.

# Αναλυτικό πρόγραμμα:

1. Εισαγωγή: Γραμμική άλγεβρα, πίνακες και διανύσματα, ιδιότητες και πράξεις [σημειώσεις]

* Εφαρμογές σε επενδυτικά χαρτοφυλάκια

1. Το αποδοτικό όριο [σημειώσεις]
   * Σφαιρικό χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου
   * Επιλογή χαρτοφυλακίου με ένα αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου
   * Θεώρημα 2 αμοιβαίων κεφαλαίων (2 fund separation)
   * Το υπόδειγμα CAPM
   * Εφαρμογές
2. Οικονομετρικές τεχνικές [σημειώσεις]
   * Διακύμανση σταθμίσεων χαρτοφυλακίων
   * Στατιστικοί έλεγχοι / Εφαρμογές
   * Προβλήματα στην κατασκευή χαρτοφυλακίων Markowitz και μέθοδοι αντιμετώπισης
3. Αντισταθμιστικά (στρατηγικά) χαρτοφυλάκια [σημειώσεις]
   * Θεώρημα Μ+2 αμοιβαίων κεφαλαίων (Μ+2 fund separation)
   * Το υπόδειγμα Διαχρονικού CAPM (ICAPM)
4. Έλεγχος αποτελεσματικότητας χαρτοφυλακίου [σημειώσεις]
   * Έλεγχος Intersection και Spanning με δύο αξιόγραφα
   * Εφαρμογές
   * Έλεγχος Intersection και Spanning με πολλά αξιόγραφα
   * Εφαρμογές

**Βιβλιογραφία:** Τις σημειώσεις μπορείτε να τις πάρετε από την ιστοσελίδα του Τμήματος. Προτεινόμενα άρθρα μπορείτε να τα βρείτε στο Google Scholar, στις βιβλιογραφικές βάσεις δεδομένων της βιβλιοθήκης του πανεπιστημίου (JSTOR, NBER, ScienceDirect, Elsevier, κλπ) και στις ιστοσελίδες των συγγραφέων.

**Οικονομετρικά προγράμματα:** Εφαρμογές στο excel, RATS (διατίθενται)

**Δεδομένα:** Βάσεις δεδομένων διεθνών χρηματιστηριακών δεικτών, επιτοκίων, ομολόγων, εμπορευμάτων (διατίθενται)

# Επιλεγμένα άρθρα

* Britten-Jones, M (1999) The sampling error in estimates of mean-variance efficient portfolio weights, Journal of Finance 54, pp. 655-671.
* Campbell, J.Y., A.W. Lo and A.C. MacKinlay (1997) The Econometrics of Financial Markets. Princeton University Press, Chapter 7.
* De Roon, Frans and Nijman Theo (2001) Testing for mean-variance spanning: A survey. Journal of Empirical Finance, vol. 8, pp. 111-156.
* De Roon, Frans, Nijman, Theo and Jenke R. ter Horst (2004) Evaluating style analysis. Journal of Empirical Finance, vol. 11, pp. 29-53.
* Jobson J.D. and Bob Korkie (1989) A performance interpretation of multivariate tests of asset set intersection, spanning and mean-variance efficiency. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 24, pp. 185-204.
* Fama, Eugene (1996) Multifactor portfolio efficiency and multifactor asset pricing. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 31(4), 441-465.
* Gibbons, Michael, Steven Ross and Jay Shanken (1989) A test of the efficiency of a given portfolio. Econometrica, vol. 57, pp. 1121-1152.
* Markowitz H. (1952), Portfolio Selection, Journal of Finance, 7-1, pp. 77-91.
* Merton, Robert (1969), Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous Time Case, Review of Economics and Statistics, vol LI, pp. 247-257.
* Merton, Robert (1973), An intertemporal capital asset pricing model, Econometrica 41, 867-887.
* Shanken Jay (1986) Testing portfolio efficiency when the zero-beta rate is unknown: A note. Journal of Finance, vol. 41, pp. 269-276.

Εισαγωγή

Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα ασχοληθούμε με την επιλογή άριστων χαρτοφυλακίων για επενδυτές με έμφαση σε πρακτικές εφαρμογές. Θα ξεκινήσουμε με την κλασσική θεωρία επιλογής άριστου χαρτοφυλακίου του Markowitz. Το χαρτοφυλάκιο αυτό χαρακτηρίζει την επιλογή επενδυτών οι οποίοι ενδιαφέρονται για την μέση απόδοση και τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου με ορίζοντα επένδυσης μιας περιόδου. Η κατανομή των αποδόσεων θεωρείται κανονική και σταθερή στον χρόνο. Κατά συνέπεια, οι αναμενόμενες αποδόσεις είναι οι μέσες δειγματικές και ο αναμενόμενος κίνδυνος είναι ο πίνακας της δειγματικής συνδιακύμανσης. Επιπλέον, θεωρείται ότι η κατανομή των αποδόσεων δεν εξαρτάται από άλλες οικονομικές μεταβλητές στην διάρκεια του οικονομικού κύκλου. Ως αποτέλεσμα, οι δεσμευμένες ροπές της κατανομής είναι ίδιες με τις αδέσμευτες. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει καμία οικονομική μεταβλητή η οποία έχει προβλεπτική ικανότητα είτε για τις αναμενόμενες αποδόσεις είτε για τον κίνδυνο, δηλ. τον πίνακα συνδιακύμανσης.

Στον κόσμο του Markowitz η επιλογή χαρτοφυλακίου δεν διαφέρει μεταξύ βραχυχρόνιων επενδυτών με ορίζοντα επένδυσης μία περίοδο και μακροχρόνιων επενδυτών με ορίζοντα επένδυσης πολλές περιόδους. Ο λόγος είναι ότι η ετησιοποιημένη αναμενόμενη απόδοση μιας επένδυσης με ορίζοντα k περιόδους είναι ίδια με την αναμενόμενη απόδοση μίας περιόδου ενώ η διακύμανση της αναμενόμενης απόδοσης μειώνεται όσο αυξάνει ο ορίζοντας με συντελεστή 1/k. Θα ονομάσουμε τους επενδυτές αυτούς «μυωπικούς» διότι επιλέγουν άριστα χαρτοφυλάκια για μία περίοδο και ενδεχομένως αναπροσαρμόζουν τα χαρτοφυλάκια κάθε περίοδο με την εισροή νέας πληροφόρησης για τις αναμενόμενες αποδόσεις και τον κίνδυνο των αξιογράφων. Οι επενδυτές αυτοί δεν ενδιαφέρονται για μακροχρόνιους κινδύνους και κατά συνέπεια δεν επιλέγουν χαρτοφυλάκια που να αντισταθμίζουν μακροχρόνιους κινδύνους.

Στον κόσμο αυτόν θα συζητήσουμε τις έννοιες της αποδοτικότητας, intersection και spanning χαρτοφυλακίων και θα γνωρίσουμε στατιστικούς ελέγχους που μας βοηθούν να ξεχωρίσουμε άριστα από μη άριστα χαρτοφυλάκια.

Στην συνέχεια θα χαλαρώσουμε τις περιοριστικές υποθέσεις του Markowitz με σκοπό να διατυπώσουμε μια εναλλακτική θεωρία επιλογής άριστου χαρτοφυλακίου για μακροχρόνιους στρατηγικούς επενδυτές. Θα ονομάσουμε τους επενδυτές αυτούς στρατηγικούς για δύο λόγους. Πρώτον, οι επενδυτές αυτοί επιλέγουν χαρτοφυλάκια τα οποία αντισταθμίζουν μακροχρόνιους κινδύνους όπως για παράδειγμα τον κίνδυνο της κλιματικής αλλαγής, τον κίνδυνο μιας οικονομικής ύφεσης, μιας αλλαγής στα επιτόκια, κλπ. Τα χαρτοφυλάκια αυτά είναι στρατηγικά γιατί προστατεύουν από μελλοντικούς κινδύνους. Δεύτερον, οι επενδυτές αυτοί έχουν μεγάλο ορίζοντα σε αντίθεση με τους μυωπικούς επενδυτές. Οι δύο αυτές αρχές είναι συνaφεíς με το διαχρονικό υπόδειγμα αποτίμησης του Merton. Στο υπόδειγνα αυτό, τα ασφάλιστρα κινδύνου των αξιόγραφων καθορίζονται ως συναρτήσεις της συνδιακύμανσης των αποδόσεων των αξιόγραφων με μεταβλητές κατάστασης, οι οποίες σηματοδοτούν τον κίνδυνο μιας αλλαγής του σετ επενδυτικών δυνατοτήτων στο μέλλον. Κατά συνέπεια, το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή αποτελείται από δύο μέρη: (α) το χαρτοφυλάκιο του Markowitz και (β) την αντισταθμιστική ζήτηση για αξιόγραφα τα οποία προστατεύουν το χαρτοφυλάκιο από μελλοντικούς κινδύνους.

Η κατανόηση της θεωρίας επιλογής χαρτοφυλακίου απαιτεί βασικές γνώσεις γραμμικής άλγεβρας, στατιστικής και οικονομετρίας. Στο μάθημα αυτό θα προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε την χρήση δύσκολων μαθηματικών πέρα από τα απολύτως απαραίτητα. Η χρήση γραμμικής άλγεβρας μας επιτρέπει να καθορίσουμε τις σταθμίσεις άριστων χαρτοφυλακίων με θεωρητικά οποιονδήποτε αριθμό αξιογράφων σε απλές κλειστές φόρμουλες και να χρησιμοποιήσουμε γνωστά στατιστικά πακέτα (excel, matlab, κ.ά.) για την εκτίμηση τους.

Δημήτρης Μαλλιαρόπουλος

### Άλγεβρα: Διανύσματα και Πίνακες – Ιδιότητες και Πράξεις

Πίνακας διαστάσεων (2x2) **(#γραμμών x #στηλών)**:

,

όπου αριθμοί.

**Πίνακας** διαστάσεων (2x3) :

To **διάνυσμα** είναι ένας πίνακας με μια γραμμή ή μια στήλη. Για παράδειγμα το είναι ένα διάνυσμα στήλης (2x1), το είναι ένα διάνυσμα γραμμής (1x3):

**Συμμετρικός πίνακας** (π.χ. πίνακας συνδιακύμανσης) :

**Ταυτοτικός πίνακας** (identity matrix) (3x3):

Κανόνες: για κάθε *Α*.

**Μοναδιαίος πίνακας** (3x3), μοναδιαίο διάνυσμα (3x1):

**Ανάστροφος πίνακα**

**Ανάστροφος διανύσματος στήλης**

**Ανάστροφος διανύσματος γραμμής**

Κανόνες: αν : συμμετρικός πίνακας.

**Πρόσθεση πινάκων:**

,

Για να προσθέσουμε δυο πίνακες, πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

**Αφαίρεση πινάκων:**

,

Για να αφαιρέσουμε δυο πίνακες, πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

**Πολλαπλασιασμός πινάκων:**

,

Για να πολλαπλασιάσουμε δυο πίνακες πρέπει να έχουν πάντοτε την ίδια εσωτερική διάσταση, π.χ.

(2x2)(2X3)=(2x3), (1x2)(2x2)=(1x2), (10x4)(4x100)=(10x100), (1x3)(3x1)=(1x1).

Παραδείγματα:

Κανόνες πολλαπλασιασμού:

*(υπάρχουν όμως κάποιες εξαιρέσεις)*

**Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα** μας δίνει διάνυσμα:

**Εσωτερικό γινόμενο:**

**Εξωτερικό γινόμενο:**

**Quadratic form** (συχνά με ένα συμμετρικό πίνακα *Α* στο κέντρο):

**Αντίστροφος πίνακα .** Χρησιμοποιείται για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων:

Όπου *Α* ένας πίνακας και *x, y* δυο διανύσματα. Η λύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων είναι:

Όπου ο αντίστροφος του .

Προσοχή: Δεν έχουν όλοι οι πίνακες αντίστροφο. Για να υπάρχει αντίστροφος, πρέπει ο πίνακας να είναι τετραγωνικός (n x n) και να έχει ορίζουσα διαφορετική του μηδενός (full rank) -- αντίστοιχα με τον κανόνα ότι δεν μπορούμε να διαιρέσουμε έναν αριθμό με το μηδέν.

Υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα για έναν πίνακα (2x2):

όπου είναι η ορίζουσα του.

Για πίνακες μεγαλύτερων διαστάσεων χρησιμοποιούμε τον υπολογιστή.

Κανόνες: για κάθε *Α*.

αν ο είναι συμμετρικός πίνακας.

**Εφαρμογές σε επενδυτικά χαρτοφυλάκια:**

Όταν κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο με Κ αξιόγραφα με αποδόσεις και σταθμίσεις , μπορούμε να γράψουμε την απόδοση του χαρτοφυλακίου ως:

Με τη χρήση διανυσμάτων, η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι:

Το είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

Χρησιμοποιούμε το εξωτερικό γινόμενο για να ορίσουμε τον πίνακα συνδιακύμανσης. Ενδεικτικά, ο πίνακας συνδιακύμανσης δυο αξιογράφων με αποδόσεις είναι:[[1]](#footnote-1)

Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι:

**Παράδειγμα: Διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου με 2 αξιόγραφα:**

Πράγματι, αν η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου με 2 αξιόγραφα είναι , ενώ η διακύμανση του είναι:

**Παράγωγος εσωτερικού γινομένου:**

Έστω η απόδοση του χαρτοφυλακίου

Η παράγωγος είναι ένα διάνυσμα (Κx1) του οποίου η γραμμή i=1,…,K μας δίνει την οριακή μεταβολή του όταν αλλάξει το .

**Παράγωγος ενός quadratic form:**

Έστω η διακύμανση του χαρτοφυλακίου

Η παράγωγος είναι ένα διάνυσμα (Κx1) του οποίου η γραμμή *i=1…K* μας δίνει την οριακή μεταβολή του όταν αλλάξει το .

**Παράδειγμα (διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου με 2 αξιόγραφα):**

### Ενότητα Ι: Επιλογή χαρτοφυλακίου

## **Κεφάλαιο 1: Το αποδοτικό όριο**

Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρωθούμε στην επιλογή του άριστου χαρτοφυλακίου επενδυτών με ορίζοντα μιας περιόδου σύμφωνα με τον Μarkowitz. Το υπόδειγμα υποθέτει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή με σταθερή διακύμανση. Κατά συνέπεια, ο επενδυτής ενδιαφέρεται μόνο για τις πρώτες δυο ροπές της κατανομής (μέσο και διακύμανση), καθώς αυτές ορίζουν πλήρως την κανονική κατανομή. Η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι θετική στην αναμενόμενη απόδοση και αρνητική στην διακύμανση του χαρτοφυλακίου.

Αυτό προκύπτει όταν η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι τετραγωνική στην κατανάλωση ή τον πλούτο, καθώς θεωρούμε ότι ο επενδυτής δεν έχει εισόδημα από εργασία και κατά συνέπεια η μόνη πηγή κατανάλωσης είναι ο πλούτος του. Η τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας είναι πολύ περιοριστική. Όμως, μπορούμε να χαλαρώσουμε αυτή την υπόθεση και να αντιληφθούμε την συνάρτηση χρησιμότητας του Markowitz ως το αποτέλεσμα μιας γραμμικής προσέγγισης Taylor 2ου βαθμού μιας γενικής συνάρτησης χρησιμότητας πλούτου U(W) – βλέπε Παράρτημα: Συνάρτηση Χρησιμότητας.

Ο επενδυτής επιλέγει το χαρτοφυλάκιο το οποίο μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση με δεδομένη διακύμανση (κίνδυνο) ή, αντίστροφα, το χαρτοφυλάκιο το οποίο ελαχιστοποιεί την διακύμανση με δεδομένη την αναμενόμενη απόδοση. Καταρχήν θα εξετάσουμε χαρτοφυλάκια αξιογράφων με κίνδυνο. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε χαρτοφυλάκια στα οποία το ένα αξιόγραφο είναι μηδενικού κινδύνου. Όλα τα χαρτοφυλάκια που θα εξετάσουμε δεν υφίστανται περιορισμούς short selling.

Ορίζουμε: 

: διάνυσμα αναμενόμενων αποδόσεων K περιουσιακών στοιχείων (K x 1)

w: διάνυσμα σταθμίσεων K περιουσιακών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο (K x1)

Σ: Πίνακας διακύμανσης/συνδιακύμανσης αποδόσεων (K x K)

γ: βαθμός αποστροφής κινδύνου (1 x 1)

Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι . Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι:

**Το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας του επενδυτή** ορίζεται ως:

s.t. : w’

όπου είναι το (K x 1) μοναδιαίο διάνυσμα,=(1,1,…,1).

O περιορισμός w’=1 σημαίνει ότι οι σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου προστίθενται στην μονάδα.

Το πρόβλημα χωρίς περιορισμούς μπορεί να γραφτεί ως:

όπου η είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange, ο οποίος μπορεί να ορισθεί ως η απόδοση του χαρτοφυλακίου μηδενικού κινδύνου με beta=0 (zero beta portfolio return).

Από τη συνθήκη πρώτου βαθμού προκύπτει το άριστο χαρτοφυλάκιο κατά Markowitz:

Η σύνθεση του άριστου χαρτοφυλακίου κατά Markowitz είναι συνάρτηση τριών παραμέτρων: (α) της αναμενόμενης απόδοσης των αξιόγραφων πάνω από την απόδοση του χαρτοφυλακίου μηδενικού κινδύνου, (β) του κινδύνου των αξιόγραφων, όπως αυτός μετράται από τον πίνακα συνδιακύμανσης και (γ) του βαθμού αποστροφής κινδύνου του επενδυτή.

Ας σημειωθεί ότι ο πολλαπλασιαστής lagrange η δεν είναι γνωστός και κατά κανόνα είναι μη παρατηρήσιμος. Μπορούμε να δείξουμε ότι ο πολλαπλασιαστής lagrange εξαρτάται από τον βαθμό αποστροφής κινδύνου. Κατά συνέπεια, καθορίζοντας στο πρόβλημά μας τον τύπο του επενδυτή, ορίζουμε ταυτόχρονα και το η.

**Απόδειξη:** Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά τη συνθήκη άριστου χαρτοφυλακίου με , παίρνουμε: .

Λύνοντας για τον βαθμό αποστροφής κινδύνου, παίρνουμε:

όπου Α και Β είναι δυο σταθερές (efficient set constants).



Διάγραμμα 1: Αποδοτικό όριο

|  |
| --- |
| Έστω ότι ο επενδυτής επιλέγει χαρτοφυλάκιο με δύο αξιόγραφα. Το πρόβλημα είναι:  Η λύση είναι:    Υπενθυμίζουμε ότι ο αντίστροφος ενός πίνακα 2x2 είναι:  Οι σταθμίσεις του άριστου χαρτοφυλακίου μπορούν να γραφτούν πιο απλά ως: |

|  |
| --- |
| **Παράρτημα: Συνάρτηση χρησιμότητας** |
| Η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή στο υπόδειγμα του Markowitz είναι το αποτέλεσμα μιας γραμμικής προσέγγισης Taylor 2ου βαθμού μιας συνάρτησης χρησιμότητας με = , όπου = 1+και w’.  Παίρνοντας την προσέγγιση γύρω από το και και έχουμε:  Υποθέτοντας ότι οι αποδόσεις είναι κανονικές και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς και )=w’Σw , όπου είναι το διάνυσμα των καθαρών αποδόσεων των αξιογράφων, έχουμε  .  Διαιρώντας και τις δύο πλευρές με , έχουμε  Όπου ο βαθμός αποστροφής κινδύνου του επενδυτή. |

|  |
| --- |
| **Εφαρμογή: Κατασκευή αποδοτικού όριου με γεωγραφικούς δείκτες (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία)** |
| Δίδονται οι μηνιαίες αποδόσεις τριών χρηματιστηριακών δεικτών (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία) από το 1973:12 έως το 2002:3. Οι μέσες αποδόσεις είναι:  AUSTRIA: 0.00695  IRELAND: 0.0154  ITALY: 0.0119  Ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι:  AUSTRIA IRELAND ITALY  AUSTRIA 0.00326976420 0.3046565819 0.2535317462  IRELAND 0.001103692866 0.0040138293 0.3711914589  ITALY 0.001039052176 0.0016854824 0.0051368109  Το αποδοτικό όριο μπορεί να κατασκευαστεί από την μεταβάλλοντας το γ και χρησιμοποιώντας την συνθήκη για να καθορίσουμε το η.  Στο Διάγραμμα 2 φαίνεται το αποδοτικό όριο των χαρτοφυλακίων τα οποία αποτελούνται από τους παραπάνω τρείς χρηματιστηριακούς Δείκτες για γ από 0.01 (πάνω δεξιά) έως 10 (κάτω αριστερά).  Η σύνθεση του αποδοτικού χαρτοφυλακίου για γ=0.01 είναι  AUSTRIA: 0.13483  IRELAND: 0.63626  ITALY: 0.22891  Η σύνθεση του αποδοτικού χαρτοφυλακίου για γ=10 είναι  AUSTRIA: 0.36360  IRELAND: 0.41609  ITALY: 0.22031  Δεδομένα: emu\_ret.WKS. Program: frontier\_gama.prg.  **α)Ιρλανδία)(Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία)** |



γ=10

γ=0.01

Διάγραμμα 2: Υπολογισμός αποδοτικού ορίου με μεταβολή του βαθμού αποστροφής κινδύνου, γ

Το σφαιρικό χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου (GMV: global minimum variance portfolio)

Ποιο είναι το χαρτοφυλάκιο πάνω στο αποδοτικό όριο με την ελάχιστη διακύμανση; Για να το βρούμε, πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα:

s.t. : w’

Ή:

)

Η συνθήκη πρώτου βαθμού είναι:

Για να καθορίσουμε το η πολλαπλασιάζουμε την συνθήκη πρώτου βαθμού με . Από τον περιορισμό ότι οι σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου πρέπει να αθροίζουν στην μονάδα προκύπτει:

Αντικαθιστώντας το  στην συνθήκη πρώτου βαθμού δίνει τα σταθμά του σφαιρικού χαρτοφυλακίου ελάχιστου κινδύνου (GMV portfolio):

Με άλλα λόγια, η άριστη στάθμιση του στοιχείου i στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου (δηλ. το στοιχείο i του διανύσματος w) δίδεται ως:

|  |
| --- |
| **Εφαρμογή: Καθορισμός σφαιρικού χαρτοφυλακίου ελάχιστου κινδύνου με γεωγραφικούς δείκτες (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία)** |
| Δίδονται οι μηνιαίες αποδόσεις τριών χρηματιστηριακών δεικτών (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία) από το 1973:12 έως το 2002:3. Οι μέσες αποδόσεις είναι:  AUSTRIA: 0.00695  IRELAND: 0.0154  ITALY: 0.0119  Ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι:  AUSTRIA IRELAND ITALY  AUSTRIA 0.00326976420 0.3046565819 0.2535317462  IRELAND 0.001103692866 0.0040138293 0.3711914589  ITALY 0.001039052176 0.0016854824 0.0051368109  Το σφαιρικό χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου είναι:  AUSTRIA: 0.47694  IRELAND: 0.30701  ITALY: 0.21605  Η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι: 0.01063.  Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι: 0.00212.  Δεδομένα: emu\_ret.WKS. Program: frontier\_gmv\_opt.prg.**αλία, Ιρλανδία)** |

Κεφάλαιο 2: Χαρτοφυλάκια με ένα περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου

Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής κατανέμει τον πλούτο του μεταξύ Κ περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο και 1 περιουσιακού κινδύνου χωρίς κίνδυνο (κατάθεση). Ο επενδυτής κατανέμει ένα ποσοστό του πλούτου του στο στοιχείο χωρίς κίνδυνο με γνωστή απόδοση και ένα ποσοστό w του πλούτου του στα Κ στοιχεία με κίνδυνο με αναμενόμενη απόδοση μ, όπου w και μ είναι διανύσματα (Κ x 1).

Ο περιορισμός χαρτοφυλακίου είναι =1.

Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι . Καθώς ο περιορισμός χαρτοφυλακίου μπορεί να γραφτεί ως , η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι:

))

Ορίζουμε το διάνυσμα των αναμενόμενων υπερβαλλουσών αποδόσεων πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ως:

Η διακύμανση των υπερβαλλουσών αποδόσεων είναι Σrr.

Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι:

) = =w’

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας του επενδυτή είναι:

Το άριστο χαρτοφυλάκιο των στοιχείων με κίνδυνο προκύπτει ως:

(μ-)

Το ποσοστό του πλούτου που επενδύεται στο στοιχείο χωρίς κίνδυνο προκύπτει από τον περιορισμό

.

σp

Χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου (GMV)

Αποδοτικό όριο

μr = Ε(rp)-rf

Άριστο χαρτοφυλάκιο w(γ)

Κλíση λόγου Sharpe

Διάγραμμα 3: Αποδοτικό όριο χαρτοφυλακίου με υπερβάλλουσες αποδόσεις

Θεώρημα δυο αμοιβαίων κεφαλαίων (Two fund separation)

Όταν υπάρχει ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, το άριστο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός μεταξύ του αξιογράφου χωρίς κίνδυνο και ενός χαρτοφυλακίου των Κ αξιογράφων με κίνδυνο (two fund separation). Όλοι οι επενδυτές θα κρατούν ένα και μοναδικό χαρτοφυλάκιο με κίνδυνο, το λεγόμενο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο (tangency portfolio) και το αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου. Συντηρητικοί επενδυτές θα κρατούν ένα μεγαλύτερο ποσοστό του πλούτου τους στο αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου. Επιθετικοί επενδυτές θα κρατούν μεγαλύτερο ποσοστό του πλούτου τους στο χαρτοφυλάκιο με κίνδυνο. Πολύ επιθετικοί επενδυτές θα δανείζονται στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και θα επενδύουν ένα πολλαπλάσιο του πλούτου τους στο χαρτοφυλάκιο με κίνδυνο (μόχλευση).

Το άριστο χαρτοφυλάκιο με αναμενόμενη απόδοση θα είναι η λύση του προβλήματος:

s.t. : )

Το πρόβλημα χωρίς περιορισμούς είναι:

=)-)

Το άριστο χαρτοφυλάκιο των στοιχείων με κίνδυνο προκύπτει ως:

Η σταθερά δ είναι μια θετική συνάρτηση του αναμενόμενου ασφάλιστρου κινδύνου του επενδυτή (). Με άλλα λόγια, ο επενδυτής επιλέγει ένα χαρτοφυλάκιο πάνω στο αποδοτικό όριο, ανάλογα με το ασφάλιστρο κινδύνου που επιθυμεί (Διάγραμμα 3). Όσο υψηλότερο ασφάλιστρο κινδύνου επιθυμεί ο επενδυτής, τόσο μεγαλύτερος και ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου.

\*\*\*

*Για να το δείξουμε αυτό, χρησιμοποιούμε τον περιορισμό =).*

*Παίρνοντας την αντίστροφη της w=δ και αντικαθιστώντας στην =) έχουμε δ= Κατά συνέπεια, το άριστο χαρτοφυλάκιο προκύπτει ως:*

***Απόδειξη:*** *Από την w=δέχουμε: w’=δ( και*

*)’. Από την έχουμε:* ***.*** *Συνδυάζοντας τις δυο συνθήκες, παίρνουμε:*

*\*\*\**

Από την παραπάνω έκφραση μπορούμε να ορίσουμε το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο (tangency portfolio). Το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι το χαρτοφυλάκιο πάνω στο αποδοτικό όριο με τη μέγιστη υπερβάλλουσα απόδοση ανά μονάδα κινδύνου (Sharpe ratio), δηλ. το μέγιστο . Διαγραμματικά, η μέγιστη υπερβάλλουσα απόδοση ανά μονάδα κινδύνου παριστάνεται από την ευθεία η οποία ξεκινάει από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου Rf και εφάπτεται στο αποδοτικό όριο. Το σημείο στο οποίο η ευθεία αυτή εφάπτεται στο αποδοτικό όριο, ορίζει το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο (βλέπε Διάγραμμα 4). Το χαρτοφυλάκιο αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε από τον περιορισμό ότι τα σταθμά του θα πρέπει να αθροίζουν στη μονάδα .

Εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο:

Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά τα σταθμά του άριστου χαρτοφυλακίου

με προκύπτει:

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στο , βρίσκουμε τα σταθμά του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου:

)

Ο όρος είναι το άθροισμα των στοιχείων του χαρτοφυλακίου.

Διαιρώντας με το άθροισμα αυτό, επιβάλλουμε τον περιορισμό ότι οι σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου με κίνδυνο πρέπει να αθροίζουν στην μονάδα.

Το Διάγραμμα 4 δείχνει το αποδοτικό όριο με ένα αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου. Το χαρτοφυλάκιο Ε είναι το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο. Όλοι οι επενδυτές επιλέγουν ένα χαρτοφυλάκιο πάνω στην ευθεία . Η ευθεία αυτή είναι το αποδοτικό όριο. Επενδυτές με υψηλό γ (υψηλή αποστροφή στον κίνδυνο) επιλέγουν σημεία πάνω στην ευθεία κοντά στο ενώ επενδυτές με χαμηλό γ επιλέγουν σημεία πάνω στην ευθεία κοντά στο Ε. Στο τμήμα οι επενδυτές έχουν θετικές ποσότητες του αξιογράφου με κίνδυνο. Στο τμήμα ΕΑ, οι επενδυτές δανείζονται στο αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο και επενδύουν στο χαρτοφυλάκιο με κίνδυνο (μόχλευση).

A

Αποδοτικό όριο

σp

Χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου (GMV)

μp = Ε(rp)

Εφαπτόμενο χ/ο (Tangency portfolio)

rF

E

Διάγραμμα 4: Αποδοτικό όριο όταν υπάρχει αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο

|  |
| --- |
| **Εφαρμογή:**  **Το εφαπτώμενο χαρτοφυλάκιο με γεωγραφικούς δείκτες (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία)** |
| Στο προηγούμενο παράδειγμα τριών χρηματιστηριακών δεικτών (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία) μπορούμε να βρούμε το εφαπτόμενο (tangency) χαρτοφυλάκιο με ένα επιτόκιο μηδενικού κινδύνου 0.024% ετησίως. Το επιτόκιο αυτό αντιστοιχεί σε 0.002% τον μήνα. Το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι:  AUSTRIA: 0.17090  IRELAND: 0.77911  ITALY: 0.28179    Η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι: 0.01656.  Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι: 0.00407.  Το αποδοτικό όριο δίδεται στο Διάγραμμα 5.  Δεδομένα: emu\_ret.WKS. Program: frontier\_tangency.prg  **νδία)Ιρλανδία)(Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία)** |



Αποδοτικό όριο όλων των χαρτοφυλακίων με κίνδυνο

Tangency portfolio

Διάγραμμα 5: Αποδοτικό όριο όταν υπάρχει αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο

Στο διάγραμμα φαίνεται το αποδοτικό όριο ως η ευθεία η οποία ξεκινάει από το σημείο (0, 0.002). Το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι το χαρτοφυλάκιο όπου η ευθεία αυτή εφάπτεται με το αποδοτικό όριο όλων των χαρτοφυλακίων με κίνδυνο (μπλέ γραμμή).

Κεφάλαιο 3: Το Υπόδειγμα CAPM

Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε ότι αν όλοι οι επενδυτές κρατούν το άριστο χαρτοφυλάκιο, τότε ισχύει το υπόδειγμα της αγοράς (Capital Asset Pricing Model, CAPM). Η λογική είναι η εξής: Αν οι αποδόσεις είναι κανονικές, τότε οι αναμενόμενες αποδόσεις και ο κίνδυνος είναι ίσες με τις αδέσμευτες αποδόσεις και τον πίνακα των αδέσμευτων συνδιακυμάνσεων της από κοινού κατανομής των αποδόσεων. Αυτές οι ροπές της κατανομής είναι γνωστές σε όλους τους επενδυτές. Κατά συνέπεια, όλοι οι επενδυτές έχουν τις ίδιες προσδοκίες και εάν δεν υπάρχουν περιορισμοί στις επενδυτικές τους επιλογές, όλοι κρατούν το ίδιο άριστο χαρτοφυλάκιο. Το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι το χαρτοφυλάκιο αγοράς. Κατά συνέπεια, ισχύει το υπόδειγμα της αγοράς CAPM. Οι υποθέσεις που κάναμε είναι ομολογουμένως πολύ ισχυρές, όμως αυτός είναι και ο λόγος που παίρνουμε ένα τόσο ισχυρό αποτέλεσμα.

Το σημείο εκκίνησης για την απόδειξη του CAPM είναι ο κανόνας του άριστου χαρτοφυλακίου: . Λύνοντας για τις υπερβάλλουσες αποδόσεις, παίρνουμε:

Στο παράδειγμα δυο αξιογράφων, η συνθήκη αυτή είναι:

Για να πάρουμε μια εξίσωση για την απόδοση του χαρτοφυλακίου, πολλαπλασιάζουμε την συνθήκη άριστου χαρτοφυλακίου με w’:

Καθώς

όπου και είναι η απόδοση και η διακύμανση του χαρτοφυλακίου της αγοράς, αντίστοιχα.

Από την συνθήκη αυτή προκύπτει:

|  |
| --- |
| **Εφαρμογή: 2 x 2** |
| Στην περίπτωση 2x2 η συνθήκη είναι:  Η τελευταία εξίσωση προκύπτει από τον ορισμό της διακύμανσης: |

CAPM

Αντικαθιστούμε την συνθήκη στην :

Η τελευταία εξίσωση είναι το CAPM. Η αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση κάθε περιουσιακού στοιχείου με κίνδυνο δίδεται ως το γινόμενο του beta του αξιόγραφου και της υπερβάλλουσας απόδοσης του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Το beta δίδεται ως ο λόγος της συνδιακύμανσης του αξιόγραφου με την αγορά προς την διακύμανση της αγοράς.

Για να το δούμε αυτό, γράφουμε την παραπάνω εξίσωση ως ένα σύστημα εξισώσεων για τα Κ αξιόγραφα:

…

Όπου , i=1,2,…K.

|  |
| --- |
| **Εφαρμογή: 2 αξιόγραφα με κίνδυνο** |
| Σημείωση:  Άρα , ισχύει το CAPM: |

Απόδοση στοιχείου μηδενικού beta (Zero beta return):

Αν ένα περιουσιακό στοιχείο, π.χ. το στοιχείο 1, είναι μηδενικού κινδύνου, τότε η συνδιακύμανση του με το χαρτοφυλάκιο αγοράς θα είναι 0, δηλ. . Κατά συνέπεια, . Αυτό σημαίνει ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Γενικότερα, αν υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο με μηδενικό beta με το χαρτοφυλάκιο αγοράς, τότε η απόδοση του ορίζει τον πολλαπλασιαστή Lagrange.

**Κεφάλαιο 4: Οικονομετρικές Τεχνικές**

**Η διακύμανση των σταθμίσεων του άριστου χαρτοφυλακίου**

Καθώς οι αποδόσεις και ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι τυχαίες μεταβλητές, είναι φανερό ότι και το διάνυσμα σταθμίσεων του άριστου χαρτοφυλακίου είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η εκτίμηση ενός άριστου χαρτοφυλακίου θα πάσχει πάντα από αβεβαιότητα καθώς τα λάθη εκτίμησης των αναμενόμενων αποδόσεων και του πίνακα συνδιακύμανσης μεταφράζονται σε λάθη εκτίμησης των σταθμίσεων του άριστου χαρτοφυλακίου. Το πρόβλημα αυτό είναι πιο έντονο σε μικρά δείγματα (ακόμη και κάτω από την περιοριστική συνθήκη ότι η κατανομή των αποδόσεων είναι κανονική), αλλά κάτω από γενικές συνθήκες ισχύει και ασυμπτοτικά, ιδιαίτερα όταν η κατανομή των αποδόσεων παρουσιάζει κύρτωση.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ιστορικές υπερβάλουσες αποδόσεις , από τις οποίες μπορούμε να εκτιμήσουμε τον δειγματικό μέσο και την δειγματική μήτρα διακύμανσης

Βάζοντας τους εκτιμητές του μέσου και της διακύμανσης στην έκφραση των σταθμών του άριστου χαρτοφυλακίου, έχουμε για τον εκτιμητή του άριστου χαρτοφυλακίου:



Ποιες είναι οι στατιστικές ιδιότητες του εκτιμητή του άριστου χαρτοφυλακίου; Υποθέτοντας κανονικότητα της κατανομής των υπερβαλουσών αποδόσεων, ο εκτιμητής του άριστου χαρτοφυλακίου είναι αμερόληπτος:



Όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την ανεξαρτησία του μ και του Σ και η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την ιδιότητα των  και  να είναι αμερόληπτοι εκτιμητές των πραγματικών ροπών της κατανομής (αμεροληψία: κατά μέσο όρο, ο εκτιμητής μας είναι σωστός).

Αν η κατανομή των αποδόσεων δεν είναι κανονική, τότε ο εκτιμητής του άριστου χαρτοφυλακίου δεν είναι αμερόληπτος, αλλά είναι συνεπής (consistent), δηλ. plim()=w.

Για να βρούμε την διακύμανση του εκτιμητή άριστου χαρτοφυλακίου, παίρνουμε την παράγωγο του  γύρω από τον πραγματικό μέσο και διακύμανση των υπερβαλουσών αποδόσεων. Για να απλουστεύσουμε τα πράγματα, περιορίζουμε την ανάλυσή μας στην περίπτωση ενός αξιογράφου με κίνδυνο (η επέκταση σε πολλά αξιόγραφα είναι δυνατή, παρότι πιο δύσκολη). Με ένα αξιόγραφο, το άριστο χαρτοφυλάκιο είναι . Η διακύμανση του  είναι:



Η διακύμανση του εκτιμητή της στάθμισης του άριστου χαρτοφυλακίου είναι συνάρτηση τόσο της διακύμανσης του μέσου όσο και της διακύμανσης της διακύμανσης της υπερβάλουσας απόδοσης. Η αβεβαιότητα σχετικά με τις δυο αυτές μεταβλητές πολλαπλασιάζεται με το τετράγωνο της άριστης στάθμισης .

Για να δώσουμε μια ποσοτική έκφραση στην αβεβαιότητα της εκτίμησης των σταθμίσεων του άριστου χαρτοφυλακίου, ας υποθέσουμε κάποιες λογικές τιμές για τα μ, σ,  και . Έστω ότι έχουμε 10 χρόνια μηνιαίων δεδομένων της υπερβάλουσας απόδοσης μιας μετοχής με μ=6% και σ=15%. Με iid κανονικά δεδομένα, η τυπική απόκλιση του μέσου είναι . Η τυπική απόκλιση της διακύμανσης είναι . Κατά συνέπεια, η τυπική απόκλιση του εκτιμητή  για μια τιμή του γ=5 είναι 24%. Καθώς το πραγματικό w (για μ=6%, σ=15%, γ=5) είναι 53%, η ζώνη αβεβαιότητας δυο τυπικών αποκλίσεων γύρω από το w είναι (5% - 101%), δηλ. πολύ μεγάλη.

Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει ότι το λάθος εκτίμησης του w οφείλεται κυρίως στο λάθος εκτίμησης της μέσης απόδοσης και λιγότερο στο λάθος εκτίμησης της διακύμανσης. Αυτό όμως ισχύει λόγω της υπόθεσης της κανονικότητας των αποδόσεων. Αν υποθέσουμε μη κανονικότητα, το λάθος εκτίμησης της διακύμανσης αυξάνεται σημαντικά λόγω της κύρτωσης της κατανομής. Συγκεκριμένα, όσο μεγαλύτερη η κύρτωση της κατανομής των αποδόσεων (fat tails) τόσο μεγαλύτερο το λάθος εκτίμησης της διακύμανσης διότι υψηλές τιμές στα άκρα της κατανομής (outliers) κάνουν την εκτίμηση πιο ανακριβή.

**Εκτίμηση της τυπικής απόκλισης των σταθμίσεων μέσω παλινδρόμησης**

Για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης του ο Britten-Jones (1999) προτείνει μια παλινδρόμηση ελαχίστων τετραγώνων μιας σταθεράς πάνω στον πίνακα των υπερβαλουσών αποδόσεων:

Όπου 1 είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα (Τ x 1), b είναι το διάνυσμα των συντελεστών παλινδρόμησης (Κx 1), είναι ο πίνακας των αποδόσεων (Τ x Κ) και είναι ένα διάνυσμα τυχαίων λαθών (T x 1).

Ο Britten-Jones δείχνει ότι οι σταθμίσεις του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου μπορούν να εκτιμηθούν ως:

Όπου είναι το άθροισμα των . Κατά συνέπεια, η τυπική απόκλιση των σταθμίσεων του χαρτοφυλακίου μπορεί να υπολογιστεί άμεσα από την τυπική απόκλιση των συντελεστών .Επίσης, μπορούν εύκολα να χρησιμοποιηθούν κλασικοί έλεγχοι σημαντικότητας, όπως το t-test και το F-test. Για παράδειγμα, για να ελέγξουμε αν το στοιχείο k του w είναι στατιστικά διαφορετικό του μηδενός, αρκεί να ελέγξουμε με ένα t-test αν το στοιχείο k του b είναι στατιστικά διαφορετικό του μηδενός.

**Προβλήματα στην κατασκευή χαρτοφυλακίων Markowitz**

Εκτός του ότι τα χαρτοφυλάκια Markowitz πάσχουν από σημαντικά υψηλά λάθη εκτίμησης, παρουσιάζουν επιπλέον δυο προβλήματα. Πρώτον, οι σταθμίσεις πολλών αξιογράφων είναι ακραίες, είτε υπερβολικά υψηλές (πολύ υψηλότερες της μονάδας), είτε πολύ αρνητικές, παρότι αθροίζουν στη μονάδα. Δεύτερον, παρουσιάζουν αστάθεια, δηλ. μικρές αλλαγές στις αναμενόμενες αποδόσεις ή στον πίνακα συνδιακύμανσης οδηγούν σε μεγάλες αλλαγές στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου. Τα προβλήματα αυτά είναι ιδιαίτερα έντονα όταν κάποια αξιόγραφα στο χαρτοφυλάκιο έχουν υψηλή συσχέτιση. Για το λόγο αυτό, αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι κλασσικές μέθοδοι αριστοποίησης χαρτοφυλακίου, όπως η μέθοδος του Markowitz, λειτουργούν στην πράξη ως μέθοδοι μεγιστοποίησης του λάθους – Michaud (1989).

Με σκοπό την ελαχιστοποίηση του λάθους εκτίμησης της κλασσικής μεθόδου αριστοποίησης χαρτοφυλακίου, έχουν προταθεί μια σειρά εναλλακτικών μεθόδων. Μεταξύ των μεθόδων αυτών περιλαμβάνονται (α) εκτιμητές shrinkage, (β) χρήση παραγωντικών υποδειγμάτων και (γ) περιορισμοί στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου.

**Εκτιμητές Schrinkage**

Η ιδέα της χρήσης ενός shrinkage estimator οφείλεται στους James and Stein (1961), οι οποίοι υποστήριξαν ότι για 3 ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές, το διάνυσμα των πραγματικών μέσων τους μπορεί να εκτιμηθεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των δειγματικών μέσων τους , , και μιας κοινής σταθεράς , , η οποία συνήθως είναι ο διαστρωματικός μέσος όλων των μεταβλητών (grand mean):

για 0<δ<1. Ο εκτιμητής shrinkage «σμικρύνει» τους μέσους προς μια κοινή σταθερά,. Κατά συνέπεια, μειώνει τα ακραία λάθη εκτίμησης των διαστρωματικών μέσων.

Η άριστη τιμή του δ εξαρτάται θετικά από τον αριθμό των αξιογράφων στο χαρτοφυλάκιο, αρνητικά από το μέγεθος του δείγματος (αριθμός παρατηρήσεων) – καθώς αυξάνει η ακρίβεια της εκτίμησης των μέσων – και αρνητικά από την διασπορά των μέσων γύρω από το .

Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και στην εκτίμηση του πίνακα συνδιακύμανσης, Σ:

καθώς επίσης και απευθείας πάνω στα σταθμά του χαρτοφυλακίου:

Με , και *Κ* τον αριθμό των αξιογράφων στο χαρτοφυλάκιο. Εναλλακτικά, το διάνυσμα μπορεί να είναι τα σταθμά του χαρτοφυλακίου της αγοράς ή ενός χαρτοφυλακίου-στόχου (benchmark) του διαχειριστή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε μορφή εκτίμησης shrinkage περιλαμβάνει μια αυθαίρετη επιλογή της σταθεράς δ.

**Παραγοντικά υποδείγματα**

Μια εναλλακτική μέθοδος που αποσκοπεί στην μείωση του στατιστικού λάθος στην κατασκευή χαρτοφυλακίων είναι η χρήση ενός παραγοντικού υποδείγματος αποτίμησης – Sharpe (1963). Τα παραγοντικά υποδείγματα επιβάλλουν περιορισμούς στον πίνακα συνδιακύμανσης των αποδόσεων και, κατά συνέπεια, μειώνουν τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας υποθέσουμε ότι οι αναμενόμενες υπερβάλλουσες αποδόσεις ακολουθούν ένα μονοπαραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης, π.χ. το CAPΜ:

όπου τα διαστρωματικά κατάλοιπα έχουν μηδενική συσχέτιση μεταξύ τους (δηλ. ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι διαγώνιος) και δεν σχετίζονται με τα . Βάζοντας τα Κ σε ένα διάνυσμα β, ο πίνακας συνδιακύμανσης των υπερβαλουσών αποδόσεων είναι:

Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής έγκειται στο ότι μειώνει σημαντικά τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν στον πίνακα Σ σε 3Κ+1 έναντι Κx(Κ+1)/2 χωρίς περιορισμούς. Το μειονέκτημα της μεθόδου αυτής έγκειται στο ότι ένα μονοπαραγοντικό υπόδειγμα δεν μπορεί να εξηγήσει επαρκώς την συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων.

Ο προφανής τρόπος για να ξεπεράσουμε το παραπάνω μειονέκτημα είναι να υποθέσουμε ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης:

όπου είναι ένα διάνυσμα των β και ένα διάνυσμα των Μ παραγόντων κινδύνου. Ο πίνακας συνδιακύμανσης των υπερβαλλουσών αποδόσεων είναι:

όπου Β είναι ένας πίνακας (K x M) και ο πίνακας συνδιακύμανσης των παραγόντων (Μ x M).

Αν οι παράγοντες παρουσιάζουν συσχέτιση μεταξύ τους, ο αριθμός παραμέτρων προς εκτίμηση του Σ είναι Μ(Μ+1)/2 + Κ(Μ+2). Αν οι παράγοντες δεν παρουσιάζουν συσχέτιση μεταξύ τους (δηλ. ο πίνακας είναι διαγώνιος), ο αριθμός παραμέτρων προς εκτίμηση του Σ είναι Μ + Κ(Μ+2). Η μείωση του αριθμού των προς εκτίμηση παραμέτρων είναι σημαντική σε σχέση με την εκτίμηση του πίνακα συνδιακύμανσης των αποδόσεων χωρίς περιορισμούς. Για παράδειγμα, με 500 αξιόγραφα στο χαρτοφυλάκιο και πέντε παράγοντες, ο αριθμός των παραμέτρων είναι 3.515 αν οι παράγοντες έχουν συσχέτιση έναντι 125.000 παραμέτρων χωρίς περιορισμούς.

Η πρακτική δυσκολία στην εφαρμογή του πολυπαραγοντικού υποδείγματος είναι η επιλογή των παραγόντων. Με το θέμα αυτό ασχολείται η θεωρία αποτίμησης αξιογράφων, η οποία προτείνει μια σειρά υποδειγμάτων αποτίμησης όπως το CAPM, Consumption-CAPM, Intertemporal CAPM, APT κλπ.

**Περιορισμοί στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου**

Η τρίτη μέθοδος που αποσκοπεί στην μείωση του στατιστικού λάθος στην κατασκευή χαρτοφυλακίων είναι η χρήση περιορισμών στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου στη διαδικασία βελτιστοποίησης. Οι πιο συνήθεις περιορισμοί είναι περιορισμοί short sales (όλες οι σταθμίσεις να είναι θετικές), περιορισμοί στο μέγιστο ύψος των ατομικών σταθμίσεων (καμία στάθμιση να μην είναι πάνω από χ%) και περιορισμοί στο ύψος της μόχλευσης. Η επιβολή περιορισμών είναι πολύ διαδεδομένη στη πράξη. Όπως και στην περίπτωση του εκτιμητή shrinkage, η επιβολή περιορισμών γίνεται συνήθως αυθαίρετα.

**Κεφάλαιο 5: Χαρτοφυλάκια αντιστάθμισης οικονομικών κινδύνων (στρατηγικά χαρτοφυλάκια)**

Όταν οι επενδυτές αντιμετωπίζουν κινδύνους πέραν του κινδύνου της αγοράς, το άριστο χαρτοφυλάκιο προκύπτει ως η λύση ενός γενικότερου προβλήματος βελτιστοποίησης: μεγιστοποίησε την απόδοση του χαρτοφυλακίου για μια δεδομένη διακύμανση μια δεδομένη συσχέτιση των αποδόσεων με τους παράγοντες κινδύνου. Σύμφωνα με τον Fama (1996), το αποδοτικό όριο που προκύπτει είναι multifactor efficient. Οι επενδυτές επιλέγουν έναν συνδυασμό μεταξύ (α) του αξιογράφου μηδενικού κινδύνου, (β) του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου, και (γ) Μ χαρτοφυλάκια (αμοιβαία κεφάλαια), τα οποία αντισταθμίζουν τους κινδύνους που προκύπτουν από τους Μ παράγοντες (μεταβλητές κατάστασης). Αντί του 2-fund separation, ισχύει το M+2 – fund separation (Θεώρημα Μ+2 αμοιβαίων κεφαλαίων).

Οι σταθμίσεις των αξιογράφων στα χαρτοφυλάκια αντιστάθμισης είναι γραμμικές συναρτήσεις της συσχέτισης των παραγόντων κινδύνου με τις αποδόσεις των αξιογράφων, δηλ. των συντελεστών παλινδρόμησης των παραγόντων κινδύνου πάνω στις αποδόσεις. Οι συντελεστές αυτής της παλινδρόμησης είναι τα σταθμά ενός χαρτοφυλακίου, οι αποδόσεις του οποίου έχουν την υψηλότερη συσχέτιση με τον παράγοντα κινδύνου. Το χαρτοφυλάκιο αυτό ονομάζεται “mimicking portfolio” και είναι ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο για τον συγκεκριμένο κίνδυνο. Η λύση του προβλήματος αυτού είναι παρόμοια με την λύση του Merton για έναν στρατηγικό επενδυτή, ο οποίος επιλέγει χαρτοφυλάκια που τον προστατεύουν από μελλοντικούς κινδύνους που προκύπτουν από μια μεταβλητή κατάστασης.

Για ποιο λόγο να θέλουν οι επενδυτές να προστατευθούν από παράγοντες κινδύνου πέραν του κινδύνου της αγοράς; Υπάρχουν δυο λόγοι. Πρώτον, σύμφωνα με τον Merton, η κατανομή των αποδόσεων είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής κατάστασης. Καθώς αλλαγές αυτής της μεταβλητής κατάστασης μεταβάλουν το «σύνολο των επενδυτικών ευκαιριών» (“investment opportunity set”), οι επενδυτές επιθυμούν προστασία από τέτοιες μεταβολές. Δεύτερον, οι επενδυτές έχουν εισόδημα από εργασία πέραν του εισοδήματος από επενδύσεις. Καθώς σε μια ύφεση είναι πολύ πιθανόν ότι θα μείνουν άνεργοι και θα χάσουν το εισόδημα από εργασία, θέλουν ένα χαρτοφυλάκιο, το οποίο να τους προστατεύει από τον κίνδυνο αυτό. Το χαρτοφυλάκιο αυτό πρέπει να επενδύει σε έναν συνδυασμό αξιογράφων, τα οποία δίνουν υψηλές αποδόσεις σε περιόδους αύξησης της ανεργίας (ύφεσης), έτσι ώστε ο επενδυτής να ισοσταθμίσει την απώλεια εισοδήματος από εργασία. Η όλη τέχνη της αντιστάθμισης κινδύνου είναι να βρούμε ένα χαρτοφυλάκιο με αυτήν την ιδιότητα. Όπως θα δείξουμε σε λίγο, οι επενδυτές είναι διατεθειμένοι να θυσιάσουν ένα μέρος της απόδοσης του χαρτοφυλακίου τους για να προστατευτούν από τέτοιου τύπου κινδύνους.

Θα λύσουμε το πρόβλημα χαρτοφυλακίου για την περίπτωση που υπάρχει ένα αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου. Το πρόβλημα έχει ως εξής:

Οι αποδόσεις των αξιογράφων i=1,2,…,Κ και ο παράγοντας κινδύνου f ακολουθούν από κοινού κανονική κατανομή. Η κατανομή των αποδόσεων ενός οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου p χαρακτηρίζεται πλήρως από την αναμενόμενη απόδοση του, την διακύμανση του, , και την συνδιακύμανση του με το f, *cov*.

Οι επενδυτές επιλέγουν ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση για ένα δεδομένο επίπεδο διακύμανσης ενώ παράλληλα παρέχει προστασία από έναν παράγοντα κινδύνου f (η γενίκευση σε περισσότερους από έναν παράγοντες κινδύνου είναι εύκολη). Η τελευταία ιδιότητα του χαρτοφυλακίου σημαίνει ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου έχουν την υψηλότερη δυνατή συσχέτιση με τον παράγοντα κινδύνου.

Υπάρχει ένα αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου. Κατά συνέπεια, οι επενδυτές έχουν την δυνατότητα να δανείσουν ή να δανειστούν στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι:

Οι επενδυτές επιλέγουν ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο έχει τη μικρότερη διακύμανση (κίνδυνο) με δεδομένη την απόδοση και την συνδιακύμανση με την μεταβλητή κατάστασης. Το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι multifactor efficient, δηλ. είναι mean-variance efficient και επιπλέον παρέχει προστασία από έναν παράγοντα κινδύνου f (η γενίκευση σε περισσότερους από έναν παράγοντες κινδύνου είναι εύκολη). Η τελευταία ιδιότητα του χαρτοφυλακίου σημαίνει ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου έχουν την υψηλότερη δυνατή συσχέτιση με τον παράγοντα κινδύνου.

Το άριστο χαρτοφυλάκιο με αναμενόμενη απόδοση και συνδιακύμανση με το *f* θα είναι η λύση του προβλήματος:

Όπου είναι η συνδιακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου με τον παράγοντα κινδύνου f (και ένα διάνυσμα Kx1 συνδιακύμανσης των αποδόσεων με το f). Οι δυο περιορισμοί σημαίνουν ότι η αναμενόμενη απόδοση είναι δεδομένη και ίση με και η συνδιακύμανση με την f είναι δεδομένη και ίση με .

Το πρόβλημα χωρίς περιορισμούς είναι:

=)-

Όπου και λ οι πολλαπλασιαστές Lagrange.

Το άριστο χαρτοφυλάκιο των στοιχείων με κίνδυνο προκύπτει ως:

(7)

Ο πρώτος όρος στην παραπάνω έκφραση, , είναι το χαρτοφυλάκιο Markowitz. Ο δεύτερος όρος, , είναι το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου (hedging portfolio κατά Merton), δηλ. μια διόρθωση του χαρτοφυλακίου Markowitz για τον κίνδυνο που προκύπτει από τον παράγοντα f. Ο επενδυτής διορθώνει τις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου Markowitz σύμφωνα με την συνδιακύμανση των αποδόσεων με το f.

Οι πολλαπλασιαστές Lagrange δ, λ, προκύπτουν ως η λύση του συστήματος εξισώσεων

(8)

(9)

αν αντικαταστήσουμε στις (8), (9) το w από την εξίσωση (7).

Ο Cochrane (2007) δείχνει ότι , όπου ο γνωστός συντελεστής σχετικής αποστροφής κινδύνου (CRRA) και είναι ο συντελεστής αποστροφής του παράγοντα κινδύνου f (“aversion to state variable risk”). Κατά συνέπεια:

(7’)

Καθώς το είναι το (Κx1) διάνυσμα Β των συντελεστών παλινδρόμησης του f στο διάνυσμα των αποδόσεων R, f = r’B + u, (u ένα τυχαίο λάθος), το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου μπορεί να γραφτεί ως συνάρτηση των β:

(7’’)

To διάνυσμα Β είναι οι σταθμίσεις ενός χαρτοφυλακίου το οποίο έχει την μέγιστη δυνατή συσχέτιση με τον παράγοντα κινδύνου f, καθώς στην παλινδρόμηση ελαχίστων τετραγώνων f = r’B + u, το Β επιλέγεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η διακύμανση του u. Με άλλα λόγια, το r’B είναι η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου το οποίο προσεγγίζει («μιμείται») τον παράγοντα κινδύνου και ονομάζεται “factor-mimicking” χαρτοφυλάκιο. Ο λόγος που οι επενδυτές καταφεύγουν σε ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο για να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο f είναι ότι ο f δεν είναι εμπορεύσιμος, άρα πρέπει να τον αντισταθμίσουν επενδύοντας σε ένα χαρτοφυλάκιο, το οποίο έχει θετική συσχέτιση με το f.

Το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης οικονομικών κινδύνων μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε Μ κινδύνους. Στην περίπτωση αυτή, τo f είναι ένα διάνυσμα (M x 1). Tο διάνυσμα Β γίνεται ένας πίνακας (Κ x M). Η στήλη j (j=1,…,M) του πίνακα περιέχει τα beta των Κ αξιογράφων ως προς τον παράγοντα . Tέλος, το λ γίνεται ένα διάνυσμα (1 x M). Η στήλη j του λ περιέχει τον βαθμό αποστροφής του επενδυτή στον παράγοντα κινδύνου .

Το διαχρονικό CAPM

Από το παραπάνω υπόδειγμα άριστου χαρτοφυλακίου προκύπτει το διαχρονικό CAPM (Intertemporal CAPM ή ICAPM) του Merton. Για να το δούμε αυτό, αρκεί να υποθέσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αγοράς βρίσκεται και αυτό πάνω στο αποδοτικό όριο, δηλ.

και να λύσουμε το υπόδειγμα χαρτοφυλακίου ως προς τις αναμενόμενες αποδόσεις:

Καθώς , προκύπτει:

To υπόδειγμα αυτό είναι το ICAPM. Τα ασφάλιστρο κινδύνου ενός αξιογράφου είναι συνάρτηση της συνδιακύμανσης της απόδοσης του αξιογράφου με την απόδοση της αγοράς καθώς και της συνδιακύμανσης του με τον παράγοντα κινδύνου f. Το υπόδειγμα ICAPM μπορεί εύκολα να γραφτεί σε μορφή beta:

όπου το διάνυσμα των beta των αξιογράφων με την απόδοση της αγοράς, το διάνυσμα των beta των αξιογράφων με το f, η τιμή κινδύνου της αγοράς και η τιμή κινδύνου του f.

Το πολυπαραγοντικό ICAPM

Καθώς το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης οικονομικών κινδύνων μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε Μ κινδύνους, έτσι και το ICAPM μπορεί να γενικευθεί σε ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης. Έστω ότι το f είναι ένα διάνυσμα (M x 1) παραγόντων κινδύνου. Υποθέτοντας ότι το χαρτοφυλάκιο της αγοράς βρίσκεται πάνω στο αποδοτικό όριο και λύνοντας το υπόδειγμα χαρτοφυλακίου ως προς τις αναμενόμενες αποδόσεις, προκύπτει το πολυπαραγοντικό υπόδειγμα ICAPM σε μορφή beta:

όπου το διάνυσμα των beta των αξιογράφων με την απόδοση της αγοράς, ο (KxM) πίνακας των beta των αξιογράφων με τους παράγοντες κινδύνου *f*, η τιμή κινδύνου της αγοράς και το (Mx1) διάνυσμα των τιμών κινδύνου του *f*.

Ενότητα ΙΙ: Αξιολόγηση Χαρτοφυλακίων

Κεφάλαιο 6: Έλεγχος Αποδοτικότητας χαρτοφυλακίου (portfolio efficiency) Ι

Οι συνθήκη 1ου βαθμού του άριστου χαρτοφυλακίου είναι:



Αν οι αποδόσεις είναι πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (υπερβάλλουσες αποδόσεις), τότε η συνθήκη αυτή είναι:



Οι παραπάνω δυο σχέσεις επιβάλλουν ελέγξιμους περιορισμούς στις αποδόσεις με δεδομένες τις σταθμίσεις των χαρτοφυλακίων. Για παράδειγμα, υποθέτοντας ότι το άριστο χαρτοφυλάκιο είναι το χαρτοφυλάκιο αγοράς μπορούμε να ελέγξουμε αν ισχύει το CAPM. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα δεδομένο χαρτοφυλάκιο είναι αποτελεσματικό, δηλ. αν διαφέρει σημαντικά από το άριστο χαρτοφυλάκιο.

Για τον έλεγχο αποτελεσματικότητας πρέπει να ορίσουμε πρώτα την μηδενική υπόθεση. Η μηδενική υπόθεση είναι ότι το χαρτοφυλάκιο e, το οποίο αποτελείται από τα αξιόγραφα 1,…,Κ με σταθμίσεις we είναι αποδοτικό (Η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι το χαρτοφυλάκιο e δεν είναι αποδοτικό). Κάτω από την μηδενική υπόθεση,  Αυτό συνεπάγεται:



όπου  είναι η αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση του χαρτοφυλακίου και  είναι η διακύμανσή του. Η παραπάνω σχέση λέει ότι η υπερβάλλουσα απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι γραμμική συνάρτηση της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου. Ο λόγος υπερβάλλουσας απόδοσης προς διακύμανση είναι ίσος με τον βαθμό αποστροφής κινδύνου του επενδυτή, γ (Τι μας θυμίζει αυτό σε σχέση με τον λόγο του Sharpe;).

Καθώς ο πίνακας συνδιακύμανσης του άριστου χαρτοφυλακίου μπορεί να οριστεί ως:



όπου  είναι το (Κ x 1) διάνυσμα συνδιακύμανσης των Κ υπερβαλουσών αποδόσεων με την απόδοση του χαρτοφυλακίου,

Κατά συνέπεια, παίρνουμε:



όπου  το (K x 1) διάνυσμα των betas των υπερβαλουσών αποδόσεων με την υπερβάλουσα απόδοση του χαρτοφυλακίου. Με άλλα λόγια, οι υπερβάλλουσες αποδόσεις των Κ τίτλων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο είναι όλες μια γραμμική συνάρτηση της υπερβάλλουσας απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Η συνθήκη αυτή χαρακτηρίζει γενικά όλα τα αποδοτικά χαρτοφυλάκια και είναι μια γενίκευση του υποδείγματος CAPM που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Σπάζοντας την συνθήκη σε Κ εξισώσεις, έχουμε:



όπου  = 

Κατά συνέπεια, για να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση ότι το χαρτοφυλάκιο e είναι αποδοτικό, αρκεί να εκτιμήσουμε τις Κ παλινδρομήσεις με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων



και να ελέγξουμε την από κοινού υπόθεση ότι όλα τα  = 0.

Η στατιστική ελέγχου αποδοτικότητας είναι ένας έλεγχος Wald της μηδενικής υπόθεσης  = 0 για όλα τα i:



όπου  είναι το (Κ x 1) διάνυσμα των περιορισμών στις σταθερές α της παλινδρόμησης.

Intersection και Spanning I

Οι όροι intersection και spanning αναφέρονται σε δυο σημαντικές ιδιότητες χαρτοφυλακίων.

**Spanning:**

Ένα χαρτοφυλάκιο A που αποτελείται από N αξιόγραφα λέγεται ότι περικλείει (spans) ένα μικρότερο χαρτοφυλάκιο Β, το οποίο περιλαμβάνει μόνο N1 από τα Ν αξιόγραφα (N > N1) αν τα αποδοτικά όρια των δύο χαρτοφυλακίων συμπίπτουν.

Με άλλα λόγια, προσθέτοντας N-N1 αξιόγραφα στο χαρτοφυλάκιο Β δεν οδηγεί σε ένα χαρτοφυλάκιο με υψηλότερη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου. Το μικρότερο χαρτοφυλάκιο Β μπορεί να αναπαράγει τις ιδιότητες του μεγαλύτερου χαρτοφυλακίου Α. Αυτό συμβαίνει όταν τα N-N1 αξιόγραφα που περιλαμβάνονται επιπλέον στο χαρτοφυλάκιο Α είναι, ως ομάδα, αξιόγραφα με πολύ κοινά χαρακτηριστικά (σε όρους αποδόσεων και κινδύνου) με τα αξιόγραφα του χαρτοφυλακίου Β.

Το χαρτοφυλάκιο Β δεν περικλείει το χαρτοφυλάκιο Α αν προσθέτοντας τα N-N1 αξιόγραφα παίρνουμε ένα χαρτοφυλάκιο Α με ανώτερα χαρακτηριστικά σε όρους αποδόσεων ανά μονάδα κινδύνου. Αυτό συμβαίνει όταν τα N-N1 αξιόγραφα που περιλαμβάνονται επιπλέον στο χαρτοφυλάκιο Α είναι ως ομάδα αξιόγραφα με διαφορετικά χαρακτηριστικά (σε όρους αποδόσεων και κινδύνου) από τα αξιόγραφα του χαρτοφυλακίου Β.



Διάγραμμα 6: Spanning χαρτοφυλακίων Α και Β (Β spans Α)

Σημείωση: Spanning σημαίνει ότι τα αποδοτικά όρια των δύο χαρτοφυλακίων συμπίπτουν σε όλα τα σημεία.

**Intersection:**

Τομή (Intersection) είναι μια ιδιότητα χαρτοφυλακίων παρόμοια με την ιδιότητα του Spanning με την διαφορά ότι αναφέρεται σε χαρτοφυλάκια για έναν επενδυτή με συγκεκριμένο βαθμό αποστροφής κινδύνου.

Αν δυο χαρτοφυλάκια Α και Β τέμνονται για ένα συγκεκριμένο βαθμό αποστροφής κινδύνου, η, τότε επενδυτές με την συγκεκριμένη αποστροφή κινδύνου είναι αδιάφοροι μεταξύ των δυο χαρτοφυλακίων. Με άλλα λόγια, προσθέτοντας N-N αξιόγραφα στο χαρτοφυλάκιο Β δεν οδηγεί σε ένα χαρτοφυλάκιο Α με ανώτερα χαρακτηριστικά σε όρους αποδόσεων ανά μονάδα κινδύνου.



Διάγραμμα 7: Τομή (intersection) χαρτοφυλακίων Α και Β (το Β τέμνει το Α)

**Εφαρμογές:**

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι οι ιδιότητες intersection και spanning έχουν εφαρμογές τόσο στην επιλογή χαρτοφυλακίου (π.χ. για να απαντήσουμε στο ερώτημα αν αξίζει για έναν επενδυτή να πάρει μια η περισσότερες επιπλέον μετοχές στο χαρτοφυλάκιό του) όσο και στην κατασκευή χαρτοφυλακίων που μιμούνται άλλα χαρτοφυλάκια, π.χ. στην κατασκευή των λεγόμενων index trackers. Τα index trackers είναι χαρτοφυλάκια τα οποία μιμούνται την συμπεριφορά χρηματιστηριακών δεικτών. Το πλεονέκτημά τους είναι ότι αποτελούνται από έναν μικρό αριθμό τίτλων σε σχέση με τους δείκτες τους οποίους μιμούνται.

Στη συνέχεια, θα εξηγήσουμε τις ιδιότητες intersection και spanning με ένα παράδειγμα. Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς, θα εξετάσουμε καταρχήν ένα χαρτοφυλάκιο με 2 αξιόγραφα (μετοχές). Στο επόμενο κεφάλαιο θα γενικεύσουμε το πρόβλημα σε περισσότερα αξιόγραφα.

|  |
| --- |
| Εφαρμογή: Έλεγχος intersection και spanning (DAX vs S&P500) |
| Ας υποθέσουμε ότι ένας γερμανός επενδυτής ο οποίος επενδύει στον DAX σκέφτεται να επενδύσει ένα μέρος του κεφαλαίου του στον S&P500. Πέρα από τον κίνδυνο του χρηματιστηρίου, ο επενδυτής αντιμετωπίζει συναλλαγματικό κίνδυνο στο δολάριο καθώς πρέπει να μετατρέψει τις αποδόσεις του χρηματιστηρίου των ΗΠΑ σε ευρώ. Η απόδοση του S&P500 σε ευρώ ισούται με το άθροισμα της απόδοσης του S&P500 σε δολάρια και του ρυθμού υποτίμησης του ευρώ έναντι του δολαρίου.  Οι αναμενόμενες αποδόσεις και τυπικές αποκλίσεις δίδονται στον παρακάτω πίνακα.  Πίνακας: Αποδόσεις και κίνδυνος   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | Απόδοση | Τυπική Απόκλιση | | DAX | 23% | 17% | | S&P500 [USD] | 20% | 15% | | USD/EUR | -0.3% | 12.5% | | S&P500 [EUR] | 19.7% | 20% | | Συντελεστής συσχέτισης |  |  | |  | 0.47 |  | |

|  |
| --- |
| Εφαρμογή: Έλεγχος intersection και spanning (DAX vs S&P500) -- συνέχεια |
| Ο δείκτης S&P500 μεταφρασμένος σε ευρώ, S&P500[EUR], έχει μικρότερη αναμενόμενη απόδοση και μεγαλύτερη τυπική απόκλιση (κίνδυνο) από τον δείκτη DAX. Εκ πρώτης όψεως ο επενδυτής δεν πρέπει να επενδύσει στον S&P500, καθώς αυτό φαίνεται ότι θα οδηγήσει σε ένα χαρτοφυλάκιο με χαμηλότερη απόδοση και υψηλότερο κίνδυνο. Όμως, το συμπέρασμα αυτό είναι λάθος. Ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου μπορεί να είναι χαμηλότερος καθώς η συσχέτιση μεταξύ των δυο δεικτών είναι χαμηλή.  Ας θυμηθούμε ότι οι σταθμίσεις του άριστου χαρτοφυλακίου με δυο αξιόγραφα δίδονται ως:  Κατά συνέπεια:    Αν δεν άξιζε να επενδύσουμε στον S&P500, τότε η στάθμιση του S&P500 στο άριστο χαρτοφυλάκιο θα έπρεπε να είναι μηδέν, |

|  |
| --- |
| Εφαρμογή: Έλεγχος intersection και spanning (DAX vs S&P500) -- συνέχεια |
| Κατά συνέπεια:    Από την πρώτη γραμμή του συστήματος εξισώσεων μπορούμε να υπολογίσουμε το ποσοστό του χαρτοφυλακίου που πρέπει να επενδύσουμε στον DAX:  Από την δεύτερη γραμμή παίρνουμε την συνθήκη που πρέπει να ισχύει αν δεν αξίζει να επενδύσουμε στον S&P500:    Αντικαθιστώντας για  , παίρνουμε:    και λύνοντας ως προς την απόδοση, καταλήγουμε στην εξίσωση:    Ο λόγος  είναι ο συντελεστής παλινδρόμησης (beta) της απόδοσης του S&P500 στην απόδοση του DAX. |

|  |
| --- |
| Εφαρμογή: Έλεγχος intersection και spanning (DAX vs S&P500) -- συνέχεια |
| Κατά συνέπεια, για να ελέγξουμε τον περιορισμό , εκτιμούμε την παλινδρόμηση    με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και ελέγχουμε τον περιορισμό  Κάτω από την μηδενική υπόθεση , ο περιορισμός ισχύει.  Όπως δείξαμε ήδη, ο πολλαπλασιαστής Lagrange εξαρτάται από τον βαθμό αποστροφής κινδύνου:  όπου Α και Β είναι δυο σταθερές (efficient set constants). Κατά συνέπεια, με δεδομένο γ, μπορούμε να υπολογίσουμε το η και να ελέγξουμε την υπόθεση του Intersection ως  για ένα συγκεκριμένο η. Επίσης, μπορούμε να ελέγξουμε την υπόθεση του spanning ως  για κάθε η.  Intersection: Ελέγχουμε την συνθήκη  για ένα συγκεκριμένο η.  Spanning: Ελέγχουμε την  για όλα τα η, δηλ.:  .  Η συνθήκη αυτή στην παλινδρόμηση  είναι: |

Intersection και Spanning όταν υπάρχει ένα αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου

Αν οι επενδυτές μπορούν να δανειστούν και να επενδύσουν σε ένα αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου με επιτόκιο (απόδοση)  η παραπάνω ανάλυση απλοποιείται σημαντικά. Παραπάνω δείξαμε ότι το η είναι η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου με μηδενικό beta. Το αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη. Θέτοντας  μπορούμε να ελέγξουμε intersection και spanning για χαρτοφυλάκια επενδυτών με πρόσβαση στο αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου ορίζοντας το πρόβλημα σε όρους υπερβαλουσών αποδόσεων. Για τέτοια χαρτοφυλάκια, η συνθήκη άριστου χαρτοφυλακίου μπορεί να γραφτεί ως:  όπου  είναι το διάνυσμα των υπερβαλουσών αποδόσεων.

Επομένως, intersection και spanning μπορούν να ελεγχθούν εκτιμώντας την παλινδρόμηση



όπου  και  είναι υπερβάλλουσες αποδόσεις πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, και ελέγχοντας την μηδενική υπόθεση

1.  (intersection), και

2.   (spanning).

|  |
| --- |
| Εφαρμογή: Έλεγχος intersection και spanning (DAX vs S&P500) -- συνέχεια |
| Intersection: Ας επανέλθουμε στο παράδειγμα του γερμανού επενδυτή. Με ένα επιτόκιο μηδενικού κινδύνου 2%,  Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα για τις αναμενόμενες αποδόσεις, τον κίνδυνο και τον συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των δυο δεικτών, μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθμίσεις του άριστου χαρτοφυλακίου:    όπου  είναι η ορίζουσα του πίνακα . Η παράμετρος  καθορίζεται από την σχέση: |

|  |
| --- |
| Εφαρμογή: Έλεγχος intersection και spanning (DAX vs S&P500) -- συνέχεια |
| . Από τα δεδομένα μας, Α=0.5447, Β=0.1081. Άρα, για  η αποστροφή κινδύνου είναι . Αντικαθιστώντας για  έχουμε:    Διαιρώντας τις σταθμίσεις με το άθροισμά τους (1.112), παίρνουμε το άριστο χαρτοφυλάκιο:    Ο επενδυτής θα έπρεπε να επενδύσει ένα ποσοστό 24% του χαρτοφυλακίου του στον S&P500. Παρότι το ποσοστό αυτό είναι οικονομικά σημαντικό, δεν γνωρίζουμε ακόμη αν είναι στατιστικά σημαντικό. Στη συνέχεια θα ελέγξουμε αν μια έκθεση 24% στον S&P500 είναι και στατιστικά σημαντική, δηλ. αν ο επενδυτής, επενδύοντας ένα ποσοστό 24% στον S&P500, αναμένεται να αλλάξει σημαντικά την απόδοση ανά μονάδα κινδύνου του χαρτοφυλακίου του. Θα χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο intersection.  O έλεγχος στηρίζεται στην παλινδρόμηση:    Η εκτίμηση της παλινδρόμησης με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων δίνει:    Με α=2.9\*10-4 , β=0.55 και  έχουμε . Είναι το 0.44 στατιστικά διαφορετικό του μηδενός; Για να το ελέγξουμε αυτό, χρειαζόμαστε την διακύμανση του . Καθώς η έκφραση αυτή είναι ένας γραμμικός συνδυασμός δυο τυχαίων μεταβλητών (α και β), χρειαζόμαστε τον πίνακα συνδιακύμανσης των (α και β). |

|  |
| --- |
| Εφαρμογή: Έλεγχος intersection και spanning (DAX vs S&P500) -- συνέχεια |
| Η εκτίμηση του  είναι 0.44. H διακύμανση είναι:    Η τυπική απόκλιση είναι  =0.31. Κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας, το διάστημα εμπιστοσύνης 95% γύρω από την εκτίμηση είναι (0.44-2\*0.31, 0.44+2\*0.31) = (-0.18, 1.06). Κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση , δηλ. την υπόθεση του intersection. Με άλλα λόγια, ο επενδυτής δεν θα έχει σημαντικά αποτελέσματα διαφοροποίησης αν συμπεριλάβει και τον S&P500 στο χαρτοφυλάκιο του.  Spanning: Η μηδενική υπόθεση του spanning ισχύει αν β=1 και α=0. Για να ελέγξουμε αυτήν την υπόθεση, κάνουμε πάλι χρήση της κανονικότητας των εκτιμητών ελαχίστων τετραγώνων.  Η μηδενική υπόθεση μπορεί να ελεγχθεί με την χρήση της στατιστικής Wald:    Η κριτική τιμή της κατανομής χ2 με 2 βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας 5% είναι 3.84. Κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση του spanning. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει στατιστική ένδειξη ότι συμπεριλαμβάνοντας τον S&P500 στο χαρτοφυλάκιο οδηγεί σε ένα χαρτοφυλάκιο με υψηλότερη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου. Αυτό ισχύει για όλους τους επενδυτές ανεξάρτητα από τον βαθμό αποστροφής κινδύνου. |

Κεφάλαιο 7: Έλεγχος Αποδοτικότητας χαρτοφυλακίου (portfolio efficiency) ΙΙ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γενικεύσουμε τους στατιστικούς ελέγχους για intersection και spanning σε χαρτοφυλάκια με περισσότερα από δυο αξιόγραφα. Έστω ένα σετ Μ αξιογράφων (Μ=Κ+Ν) με διάνυσμα αποδόσεων  Ο επενδυτής επενδύει σε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από τα πρώτα Κ αξιόγραφα. Το πρόβλημα του επενδυτή είναι αν αξίζει να επενδύσει στα υπόλοιπα Ν αξιόγραφα. Θέλουμε λοιπόν να ελέγξουμε αν συμπεριλαμβάνοντας τα Ν επιπλέον αξιόγραφα στο χαρτοφυλάκιο αυξάνει την απόδοση ανά μονάδα κινδύνου του χαρτοφυλακίου.

Υπενθυμίζουμε ότι το άριστο χαρτοφυλάκιο στα Μ αξιόγραφα δίδεται ως:  , όπου  και  είναι διανύσματα (Μ x 1). Έστω το (Κ x 1) διάνυσμα αποδόσεων των πρώτων Κ αξιογράφων και  το (Ν x 1) διάνυσμα αποδόσεων των υπολοίπων Ν αξιογράφων (όπου Κ+Ν=Μ) και. Αν το άριστο χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει μόνο τα πρώτα Κ αξιόγραφα, τότε:



Η συνθήκη αυτή μπορεί να ελεγχθεί ως ένας περιορισμός στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης άριστου χαρτοφυλακίου . Θα διακρίνουμε πάλι μεταξύ δυο ελέγχων: τον έλεγχο για intersection και τον έλεγχο για spanning.

|  |
| --- |
| Εφαρμογή: Έλεγχος intersection και spanning (US & GE vs G5) |
| Έστω ότι ο επενδυτής κρατάει ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από τους χρηματιστηριακούς δείκτες των ΗΠΑ (US) και της Γερμανίας (GE) και ενδιαφέρεται να συμπεριλάβει στο χαρτοφυλάκιο του και τις υπόλοιπες τρεις αγορές των G5, δηλ. Ηνωμένο Βασίλειο (UK), Γαλλία (FR) και Ιαπωνία (JP). Ο περιορισμός που πρέπει να ελέγξουμε είναι:    Η συνθήκη άριστου χαρτοφυλακίου είναι:  Σπάζοντας το διάνυσμα (Μ x1) σε δυο διανύσματα (K x 1) και (N x 1), παίρνουμε:    Από την πρώτη γραμμή της συνθήκης αυτής μπορούμε να καθορίσουμε το  ως: |

|  |
| --- |
| Εφαρμογή: Έλεγχος intersection και spanning (US & GE vs G5) – συνέχεια |
| Αντικαθιστώντας στην δεύτερη γραμμή της συνθήκης, βρίσκουμε:    Αν η συνθήκη αυτή ικανοποιείται μόνο για μια τιμή η (γ), υπάρχει intersection, δηλ. το χαρτοφυλάκιο (US, GE, UK, FR, JP) δεν υπερισχύει σε όρους απόδοσης ανά μονάδα κινδύνου του μικρότερου χαρτοφυλακίου (US, GE) για τον επενδυτή που χαρακτηρίζεται από τον συγκεκριμένο βαθμό αποστροφής κινδύνου γ (ή για τον επενδυτή ο οποίος μπορεί να δανειστεί και να επενδύσει στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου η).  Αν η συνθήκη ικανοποιείται για κάθε τιμή η (γ), υπάρχει spanning:    Spanning σημαίνει ότι το αποδοτικό όριο των Κ αξιογράφων συμπίπτει με το αποδοτικό όριο των Κ+Ν αξιογράφων. Με άλλα λόγια το χαρτοφυλάκιο των Κ αξιογράφων είναι αποδοτικό και επεκτείνοντας το χαρτοφυλάκιο σε Ν επιπλέον αξιόγραφα δεν δίνει υψηλότερη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου. Στο παράδειγμα μας, το χαρτοφυλάκιο (US, GE, UK, FR, JP) δεν υπερισχύει σε όρους απόδοσης ανά μονάδα κινδύνου του μικρότερου χαρτοφυλακίου (US, GE) για οποιονδήποτε επενδυτή. |

Έλεγχος intersection και spanning με πολλά αξιόγραφα

Για να ελέγξουμε intersection και spanning με χαρτοφυλάκια που περιέχουν πολλά αξιόγραφα, πρέπει να εκτιμήσουμε το σύστημα παλινδρομήσεων (ως Seemingly Unrelated Regressions, SUR):



όπου α και Β είναι διανύσματα (Κ x 1) και (K x N) αντίστοιχα.

Η υπόθεση του Intersection είναι η μηδενική υπόθεση:  δηλ. 

Η υπόθεση του Spanning είναι η μηδενική υπόθεση:   δηλ.  και 

Η υπόθεση του Intersection μπορεί να ελεγχθεί με το στατιστικό Wald:



όπου V είναι ο πίνακας συνδιακύμανσης των  Καθώς η W ακολουθεί κατανομή χ2 με Ν βαθμούς ελευθερίας, δεν μπορούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση αν το W είναι μικρότερο από την κριτική τιμή της χ2 (Ν). Ο έλεγχος αυτός είναι σε όρους άλφα του Jensen.

Οι Jobson και Korkie (1984) δείχνουν ότι  και , όπου  και  είναι οι υπερβάλλουσες αποδόσεις ανά μονάδα κινδύνου (Sharpe ratios) των χαρτοφυλακίων Κ και Κ+Ν αντίστοιχα. Η δεύτερη εξίσωση μας λέει ότι η διαφορά του λόγου Sharpe του διευρυμένου χαρτοφυλακίου από το αρχικό χαρτοφυλάκιο των Κ αξιόγραφων είναι το εσωτερικό γινόμενο των άλφα του Jensen σταθμισμένων με τον πίνακα συνδιακύμανσης τους.

Κατά συνέπεια,



δηλ. ο έλεγχος για intersection μπορεί να εκφραστεί σε όρους υπερβαλλουσών αποδόσεων ανά μονάδα κινδύνου, ως:



Ο έλεγχος αυτός ακολουθεί την κατανομή .

Για να ελέγξουμε για spanning, χρησιμοποιούμε το στατιστικό Wald:



όπου q είναι το (2 x N) διάνυσμα των (α,Β) και V είναι ο πίνακας των συνδιακυμάνσεων τους. Το W ακολουθεί την .

**Βιβλιογραφία**

Britten-Jones M. (1999), The Sampling Error in Estimates of Mean-Variance Efficient Portfolio Weights, Journal of Finance, 54-2, pp. 655-671.

Campbell J. H., Lo A. W., MacKinlay A. C. (1997), The Econometrics of Financial Markets (2nd edition), Princeton.

Cochrane, John (2007) Portfolio Theory (manuscript). https://static1.squarespace.com/static/5e6033a4ea02d801f37e15bb/t/5eea90f450fe2217c06c7733/1592430837752/portfolio\_text.pdf

De Roon, Frans and Nijman Theo (2001) Testing for mean-variance spanning: A survey. Journal of Empirical Finance, vol. 8, pp. 111-156.

French K. R. and Poterba J.M. (1991), Investor Diversification and International Equity Markets, American Economic Review, 81-2, pp. 222-226.

Gibbons M.R. (1982), Multivariate Tests of Financial Models: A New Approach, Journal of Financial Economics, 10, pp. 3-28.

Gibbons M.R., Ross S.A. and Shanken J. (1989), A Test of the Efficiency of a Given Portfolio, Econometrica, 57-5, pp. 1121-1152.

James W. and C. Stein (1961), Estimation with quadratic loss. In: Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics and Statistics, pp. 361-379.

Jobson J.D. and Bob Korkie (1989) A performance interpretation of multivariate tests of asset set intersection, spanning and mean-variance efficiency. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 24, pp. 185-204.

Fama, Eugene (1996), Multifactor portfolio efficiency and multifactor asset pricing. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 31(4), 441-465.

Gibbons, Michael, Steven Ross and Jay Shanken (1989) A test of the efficiency of a given portfolio. Econometrica, vol. 57, pp. 1121-1152.

Kandel S. (1984), The Likelihood Ratio Test Statistic of Mean-Variance Efficiency without a Riskless Asset, Journal of Financial Economics, 13, pp. 575-592.

MacKinlay A.G. (1987), On Multivariate Tests of the CAPM, Journal of Financial Economics, 18, pp. 341-371.

MacKinlay A.G. and Richardson M.P. (1991), Using Generalized Method of Moments to Test Mean-Variance Efficiency, Journal of Finance, 46-2, pp. 511-527.

Markowitz H. (1952), Portfolio Selection, Journal of Finance, 7-1, pp. 77-91.

Shanken J. (1985), Multivariate Tests of the Zero-Beta CAPM, Journal of Financial Economics, 14, pp. 327-348.

Shanken Jay (1986) Testing portfolio efficiency when the zero-beta rate is unknown: A note. Journal of Finance, vol. 41, pp. 269-276.

Michaud, R.O. (1989), The Markowitz optimization enigma: Is optimized optimal?, Financial Analyst Journal 45, pp. 31-42.

Shanken J. (1986), Testing Portfolio Efficiency when the Zero Beta is Unknown: A Note, Journal of Finance, 41-1, pp. 269-276.

Sharpe, W. (1963), A simplified model for portfolio analysis. Management Science 9, pp. 277-293.

1. Υποθέτουμε ότι . Διαφορετικά, ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι: [↑](#footnote-ref-1)