Θεωρία Χαροφυλακίου

Οι Τιμές και οι Αποδόσεις των Περιουσιακών Στοιχείων

Εισαγωγή

Στο δεύτερο μέρος του βιβλίου θα ασχοληθούμε με την θεωρία χαρτοφυλακίου (portfolio theory). Όταν χρησιμοποιούμε τον όρο "χαρτοφυλάκιο" αυτό πού εννοούμε είναι ένα σύνολο/καλάθι από περιουσιακά στοιχεία (assets) κάποια από τα οποία ενέχουν ρίσκο (risky assets) και κάποια όχι (risk-free assets). Το κλασικό παράδειγμα ένος asset με ρίσκο είναι μιά μετοχή. Ποιό είναι το ρίσκο της μετοχής? Να πέσει η τιμή της και να υποχρεωθούμε να την πουλήσουμε με ζημιά. Αντίθετα, ένα asset χωρίς ρίσκο συνήθως θεωρείται το (κρατικό) ομόλογο πού εκδίδει μια μεγάλη και αξιόπιστη χώρα, όπως οι Ηνωμένες Πολιτείες ή η Γερμανία. Πράγματι, αν καποιος επενδυτής αγοράσει σήμερα ένα δεκαετές ομόλογο του Αμερικανικού δημοσίου μπορεί να είναι πρακτικά σίγουρος ότι μετά από δέκα χρόνια θα πάρει πίσω το κεφάλαιο πού επένδυσε. Φυσικά μπορεί να πουλήσει το ομόλογο στη δευτερογενή αγορά ομολόγων νωρίτερα από τη λήξη του, δηλαδή νωρίτερα από τα δέκα χρόνια. Σε αυτή τη περίπτωση όμως διατρέχει το κίνδυνο τα επιτόκια τη στιγμή πού επιθυμεί να πουλήσει το ομόλογο του να έχουν αυξηθεί και κατά συνέπεια η τιμή του ομολόγου του στη δευτερογενή αγορά να είναι μικρότερη από την τιμή αγοράς του ομολόγου. Σε αυτή τη περίπτωση, αν ο επενδυτής έχει απόλυτη ανάγκη τα χρήματα θα υποχρεωθεί να πουλήσει το ομόλογο του με ζημιά. Μιά άλλη κατηγορία assets με κίνδυνο είναι τα εταιρικά ομόλογα, ιδίως τα ομόλογα εταιριών με χαμηλή πιατοληπτική διαβάθμιση. Μιά επιχείρηση μπορεί, προκειμένου να δανειστεί, να εκδώσει ένα ομόλογο (εταιρικό ομόλογο) το οποίο έχει μιά συγκεκριμένη απόδοση συνήθως μεγαλύτερη από την απόδοση τού αντίστοιχου κρατικού ομολόγου. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η μεγαλύτερη απόδοση πού προσφέρει το εταιρικό ομόλογο δεν οφείλεται στην μεγαλοθυμία του εκδότη να προσφέρει υψηλότερες αμοιβές στον δανειστή του. Η αυξημένη απόδοση είναι το δέλεαρ ποροκειμένου οι επενδυτές να επωμιστούν το αυξημένο ρίσκο πού ενέχει ο δανεισμός μιάς αμφίβολης (ως προς την ικανότητα της να αποπληρώσει τα χρέη της) επιχείρησης.

Γενικά, στην ανάπτυξη της θεωρίας στα επόμενα κεφάλαια θα χρησιμοποιούμε τον όρο "asset με ρίσκο" προκειμένου να αναφερθούμε σε οποιαδήποτε μορφή επένδυσης στην οποία η απόδοση είναι αβέβαιη και τον όρο "asset χωρίς ρίσκο" προκειμένου να μιλήσουμε για οποιοδήποτε asset του οποίου η απόδση είναι σίγουρη.

Είναι μάλλον προφανές ότι το πρόβλημα του επενδυτή, το οποίο σε πολύ αδρές γραμμές αφορά την επιλογή των assets στα οποία θα επενδύση τον πλούτο του είναι ένα πρόβλημα επιλογής σε καθεστώς αβεβαιότητας. Ο επενδυτής έχει ένα σύνολο επιλογών (π.χ. διαφορετικά χαρτοφυλάκια) από το οποίο σύνολο καλείται να επιλέξει κάποιο συγκεκριμένο. Ποιό είναι το κριτήριο επιλογής το οποίο ο επενδυτής θα υιοθετήσει προκειμένου να κάνει την επιλογή του? Η απάντηση δεν πρέπει να μας εκπλήξει. Πράγματι, το ενδεδειγμένο κριτήριο είναι αυτό της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης χρησιμότητας το οποίο αναλύσαμε εκτενώς στο πρώτο τμήμα του βιβλίου. Κατά συνέπεια, η θεωρία χαρτοφυλακίου την οποία θα αναπτύξουμε στο παρόν τμήμα του βιβλίου μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει ως θεωρητική βάση την θεωρία αποφάσεων σε καθεστώς αβεβαιότητας πού αναπτύξαμε παραπάνω. Ειδικότερα, η ανάλυση του κεφαλαίου 4 θα αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμη στην ανάπτυξη της θεωρίας χαρτοφυλακίου.

Πριν προχωρήσουμε στην θεωρία χαρτοφυλακίου, θα πρέπει να γνωρίσουμε καλά τις μαθηματικές και εμπειρικές οντότητες πού θα εμπλακούν στην ανάλυση. Η πιό βασική μεταβλητή στην όλη συζήτηση θα είναι η επονομαζόμενη "απόδοση" του περιουσιακού στοιχείου (asset return). Η απόδοση, R_{it}, ενός asset i μεταξύ δύο περιόδων $t-1$ και t ορίζεται, γενικά ως η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής του asset μεταξύ των δύο αυτών περιόδων. Συγκεκριμένα, έστω ότι P_{it-1} και P_{it} είναι η τιμή του asset στο τέλος των χρονικών στιγμών $t-1$ και t αντίστοιχα. Τότε η απόδοση του asset i ορίζεται ως

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} \qquad \#$$

ή αν θέλουμε να την εκφράσουμε ως ποσοστό επι τοις εκατό,

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} \times 100. \qquad \#$$

Στη περίπτωση πού το asset είναι μιά μετοχή, υπάρχει περίπτωση ο επενδυτής να λαμβάνει και κάποιο μέρισμα, d_{it}, μεταξύ του τέλους της χρονικής στιγμής $t-1$ και του τέλους της χρονικής στιγμής t. Σε αυτή τη περίπτωση, η απόδοση R_{it}, τού asset i οφείλει να συμπεριλάβει και το μέρισμα πού λαμαβάνει ο επενδυτής. Ως εκ τούτου η R_{it} ορίζεται ως

$$R_{it} = \frac{d_{it} + (P_{it} - P_{it-1})}{P_{it-1}} = \frac{d_{it}}{P_{it-1}} + \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Οι συνήθεις χρονικές περίοδοι, t, πού χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό των αποδόσεων των assets είναι η μέρα, η εβδομάδα, ο μήνας, το τρίμηνο και το έτος. Ως εκ τούτου αναφερόμαστε σε ημερήσιες, εβδομαδιαίες, μηνιαίες, τριμηνιαίες και ετήσιες αποδόσεις, αντίστοιχα.

(ii) Στη πράξη και για λόγους ευκολίας συχνά η απόδοση του asset i υπολογίζεται με τον προσεγγιστικό τύπο (ref: ret1) αντί του ορθότερου (ref: ret3). Ο λόγος είναι ότι οι μεταβολές της τιμής (δηλαδή τα κεφαλαιουχικά κέρδη ή ζημιές) είναι συνήθως πού μεγαλύτερα της μερισματικής απόδοσης και αποτελούν την κύρια συνιστώσα των αποδόσεων.

Ένας άλλος προσεγγιστικός τύπος για τον υπολογισμό της απόδοσης R_{it} εμπλέκει τον λογάριθμο της τιμής του asset. Πράγματι ισχύει ότι η απόδοση R_{it} προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την διαφορά των λογαρίθμων $\ln(P_{it})$ και $\ln(P_{it-1})$ των τιμών P_{it} και P_{it-1} αντίστοιχα. Συμβολίζοντας τον λογάριθμο της P_{it} με p_{it} και τον λογάριθμο της P_{it-1} με p_{it-1}, έχουμε

$$R_{it} \approx \widetilde{R}_{it} = \ln(P_{it}) - \ln(P_{it-1}) = p_{it} - p_{it-1}. \qquad \#$$

Ο λόγος πού χρησιμοποιούμε ενίοτε τη λογαριθμική διαφορά των τιμών προκειμένου να προσεγγίσουμε την απόδοση θα αναλυθεί αργότερα. Οι αποδόσεις $\widetilde{R}_{it}$ πού υπολογίζονται μέσω της (ref: ret4) θα ονομάζονται "λογαριθμικές αποδόσεις". Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις τιμές της μετοχής της εταιρείας Apple (εισηγμένη στο Χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης) γιά τούς μήνες Φεβρουάριο, Μάρτιο και Απρίλιο του έτους 1990 (τιμές πού διαμορφώθηκαν στο τέλος του αντίστοιχου μήνα). Από τις τιμές αυτές υπολογίζουμε τις μηνιαίες αποδόσεις για τούς μήνες Μάρτιο και Απρίλιο με βάση τούς τύπους (ref: ret1) και (ref: ret4).

Πίνακας 1

Μήνας	Τιμή	Απόδοση σύμφωνα με (ref: ret1)	Απόδοση σύμφωνα με (ref: ret4)
Φεβρουάριος 1990	1.21	-	-
Μάρτιος 1990	1.43	0.181	0.167
Απρίλιος 1990	1.40	-0.021	-0.021

Από τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι όντως η λογαριθμική προσέγγιση (ref: ret4) δίνει αποτελέσματα πολύ κοντά στα πραγματικά.

Το επόμενο ερώτημα πού θα θέσουμε, (και στο οποίο θα επιστρέψουμε αργότερα) είναι το πώς συνδέονται οι αποδόσεις μιάς μετοχής σε μιά "μεγάλη" χρονική περίοδο (π.χ. μήνας) με τις αποδόσεις της ίδιας μετοχής σε μιά μικρότερη χρονική περίοδο (π.χ. ημέρα). Έστω ότι R_{it} συμβολίζει τις μηνιαίες αποδόσεις της μετοχής i, το οποίο σημαίνει ότι ο χρονικός δείκτης t συμβολίζει μήνες. Έστω επίσης r_{is} να είναι οι ημερήσιες αποδόσεις της μετοχής i, το οποίο σημαίνει ότι ο χρονικός δείκτης s συμβολίζει ημέρες. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των μεταβλητών R_{it} και r_{is}. Προκειμένου να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, ας σκεφτούμε ως εξής: Έστω ότι βρισκόμαστε στο τέλος του μήνα $t-1$ (π.χ. Δεκέμβριος) καί θέλουμε να επενδύσουμε ένα ευρώ στη μετοχή i. Στο τέλος του μήνα t (Ιανουάριος) το ένα ευρώ θα έχει γίνει $1+R_{it}$ όπου R_{it} είναι η μηνιαία απόδοση της μετοχής i. Αν για παράδειγμα η απόδοση είναι θετική και ίση με 0.023 στο τέλος Ιανουαρίου θα έχουμε 1.023 ευρώ. Αντίθετα, αν είναι αρνητική και ίση με -0.015 στο τέλος του μήνα το αρχικό μας ευρώ θα έχει γίνει 0.985 ευρώ. Στη συνέχεια ας στρέψουμε την προσοχή μας στις ημερήσιες αποδόσεις. Ας υποθέσουμε ότι από το τέλος Δεκεμβρίου ($t-1$) έως το τέλος Ιανουαρίου (t) υπάρχουν είκοσι εργάσιμες ημέρες για το χρηματιστήριο. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε μέρα αντιστοιχεί και μιά ημερήσια απόδοση $r_{is},\ s=1,2,\ldots,20$. Στο τέλος της πρώτης ημέρας το αρχικό μας ένα ευρώ θα έχει γίνει $1+r_{i1}$. Αυτό σημαίνει ότι το νέο μας κεφάλαιο προς επένδυση τη δεύτερη μέρα δεν θα είναι ένα ευρώ αλλά $1+r_{i1}$. Άρα την δεύτερη μέρα έχουμε επενδύσει $1+r_{i1}$ και η απόδοση στο τέλος της δεύτερης ημέρας είναι r_{i2}. Κατά συνέπεια στο τέλος της δεύτερης ημέρας το συνολικό μας κεφάλαιο θα ανέρχεται σε

$$(1+r_{i1})(1+r_{i2}).$$

Με την ίδια λογική στο τέλος της εικοστής ημέρας, δηλαδή στο τέλος του μήνα το αρχικό μας ένα ευρώ θα έχει γίνει

$$(1+r_{i1})(1+r_{i2})\ldots(1+r_{i20}).$$

Αλλά όπως αναλύσαμε πρίν, το αρχικό μας κεφάλαιο στο τέλος του μήνα είναι επίσης ίσο με

$$1 + R_{it}.$$

Κατά συνέπεια οι δύο παραπάνω ποσότητες θα είναι ίσες μεταξύ τους αφού συμβολίζουν το τελικό κεφάλαιο στο τέλος του μήνα t. Άρα,

$$1 + R_{it} = (1 + r_{i1})(1 + r_{i2})\ldots(1 + r_{i20}). \qquad \#$$

Παίρνοντας τους λογαρίθμους των δύο μελών της παραπάνω ισότητας έχουμε

$$\ln(1 + R_{it}) = \ln((1 + r_{i1})(1 + r_{i2})\ldots(1 + r_{i20})).$$

Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων γνωρίζουμε ότι ο λογάριθμος του γινομένου ισούται με το άθροισμα των λογαρίθμων. Κατά συνέπεια, το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας γίνεται,

$$\ln(1 + R_{it}) = \ln(1 + r_{i1}) + \ln(1 + r_{i2}) + \ldots + \ln(1 + r_{i20}). \qquad \#$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η λογαριθμική μηνιάια απόδοση την οποία θα συμβολίσουμε επίσης με $\widetilde{R}_{it}$ (για λόγους πού θα εξηγήσουμε αργότερα) ισούται με το άθροισμα των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων $\widetilde{r}_{is}$, $s = 1, 2, \ldots, 20$, δηλαδή

$$\widetilde{R}_{it} = \sum_{s=1}^{20} \widetilde{r}_{is}. \qquad \#$$

Παρατήρηση

Μιά γνωστή ιδιότητα των λογαρίθμων πού λέει ότι ο λογάριθμος του αθρίσματος $1 + x$ είναι κατά προσέγγιση ίσος με το x όταν το x είναι αρκετά μικρό. Στη προκειμένη περίπτωση οι ημερήσιες (αλλά και οι μηνιαίες) αποδόσεις είναι "αρκετά μικρές" αριθμητικά οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την συγκεκριμένη ιδιότητα. Ο παρακάτω πίνακας συγκρίνει κάποιες (απλές) μηνιαίες αποδόσεις R_{it} της Apple με τις αντίστοιχες λογαριθμικές αποδόσεις $\widetilde{R}_{it} = \ln(1 + R_{it})$.

Πίνακας 2

Μήνας	R_{it}	$\widetilde{R}_{it} = \ln(1 + R_{it})$
Μάρτιος 1990	0.181	0.167
Απρίλιος 1990	-0.021	-0.021

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι όντως οι τιμές της R_{it} είναι όντως πολύ κοντά στις τιμές της $\widetilde{R}_{it}$. Κατά συνέπεια, οι λογαριθμικές αποδόσεις είναι ικανοποιητική προσέγγιση των απλών αποδόσεων.

Συγκρίνοντας τους πίνακες 1 και 2 παρατηρούμε ότι οι τιμές της $\ln(1 + R_{it})$ είναι ίσες με τις τιμές της ποσότητας $\ln(P_{it}) - \ln(P_{it-1})$ πού ορίσαμε στη σχέση (ref: ret4). Με άλλα λόγια οι αποδόσεις $\ln(1 + R_{it})$ ταυτίζονται με τις λογαριθμικές αποδόσεις. Αυτός είναι και ο λόγος πού υιοθετήσαμε τον κοινό συμβολισμό $\widetilde{R}_{it}$ γιά να περιγράψουμε τόσο την ποσότητα πού προκύπτει από τη σχέση (ref: ret4) όσο και την ποσότητα $\ln(1 + R_{it})$. Γιατί συμβαίνει αυτό? Δηλαδή γιατί

$$p_{it} - p_{it-1} = \widetilde{R}_{it} = \ln(1 + R_{it})? \qquad \#$$

Ας υποθέσουμε ότι η τιμή της μετοχής i τη χρονική στιγμή 0 είναι ίση με P_{i0}. Στο τέλος της περιόδου 1, η τιμή P_{i1} θα είναι ίση με

$$P_{i1} = (1 + R_{i1})P_{i0}.$$

Με την ίδια λογική, στο τέλος της περιόδου 2, η τιμή P_{i2} θα είναι ίση με

$$P_{i2} = (1 + R_{i2})P_{i1} = (1 + R_{i1})(1 + R_{i2})P_{i0}.$$

Συνεχίζοντας στο τέλος της περιόδου $t - 1$ η τιμή P_{it-1} θα είναι ίση με

$$P_{it-1} = (1 + R_{i1})(1 + R_{i2})\dots(1 + R_{it-1})P_{i0},$$

ενώ στο τέλος της περιόδου t η τιμή P_{it} θα είναι ίση με

$$P_{it} = (1 + R_{i1})(1 + R_{i2})\dots(1 + R_{it-1})(1 + R_{it})P_{i0}.$$

Παίρνοντας τούς λογαρίθμους και των δύο μελών από τις τελευταίες δύο εξισώσεις έχουμε,

$$\ln(P_{it-1}) = \ln(1 + R_{i1}) + \ln(1 + R_{i2}) + \ldots + \ln(1 + R_{it-1}) + \ln(P_{i0})$$

και

$$\ln(P_{it}) = \ln(1 + R_{i1}) + \ln(1 + R_{i2}) + \ldots + \ln(1 + R_{it-1}) + \ln(1 + R_{it}) + \ln(P_{i0}).$$

Αφαιρώντας κατά μέλη καταλήγουμε στην ισότητα

$$\ln(P_{it}) - \ln(P_{it-1}) = \ln(1 + R_{it})$$

ή ισοδύναμα,

$$p_{it} - p_{it-1} = \ln(1 + R_{it}).$$

Η τελευταία ισότητα και εξηγεί το ερώτημα πού θέσαμε μέσω της σχέσης (ref: rel_q) δηλαδή γιατί η διαφορά των λογαρίθμων $p_{it} - p_{it-1}$ ισούται με την λογαριθμική απόδοση $\ln(1 + R_{it})$.

Χρησιμότητα των Λογαριθμικών Αποδόσεων

Το επόμενο ερώτημα πού θα μας απασχολήσει είναι ποιά είναι η χρησιμότητα των λογαριθμικών αποδόσεων. Πράγματι, κάποιος θα μπορούσε να διατυπώσει το ερώτημα για ποιό λόγο να χρησιμοποιήσουμε τις λογαριθμικές αποδόσεις $\widetilde{R}_{it}$ (όσο καλά και να προσεγγίζουν τις πραγματικές αποδόσεις) όταν μπορούμε εύκολα να χρησιμοποιήσουμε τις πραγματικές αποδόσεις R_{it}. Οι λόγοι πού καθιστούν τη χρήση των λογαριθμικών αποδόσεων ιδιαιτέρως ελκυστική είναι οι εξής δύο:

(i) Ένα από τα θέματα πού θα μας απασχολήσουν εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια είναι το είδος της κατανομής πιθανοτήτων πού ακολουθούν οι αποδόσεις των μετοχών (ή άλλων περιουσιακών στοιχείων). Πιό συγκεκριμένα, θα αναρωτηθούμε αν η κατανομή των αποδόσεων είναι η Κανονική. Πριν προχωρήσουμε στην ουσία του θέματος, ας θέσουμε το ερώτημα αν η τυχαία μεταβλητή R_{it} (δηλαδή οι πραγματικές αποδόσεις) μπορεί έστω και κατ'αρχήν να ακολουθεί τη Κανονική κατανομή. Όπως γνωρίζουμε μια τυχαία μεταβλητή πού ακολουθεί την Κανονική κατανομή παίρνει τιμές σε όλο το $\mathbb{R}$. Μπορεί η R_{it} να πάρει τιμές σε όλο το $\mathbb{R}$? Ποιό συγκεκριμένα, μπορεί η R_{it} να πάρει αυθαίρετα μεγάλες, κατ' απόλυτη τιμή, αρνητικές τιμές? Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αρνητική. Η "πιό αρνητική" απόδοση πού μπορεί να πραγματοποιηθεί είναι όταν χάσει κανείς όλο το κεφάλαιο του. Αυτό συμβαίνει όταν η τιμή P_{it} γίνει μηδέν. Σε αυτή τη περίπτωση θα έχουμε

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} = \frac{0 - P_{it-1}}{P_{it-1}} = -1.$$

Άρα η τυχαία μεταβλητή R_{it} δεν μπορεί, εκ κατασκευής να πάρει τιμές μικρότερες του -1. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να κατανέμεται Κανονικά. Ας δούμε τώρα αν μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις $\widetilde{R}_{it} = \ln(1 + R_{it})$ μπορούν να ακολουθούν την Κανονική κατανομή. Αν υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $\ln(1 + R_{it})$ ακολουθεί την Κανονική κατανομή, αυτό σημαίνει ότι η τυχαία μεταβλητή $(1 + R_{it})$ ακολουθεί την Λογαριθμική Κανονική κατανομή. Ως γνωστόν μιά (οποιαδήποτε) τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Λογαριθμική Κανονική κατανομή παίρνει μόνο θετικές τιμές. Αυτό σημαίνει ότι

$$(1 + R_{it}) > 0.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει αμέσως ότι

$$R_{it} > -1$$

και άρα ο θεωρητικός περιορισμός του ότι οι αποδόσεις δεν μπορεί να είναι μικρότερες του -1 (δηλαδή να χαθεί όλο το επενδεδυμένο κεφάλαιο) ικανοποιείται. Κατά συνέπεια, η υπόθεση ότι η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{R}_{it}$ ακολουθεί την Κανονική κατανομή δεν προκαλεί αντιφάσεις, αντίθετα με την υπόθεση ότι η R_{it} ακολουθεί την Κανονική κατανομή.

(ii) Ένας άλλος λόγος για τον οποίο προτιμούμε να ασχοληθούμε με τις λογαριθμικές αποδόσεις

$$\widetilde{R}_{it} = \ln(1 + R_{it}) = p_{it} - p_{it-1}$$

αντί με τις απλές αποδόσεις

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}}$$

έχει να κάνει με την σχέση πού συνδέει τις λογαριθμικές αποδόσεις σε μιά μεγάλη χρονική περίοδο (π.χ. ένα μήνα) με τις αντίστοιχες λογαριθμικές αποδόσεις σε μικρότερες χρονικές περιόδους (π.χ. ημέρες) εντός της μεγάλης χρονικής περιόδου. Συγκεκριμένα, από τη σχέση (ref: ret_rel1a) παρατηρούμε ότι η λογαριθμική μηνιαία απόδοση ισούται με το *άθροισμα* των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων. Αντίθετα, η σχέση (ref: ret_rel1) μας υποδηλώνει ότι οι απλές μηνιαίες αποδόσεις είναι το γινόμενο των απλών ημερήσιων αποδόσεων. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η δυνατότητα να εκφράσουμε τις (λογαριθμικές) αποδόσεις ενός μεγάλου χρονικού διαστήματος ως το άθροισμα των (λογαριθμικών) αποδόσεων μικρότερων χρονικών διαστημάτων πού συνθέτουν το μεγάλο χρονικό διάστημα μας προσφέρει σημαντική αναλυτική ευκολία κυρίως όσον αφορά την επίκληση και εφαρμογή οριακών θεωρημάτων.

Κατά συνέπεια, από εδώ και στο εξής όταν μιλάμε γιά αποδόσεις θα αναφερόμαστε στις λογαριθμικές αποδόσεις οι οποίες θα κατασκευάζονται παίρνοντας την διαφορά των λογαρίθμων των τιμών. Ως εκ τούτου, μπορούμε να παραλείπουμε τον όρο "λογαριθμικές" και να αναφερόμαστε απλώς στις αποδόσεις των μετοχών (ή άλλων περιουσιακών στοιχείων) εννοώντας πάντοτε ότι μιλάμε για τις λογαριθμικές αποδόσεις $\widetilde{R}_{it}$.

Στη συνέχεια θα θέσουμε το ερώτημα του τί μαθηματική οντότητα είναι η $\widetilde{R}_{it}$. Συγκεκριμένα, είναι ντετερμινιστική ή τυχαία μεταβλητή? Έχουμε ήδη χαρακτηρίσει την $\widetilde{R}_{it}$ ως τυχαία μεταβλητή αφού στην προηγούμενη παράγραφο κάναμε ολόκληρη συζήτηση την κατανομή της. Ας δούμε όμως το γιατί η $\widetilde{R}_{it}$ πρέπει να αντιμετωπιστεί ως τυχαία μεταβλητή. Ας υποθέσουμε ότι στο τέλος της περιόδου $t-1$ αποφασίζουμε να επενδύσουμε στη μετοχή i. Σε αυτή τη χρονική στιγμή η τιμή της μετοχής είναι P_{it-1}. Αυτή την τιμή την παρατηρούμε (ευρισκόμενοι και εμείς στη χρονική στιγμή $t-1$) και άρα δεν έχουμε καμμιά αβεβαιότητα περί αυτής. Η απόδοση $\widetilde{R}_{it}$ της επένδυσης μας σε μιά περίοδο εξαρτάται από την τιμή P_{it} της μετοχής στο τέλος της περίοδου t. Εμείς ευρισκόμενοι κατά τη στιγμή της επένδυσης στο τέλος της χρονικής στιγμής $t-1$, γνωρίζουμε εκ των προτέρων την τιμή της μετοχής στο τέλος της χρονικής στιγμής t? Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αρνητική. Είμαστε αβέβαιοι για την P_{it} και άρα είμαστε επίσης αβέβαιοι γιά την $\widetilde{R}_{it}$. Αυτό σημαίνει ότι τόσο η P_{it} (καί βεβαίως ο λογάριθμός της p_{it}) όσο και η $\widetilde{R}_{it}$ θα αντιμετωπίζονται ως τυχαίες μεταβλητές, νοουμένου ότι εμείς βρισκόμαστε μιά περίοδο πρίν.

Οι Στοχαστικές Ανελίξεις των Αποδόσεων, Τιμών, Λογαριθμικών Αποδόσεων και Λογαριθμικών Τιμών

Από τη στιγμή πού αποφασίσαμε ότι η $\widetilde{R}_{it}$ είναι τυχαία μεταβλητή, ανοίγει ο δρόμος για την Θεωρία Πιθανοτήτων και τη Στατιστική. Συγκεκριμένα, θα θεωρούμε την $\widetilde{R}_{it}$ ως συνεχή τυχαία μεταβλητή η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{\widetilde{R}_{it}}(r,\theta)$ όπου θ είναι οι παράμετροι της κατανομής πιθανότητας. Το ερώτημα του σε ποιά οικογένεια κατανομών ανήκει η $f_{\widetilde{R}_{it}}(r,\theta)$ και συγκεκριμένα το αν είναι η Κανονική κατανομή ή όχι θα μας απασχολήσει σημαντικά στη συνέχεια. Το επόμενο ερώτημα βασίζεται στην εξής αρχική διαπίστωση. Όταν αναφερόμαστε στην τυχαία μεταβλητή $\widetilde{R}_{it}$ ουσιαστικά δεν αναφερόμαστε σε μία αλλά σε "πολλές" (κατ'ακρίβεια άπειρες) τυχαίες μεταβλητές, όπου κάθε μιά εξ'αυτών αντιστοιχεί και σε ένα διαφορετικο ζευγάρι τιμών τών δεικτών i και t. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο δείκτης i χρησιμοποιείται για να δείξει σε ποιά ακριβώς μετοχή (ή γενικότερα asset με ρίσκο) αναφερόμαστε. Αν στην Οικονομία υπάρχουν n μετοχές τότε ο δείκτης i παίρνει τιμές από το 1 έως το n, δηλαδή $i = 1,2,\ldots,n$. Από την άλλη ο δείκτης t αναφέρεται σε χρονικές στιγμές. Αν μιλάμε για διακριτές χρονικές στιγμές (διακριτός χρόνος) τότε ο δείκτης t παίρνει ακέραιες τιμές, δηλαδή $t \in \mathbb{Z}$, ή ακέραιες μη-αρνητικές τιμές, $t \in \mathbb{Z}_+$ ή ακέραιες θετικές τιμές $t \in \mathbb{N}$. Αν υποθέσουμε ότι ο χρόνος είναι συνεχής, τότε χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\widetilde{R}_i(t)$ αντί του $\widetilde{R}_{it}$ και ο δείκτης t παίρνει τιμές σε κάποιο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών ή και σε όλο το $\mathbb{R}$. Στις περιπτώσεις πού υποθέτουμε ότι το σύνολο δεικτών είναι το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ ή το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ δεχόμαστε ότι η ανέλιξη των αποδόσεων δεν έχει συγκεκριμένο χρονικό σημείο εκκίνησης. Αντίθετα, εάν υποθέσουμε ότι το σύνολο δεικτών είναι το $\mathbb{N}$ τότε δεχόμαστε ότι η ανέλιξη είναι διακριτού χρόνου και ξεκινά από το σημείο $t = 1$ (με αρχική τιμή P_0 η οποία συνήθως υποθέτουμε ότι είναι γνωστή και την αποκαλούμε αρχική συνθήκη). Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη τυχαία μεταβλητή της ακολουθίας των αποδόσεων είναι η

$$\widetilde{R}_{i1} = p_{i1} - p_{i0},$$

η δεύτερη τυχαία μεταβλητή είναι η

$$\widetilde{R}_{i2} = p_{i2} - p_{i1},$$

κλπ. Στο μεγαλύτερο τμήμα της ανάλυσης πού θα ακολουθήσει στα επόμενα κεφάλαια, θα κάνουμε την υπόθεση ότι ο χρόνος είναι διακριτός. Κατά συνέπεια, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\widetilde{R}_{it}$ και θα τον ερμηνεύουμε ότι συμβολίζει την απόδοση της μετοχής i την χρονική στιγμή t. Για παράδειγμα, η $\widetilde{R}_{1,5}$ αναφέρεται στην απόδοση της μετοχής 1 τη χρονική στιγμή 5, η $\widetilde{R}_{15,50}$ στην απόδοση της μετοχής 15 τη χρονική στιγμή 50, κλπ.

Αρχικά, ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε μία τυπική μετοχή και ας εξετάσουμε τη διαχρονική συμπεριφορά των αποδόσεων αυτής της μετοχής καθώς και τα κατανομικά χαρακτηριστικά της. Αυτό σημαίνει ότι θα αναλύσουμε τα πιθανοτικά χαρακτηριστικά της ακολουθίας των τυχαίων μεταβλητών $\{\widetilde{R}_{it}\}$ στην οποία για λόγους σημειογραφικής ευκολίας μπορούμε να παραλείψουμε το δείκτη i και άρα να μιλάμε για την ακολουθία $\{\widetilde{R}_t\}$. Η $\{\widetilde{R}_t\}$ δεν είναι άλλη από τη στοχαστική ανέλιξη (ή στοχαστική ακολουθία) των αποδόσεων (μιάς τυπικής μετοχής). Αυτό μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε τη γενική θεωρία περί στοχαστικών ανελίξεων (η οποία συνοπτικά παρουσιάζεται στο παράρτημα του παρόντος κεφαλάιου) στην συγκεκριμένη στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_t\}$. Τα ερωτήματα πού θα μας απασχολήσουν είναι τα συνήθη ερωτήματα πού θέτουμε στο πλαίσιο της μελέτης μιας οποιασδήποτε στοχαστικής ανέλιξης. Συγκεκριμένα, ποιοί είναι οι περιορισμοί διαχρονικής ετερογένειας και διαχρονικής εξάρτησης πού επιδεικνύει η ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$ καθώς επίσης και ποιά είναι τα κατανομικά χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών πού συνθέτουν την ανέλιξη. Η απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα θα έχει δύο σκέλη. Το πρώτο σκέλος θα είναι εμπειρικό και το δεύτερο θεωρητικό. Στο εμπειρικό σκέλος πού θα αναπτυχθεί στο επόμενο κεφάλαιο, θα εξετάσουμε τα ερωτήματα περί των πιθανοτικών χαρακτηριστικών της $\{\widetilde{R}_t\}$ αφαρμόζοντας στατιστικές μεθόδους και τεχνικές πάνω σε πραγματικά δεδομένα αποδόσεων. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά διαχρονικής εξάρτησης, ετερογένειας και κατανομής πού επιδεικνύουν πραγματικές αποδόσεις μετοχών (από το Αμερικανικό χρηματιστήριο) καθώς επίσης και δεικτών μετοχών. Στο θεωρητικό σκέλος, πού θα αναπτυχθεί στο μεθεπόμενο κεφάλαιο, θα εξετάσουμε το αν υπάρχουν θεωρητικοί λόγοι πού η στοχαστική ακολουθία $\{\widetilde{R}_t\}$ εμφανίζει τα χαρακτηριστικά πού διαγνώσαμε στο εμπειρικό κεφάλαιο. Σε αυτό το κεφάλαιο, κυρίαρχο ρόλο θα παίξει η επονομαζόμενη "θεωρία των αποτελεσματικών αγορών". Συγκερκριμένα, αφού αναλύσουμε τις βασικές υποθέσεις και τα συμπεράσματα της θεωρίας των αποτελεσματικών αγορών θα αναρωτηθούμε τι συνέπειες έχει τελικά αυτή η θεωρία όσον αφορά τα χαρακτηριστικά εξάρτησης και ετερογένειας της $\{\widetilde{R}_t\}$. Στο ίδιο κεφάλαιο θα αναλύσουμε και το αν υπάρχουν καλοί θεωρητικοί λόγοι οι οποίοι εξηγούν τα εμπειρικά ευρήματα γιά το είδος της κατανομής των αποδόσεων $\widetilde{R}_t$. Σε αυτή την ανάλυση σημαντικό ρόλο θα παίξει το κεντρικό οριακό θεώρημα καθώς και οι γενικεύσεις του.

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο και εξετάσουμε τα εμπειρικά χαρακτηριστικά των αποδόσεων, ας ξεκαθαρίσουμε το ποιές ακριβώς στοχαστικές ανελίξεις θα μας απασχολήσουν είτε εμπειρικά είτε θεωρητικά. Η πρώτη είναι φυσικά η στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_t\}$ η οποία θα αποτελέσει και το κυριότερο αντικείμενο της ανάλυσης μας. Επιπλέον, συχνά θα αναφερθούμε και στη "συγγενή" της ανέλιξη $\{p_t\}$ η οποία είναι η ανέλιξη των λογαριθμικών τιμών. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει οι δύο αυτές ανελίξεις είναι συγγενείς αφού η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{R}_t$ συνδέεται με τις τυχαίες μεταβλητές p_t και p_{t-1} μέσω του τύπου

$$\widetilde{R}_t = p_t - p_{t-1}.$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει αμέσως ότι η λογαριθμική τιμή p_t ισούται με

$$p_t = p_{t-1} + \widetilde{R}_t. \qquad \#$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση (ref: pric_rw) με την εξίσωση (ref: rw1) στο Παράρτημα Γ παρατηρούμε ότι οι δύο εξισώσεις έχουνε την ίδια δομή. Αυτό σημαίνει ότι αν δεχθούμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη με μέσο 0 και διακύμανση $\sigma^2_{\widetilde{R}_t}$ τότε η ανέλιξη $\{p_t\}$ ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο. Αν η $\{\widetilde{R}_t\}$ διατηρεί τις παραπάνω ιδιότητες αλλά αντί για μέσο $E(\widetilde{R}_t) = 0$ έχει μη-μηδενικό μέσο (σταθερό γιά κάθε t),

$$E(\widetilde{R}_t) = \mu_{\widetilde{R}_t},\ \mu_{\widetilde{R}_t} = \mu > 0,$$

τότε η ανέλιξη $\{p_t\}$ ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο με τάση.

Αντίστοιχες παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε για τη στοχαστική ανέλιξη των τιμών $\{P_t\}$. Από τη σχέση (ref: ret1) η σχέση μεταξύ της τιμης P_t και της απόδοσης R_t είναι η εξής,

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει αμέσως ότι

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = 1 + R_t. \qquad \#$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση (ref: pric_grw) με την εξίσωση (ref: grw) στο Παράρτημα Γ, παρατηρούμε ότι η δομή της παραπάνω εξίσωσης είναι ανάλογη με αυτή ενός γεωμετρικού τυχαίου περίπατου. Το μόνο πού απομένει για να χαρακτηρίσουμε την ανέλιξη των τιμών $\{P_t\}$ ως γεωμετρικό τυχαίο περίπατο είναι να υποθέσουμε ότι η ανέλιξη $\{V_t\}$ όπου

$$V_t = 1 + R_t$$

είναι μιά ανεξάρτητη και ταυτόνομη ανέλιξη με μέσο μηδέν και σταθερή διακύμανση.

Μιά τελευταία παρατήρηση πού μπορούμε να κάνουμε είναι η εξής: Αν η στοχαστική ανέλιξη των τιμών $\{P_t\}$ ακολουθεί ένα γεωμετρικό τυχαίο περίπατο με γενεσιουργό ανέλιξη την $\{V_t\}$, τότε η στοχαστική ανέλιξη των λογαριθμικών τιμών $\{p_t\}$ ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο με γενεσιουργό ανέλιξη την $\{\widetilde{R}_t\}$. Πράγματι, αν δεχθούμε την (ref: pric_grw) μαζί με την υπόθεση ότι η $\{V_t\}$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη τότε παίρνοντας λογαρίθμους και στα δύο μέλη της (ref: pric_grw) έχουμε,

$$\ln(\frac{P_t}{P_{t-1}}) = \ln(1 + R_t)$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι

$$p_t - p_{t-1} = \widetilde{R}_t$$

ή

$$p_t = p_{t-1} + \widetilde{R}_t.$$

Το μόνο πού χρειαζόμαστε να δείξουμε για να πούμε ότι η $\{p_t\}$ είναι τυχαίος περίπατος είναι το ότι η $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη ανέλιξη. Έχουμε ήδη υποθέσει ότι η $\{R_t\}$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη αφού υποθέσαμε ότι η $\{P_t\}$ ακολουθεί ένα γεωμετρικό τυχαίο περίπατο με γενεσιουργό ανέλιξη την $\{1 + R_t\}$. Κατά συνέπεια και οποιαδήποτε "ομαλή" συνάρτηση αυτής (όπως η λογαριθμική) θα είναι μιά νέα ανεξάρτητη και ταυτόνομη ανέλιξη. Κατά συνέπεια η $\{\widetilde{R}_t\}$, με $\widetilde{R}_t = \ln(1 + R_t)$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη ανέλιξη και άρα η $\{p_t\}$ είναι τυχαίος περίπατος.

Παράρτημα Γ: Στοχαστικές Ανελίξεις

Στο παρόν παράρτημα θα παραθέσουμε ορισμένα στοιχεία από τη θεωρία περί στοχαστικών ανελίξεων τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να αναλύσουμε τη στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων. Ας ξεκινήσουμε τη γενική συζήτηση περί στοχαστικών ανελίξεων δίνοντας τον βασικό ορισμό τους.

Definition ***(Στοχαστική Ανέλιξη)***.

Μία στοχαστική ανέλιξη, $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ είναι μιά συλλογή τυχαίων μεταβλητών, ορισμένων σε κάποιο χώρο πιθανότητας, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, οι οποίες διακρίνονται μεταξύ τους από τον δείκτη t, πού ανήκει σε ένα σύνολο $\mathbf{T}$.

Όπως είπαμε στην αρχή τού παρόντος κεφαλάιου, αν ο χρόνος είναι διακριτός, π.χ. αν $\mathbf{T} = \mathbb{Z}$, η ανέλιξη θα συμβολίζεται με $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ Γιά τούς περισσοτερους ορισμούς πού θα ακολουθήσουν θα κάνουμε την υπόθεση του διακριτού χρόνου αφού αυτό το πλαίσιο θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως (με μια σημαντική εξαίρεση) στην ανάλυση της διαχρονικής συμπεριφοράς των αποδόσεων των μετοχών.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε το πότε μιά στοχαστική ακολουθία θα λέγεται Κανονική (υπό την έννοια της Κανονικής κατανομής).

Definition ***(Κανονική Στοχαστική Ανέλιξη)***

Έστω η στοχαστική ανέλιξη, $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$, τέτοια ώστε γιά κάθε σύνολο χρονικών στιγμών $t_1, t_2, \ldots, t_n$, $n = 1, 2, \ldots$ η από-κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ είναι η πολυμεταβλητή κανονική κατανομή. Τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ θα ονομάζεται Κανονική.

Ο παραπάνω ορισμός σημαίνει ότι η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ δίνεται από τον τύπο:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^{\top} \right\}$$

όπου τα $\boldsymbol{\mu}$ καί Σ συμβολίζουν το διάνυσμα (γραμμής) των μέσων καί το πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων αντίστοιχα, των τυχαίων μεταβλητών $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε τούς λεγόμενους περιορισμούς διαχρονικής ετερογένειας μιάς στοχαστικής ανέλιξης. Αυτοί οι περιορισμοί στοχεύουν στο να περιορίσουν την διαφορετικότητα των κατανομικών χαρακτηριστικών των τυχαίων μεταβλητών της ανέλιξης μεταξύ χρονικών στιγμών. Ο λόγος πού επιθυμούμε να περιορίσουμε την διαχρονική ετερογένεια μιάς ανέλιξης είναι να την καταστήσουμε λειτουργική στην περιγραφή ενός στοχαστικού φαινομένου πού εξελίσσεται στο χρόνο (εν προκειμένω των αποδόσεων των μετοχών). Ο πρώτος και πιό αυστηρός περιορισμός της διαχρονικής ετερογένειας μιάς ανέλιξης είναι η αυστηρή στασιμότητα.

Definition *(Αυστηρή Στασιμότητα)*

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ θα ονομάζεται *αυστηρά στάσιμη* εάν γιά κάθε σύνολο χρονικών στιγμών $t_1, t_2, \ldots, t_n$ καί γιά κάθε ακέραιο $h \in \mathbb{Z}$, η από-κοινού κατανομή των $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ ταυτίζεται με την από-κοινού κατανομή των $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h})$, δηλαδή άν

$$f_{t_1, t_2, \ldots t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{t_1+h, t_2+h, \ldots t_n+h}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

γιά κάθε $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ο παραπάνω ορισμός αναφέρεται σε κάθε σύνολο $t_1, t_2, \ldots, t_n$, πλήθους $n = 1, 2, \ldots,$ άρα καί στο μονομελές σύνολο $\{t_1\}$. Ετσι έχουμε ότι $f_{t_1}(x) = f_{t_1+h}(x)$ $\forall h$. Με άλλα λόγια η αυστηρή στασιμότητα συνεπάγεται ότι όλες οι μονοδιάστατες κατανομές της ανέλιξης είναι πανομοιότυπες. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην έννοια της ταυτόνομης (ή ισόνομης) ανέλιξης:

Definition *(Ταυτονομία)*

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ θα ονομάζεται *ταυτόνομη* εάν η κατανομή κάθε τυχαίας μεταβλητής X_t ταυτίζεται με τη κατανομή κάθε άλλης τυχαίας μεταβλητής X_s γιά $t, s \in \mathbb{Z}$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η αυστηρή στασιμότητα συνεπάγεται ταυτονομία. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα. Δηλαδή μπορεί να έχουμε μιά ταυτόνομη ανέλιξη η οποία να μην είναι αυστηρά στάσιμη. Τόσο η αυστηρή στασιμότητα όσο και η ταυτονομία είναι περιορισμοί της διαχρονικής ετερογένειας πού διατυπώνονται σε όρους των κατανομών των τυχαίων μεταβλητών της ανέλιξης. Στη συνέχεια, θα δούμε περιορισμούς της διαχρονικής ετερογένειας οι οποίοι βασίζονται στις ροπές των τυχαίων μεταβλητών της ανέλιξης και σγκεκριμένα, στους μέσους, στις διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις.

Definition *(Στασιμότητα Πρώτης Τάξης)*.

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ θα ονομάζεται *στάσιμη πρώτης τάξης* εάν όλες οι τυχαίες μεταβλητές που συνθέτουν την ανέλιξη έχουν τον ίδιο μέσο, δηλαδή $E(X_t) = \mu < \infty$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.

Definition *(Στασιμότητα Δεύτερης Τάξης, ή Ασθενής Στασιμότητα).*

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ θα ονομάζεται *στάσιμη δεύτερης τάξης* ή *ασθενώς στάσιμη* εάν όλες οι τυχαίες μεταβλητές που συνθέτουν την ανέλιξη έχουν τον ίδιο μέσο, την ίδια διακύμανση καί επιπλέον η συνδιακύμανση οποιουδήποτε ζευγαριού τυχαίων μεταβλητών X_t καί X_s εξαρτάται μόνο από την απόσταση $|t-s|$ τών δύο τυχαίων μεταβλητών καί όχι από τις θέσεις τους, t καί s, δηλαδή αν

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \mu < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}, \\ Var(X_t) &= \sigma^2 < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}, \\ Cov(X_t, X_s) &= Cov(X_{t+h}, X_{s+h}) \forall t, s, h \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Αν μιά στοχαστική ανέλιξη είναι αυστηρά στάσιμη, τότε (νοουμένου ότι οι μέσοι, διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις ορίζονται καλώς) θα είναι και στάσιμη δεύτερης τάξης. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα. Δηλαδή μιά ανέλιξη πού είναι ασθενώς στάσιμη δεν είναι απαραιτήτως και αυστηρά στάσιμη. Πλήν όμως αν μιά ανέλιξη πού είναι στάσιμη δεύτερης τάξης είναι και Κανονική, τότε θα είναι και αυστηρά στάσιμη.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε περιορισμούς της διαχρονικής εξάρτησης της ανέλιξης. Ο πιό αυστηρός περιορισμός της εξάρτησης μιάς στοχαστικής ανέλιξης είναι προφανώς η υπόθεση της ανεξαρτησίας.

Definition *(Ανεξαρτησία)*

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ θα ονομάζεται ανεξάρτητη έαν γιά κάθε σύνολο χρονικών στιγμών $t_1, t_2, \ldots, t_n$, $n = 2, 3, \ldots$ η από-κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ ισούται με το γινόμενο των περιθώριων κατανομών τους, δηλαδή,

$$f_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2}(x_2) \ldots f_{t_n}(x_n)$$

γιά κάθε $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Οταν μιά ανέλιξη είναι ανεξάρτητη, τότε η δεσμευμένη κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X_t με δέσμευση όλη την 'ιστορία' της ανέλιξης έως καί τη χρονική στιγμή $(t-1)$ ισούται με την αδέσμευτη κατανομή της X_t. Συγκεκριμένα, έχουμε τον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό της ανεξαρτησίας:

Definition *(Εναλλακτικός Ορισμός Ανεξαρτησίας)*

Μιά στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι ανεξάρτητη, όταν γιά κάθε χρονική στιγμή t, η δεσμευμένη κατανομή, $f_t(x \mid x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_0)$, της τυχαίας μεταβλητής X_t ισούται με την 'αδέσμευτη' κατανομή της X_t, δηλαδή άν

$$f_t(x \mid x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_0) = f_t(x) \qquad \#$$

γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ καί γιά κάθε δυνατή πραγματοποίηση $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_0$.

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε το πώς ερμηνεύουμε την "ιστορία" $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_0$ της ανέλιξης. Η ιστορία της ανέλιξης ερμηνεύεται ως το σύνολο πληροφοριών $(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_0) \equiv I_{t-1}$ το οποίο θεωρείται διαθέσιμο κατά την χρονική στιγμή $t-1$, στην οποία γίνεται η αξιολόγηση της κατανομής πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X_t. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το I_{t-1} δεν περιεχει μόνο την πραγματοποίηση της ανέλιξης πού έχουμε στα χέρια μας κατά την χρονική στιγμή $t-1$ αλλά περιέχει **όλες τις δυνατές πραγματοποιήσεις** $(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_0)$ της ανέλιξης από το σημείο εκκίνησης, $t = 0$ έως καί τη χρονική στιγμή $t-1$. Με άλλα λόγια, το σύνολο I_{t-1} περιέχει ενδεχόμενα της μορφής $(X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \ldots, X_0 = x_0)$. Κάθε πραγματοποίηση $(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_0)$ της ανέλιξης, αντιστοιχεί καί σε ένα διαφορετικό ενδεχόμενο, το οποίο εκφράζεται ως $(X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \ldots, X_0 = x_0)$. Κατά συνέπεια η έκφραση $f_t(x \mid x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_0)$ στη σχέση (ref: ind-alt) θα πρέπει να ερμηνεύεται ως η δεσμευμένη κατανομή, της τυχαίας μεταβλητής X_t με δέσμευση την πραγματοποίηση $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_0$ οποιαδήποτε κι αν είναι η πραγματοποίηση αυτή. Με άλλα λόγια, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η $f_t(x \mid x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_0)$ δεν εκφράζει μιά συγκεκριμένη δεσμευμένη κατανομή αλλά ένα σύνολο δεσμευμένων κατανομών.

Οι επόμενοι περιορισμοί της διαχρονικής εξάρτησης μιάς ανέλιξης βασίζονται στις δεσμευμένες ροπές των τυχαίων μεταβλητών πού συνθέτουν την ανέλιξη. Και πάλι, αυτοί οι περιορισμοί της εξάρτησης είναι λιγότεροι περιοριστικοί από τον περιορισμό της ανεξαρτησίας πού ουσιαστικά απαγορεύει την ύπαρξη οποιασδήποτε μορφής εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών της ανέλιξης.

Definition ***(Ανεξαρτησία ως πρός το Δεσμευμένο Μέσο)***

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}_+}$ θα ονομάζεται *ανεξάρτητη ως προς το δεσμευμένο μέσο*, εάν γιά κάθε τυχαία μεταβλητή X_t, ισχύει ότι

$$E(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_0) = E(X_t).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο συγκεκριμένος περιορισμός εξάρτησης, δηλαδή η ανεξαρτησία ως προς το δεσμευμένο μέσο, θα παίξει σημαντικό ρόλο στην θεωρία περί αποτελεσματικών αγορών πού θα αναπτύξουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Πριν προχωρήσουμε, ας κάνουμε μία παρένθεση προκειμένου να θυμίσουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις αδέσμευτες ροπές μιας ανέλιξης αν γνωρίζουμε τις δεσμευμένες ροπές της. Συγκεκριμένα, έστω ότι γνωρίζουμε το δεσμευμένο μέσο $E(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_0)$ καί τη δεσμευμένη διακύμανση $Var(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_0)$. Μπορούμε από αυτή την πληροφορία να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες αδέσμευτες ροπές, δηλαδή τον μέσο $E(X_t)$ καί την διακύμανση $Var(X_t)$. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική. Οι αδέσμευτες ροπές $E(X_t)$ καί $Var(X_t)$ προκύπτουν από τις δεσμευμένες ροπές, μέσω των σχέσεων:

$$E(X_t) = E\{E(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_0)\} \qquad \#$$

καί

$$Var(X_t) = E\{Var(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_0)\} + Var\{E(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_0)\} \qquad \#$$

Στη συνέχεια θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην γραμμική ανεξαρτησία η Μη-συσχέτιση:

Definition ***(Γραμμική Ανεξαρτησία ή Μη-Συσχέτιση)***

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ θα ονομάζεται *γραμμικά ανεξάρτητη* ή *ασυσχέτιστη* εάν ο συντελεστής συσχέτισης γιά κάθε ζευγάρι τυχαίων μεταβλητών X_t καί X_s της ανέλιξης ισούται με το μηδέν, δηλαδη εάν $Corr(X_t, X_s) = 0$ γιά κάθε X_t καί X_s πού ανήκουν στην ανέλιξη $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι η $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ είναι καί ασθενώς στάσιμη, τότε η υπόθεση της γραμμικής ανεξαρτησίας θα μπορούσε να διατυπωθεί σε όρους της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, $\rho(h) = Corr(X_t, X_{t+h})$ της ανέλιξης, ως εξής:

$$\rho(h) = \begin{bmatrix} 0 & h \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ 1 & h = 0 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε ορισμένες ειδικές στοχαστικές ανελίξεις τις οποίες θα συναντήσουμε στη συζήτηση μας για την στοχαστική συμπεριφορά των αποδόσεων (και των τιμών) των μετοχών. Η πρώτη τέτοια ανέλιξη πού θα ορίσουμε είναι η επονομαζόμενη ανέλιξη martingale.

Definition ***(Ανέλιξη Martingale)***

Εστω η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}_+}$ καί έστω $I_{t-1} = (X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_0)$ να είναι το σύνολο πληροφοριών έως καί τη χρονική στιγμή $t-1$. Η ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}_+}$ θα ονομάζεται martingale εάν, γιά κάθε χρονική στιγμή $t \in \mathbb{Z}_+$, ισχύει ότι:

$$E(|X_t|) < \infty$$

καί γιά $t \geq 1$ ισχύει ότι

$$E(X_t \mid I_{t-1}) = X_{t-1}.$$

Εάν μιά ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}_+}$ είναι martingale τότε είναι στάσιμη πρώτης τάξης. Αυτό μπορεί εύκολα να δειχθεί χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες τού δεσμευμένου μέσου καί συγκεκριμένα την ιδιότητα (ref: unc-cond-mean). Εφαρμόζοντας αυτή την ιδιότητα στη περίπτωση πού η δέσμευση είναι το σύνολο I_{t-1} καί εφαρμόζοντας τον τελεστή $E(\bullet)$ καί στα δύο μέλη της ισότητας $E(X_t \mid I_{t-1}) = X_{t-1}$, έχουμε ότι

$$E[E(X_t \mid I_{t-1})] = E(X_{t-1})$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$E(X_t) = E(X_{t-1})$$

γιά κάθε χρονική στιγμή $t \in \mathbb{Z}_+$. Αρα η ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}_+}$ είναι στάσιμη πρώτης τάξης.

Definition ***(Ανέλιξη Supermartingale καί Submartingale)***.

Εστω η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}_+}$ καί έστω $I_{t-1} = (X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_0)$ να είναι το σύνολο πληροφοριών έως καί τη χρονική στιγμή $t-1$. Η ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}_+}$ θα ονομάζεται supermartingale εάν

$$E(|X_t|) < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}_+$$

καί

$$E(X_t \mid I_{t-1}) < X_{t-1}, \forall t \geq 1.$$

Αντίθετα, η ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}_+}$ θα ονομάζεται submartingale εάν

$$E(|X_t|) < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}_+$$

καί

$$E(X_t \mid I_{t-1}) > X_{t-1}, \forall t \geq 1.$$

Definition ***(Ανέλιξη Martingale-Διαφοράς)***

Εστω η στοχαστική ανέλιξη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ καί έστω $I_{t-1} = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_0)$ να είναι το σύνολο πληροφοριών έως καί τη χρονική στιγμή $t-1$. Η ανέλιξη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ θα ονομάζεται martingale-διαφοράς εάν, γιά κάθε χρονική στιγμή $t \in \mathbb{Z}_+$, ισχύει ότι:

$$E(|Y_t|) < \infty$$

καί γιά $t \geq 1$ ισχύει ότι

$$E(Y_t \mid I_{t-1}) = 0.$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι αν μιά ανέλιξη $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι martingale, τότε η ανέλιξη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$, πού ορίζεται ως $Y_t = X_t - X_{t-1}$ είναι martingale-διαφοράς. Επίσης, αν μιά ανέλιξη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι martingale-διαφοράς, τότε είναι ανεξάρτητη ως πρός το δεσμευμένο μέσο. Τέλος, αν μιά ανέλιξη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι martingale-διαφοράς, τότε είναι στάσιμη πρώτης τάξης μέ μέσο ίσο με το μηδέν. Αυτό μπορεί εύκολα να δειχθεί χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ref: unc-cond-mean). Πράγματι, εφαρμόζοντας τον τελεστή $E(\bullet)$ καί στα δύο μέλη της ισότητας $E(Y_t \mid I_{t-1}) = 0$, έχουμε ότι $E[E(Y_t \mid I_{t-1})] = E(0) = 0$ από το οποίο συνεπάγεται ότι $E(Y_t) = 0$ γιά κάθε χρονική στιγμή $t \in \mathbb{Z}_+$.

Definition ***(Ανέλιξη Λευκού Θορύβου)***

Εστω η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ γιά την οποία ισχύουν τα εξής,

$$E(X_t) = 0, \qquad \#$$

$$Var(X_t) = \sigma^2 \qquad \#$$

γιά κάθε $t \in \mathbb{Z}$, καί ακόμα

$$Cov(X_t, X_s) = E(X_t X_s) = 0 \qquad \#$$

γιά κάθε $t \neq s$. Τότε η ανέλιξη $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ονομάζεται ανέλιξη *λευκού θορύβου*.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μιά ανέλιξη λευκού θορύβου παρότι είναι γραμμικά ανεξάρτητη, δεν είναι κατ'ανάγκη (γενικά) ανεξάρτητη. Αν όμως μιά ανέλιξη λευκού θορύβου είναι και Κανονική τότε είναι και γενικά ανεξάρτητη.

Definition ***(Τυχαίος Περίπατος)***

Εστω η στοχαστική ανέλιξη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ η οποία ορίζεται μέσω τού αναδρομικού τύπου

$$Y_t = Y_{t-1} + U_t \qquad \#$$

όπου η ανέλιξη $\{U_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη με μέσο $E(U_t) = 0$ και διακύμανση $Var(U_t) = \sigma_U^2$. Τότε η ανέλιξη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ θα ονομάζεται τυχαίος περίπατος (random walk).

Παρατηρήσεις

(i) Αν η $\{U_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη αλλά ο μέσος της είναι

$\mu_U \neq 0$ τότε υπάρχει μιά άλλη ανεξάρτητη και ταυτόνομη ανέλιξη $\{V_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ με $E(V_t) = 0$ και $Var(V_t) = \sigma_V^2 = \sigma_U^2$ τέτοια ώστε

$$U_t = \mu_U + V_t.$$

Σε αυτή τη περίπτωση, η ανέλιξη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ ορίζεται ως

$$Y_t = \mu_U + Y_{t-1} + V_t,$$

και ονομάζεται τυχαίος περίπατος με τάση (random walk with drift).

(ii) Αν η κατανομή της γενεσιουργού ανέλιξης $\{U_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι η Κανονική τότε η ανέλιξη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ ονομάζεται Κανονικός τυχαίος περίπατος.

Definition ***(Γεωμετρικός Τυχαίος Περίπατος)***

Εστω η στοχαστική ανέλιξη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ η οποία ορίζεται μέσω τού αναδρομικού τύπου

$$\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = U_t \qquad \#$$

όπου η ανέλιξη $\{U_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη με μέσο $E(U_t) = 0$ και διακύμανση $Var(U_t) = \sigma_U^2$. Τότε η ανέλιξη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ θα ονομάζεται γεωμετρικός τυχαίος περίπατος (random walk).

Η επόμενη ειδική στοχαστική ανέλιξη πού θα ορίσουμε είναι η ανέλιξη Wiener ή όπως αλλιώς ονομάζεται η κίνηση Brown. Μιά σημαντική διαφορά αυτής της ανέλιξης από τις προηγούμενες πού εξετάσαμε ως τώρα είναι ότι η ανέλιξη Wiener είναι συνεχούς χρόνου. Η ανέλιξη Wiener είναι το αντίστοιχο του Κανονικού τυχαίου περίπατου σε συνεχή χρόνο.

Definition ***(Ανέλιξη Wiener)***

Η ανέλιξη συνεχούς χρόνου $\{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ είναι ανέλιξη Wiener εάν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $W(0) = 0$.

(ii) Όλες οι πραγματοποιήσεις της $\{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις της μεταβλητής $t \in \mathbb{R}_+$.

(iii) Η ανέλιξη $\{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Με τον όρο "ανεξάρτητες προσαυξήσεις" εννοούμε ότι γιά οποιεσδήποτε χρονικές στιγμές $t_1, t_2, \ldots, t_n$ με $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές $W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες.

(iv) Η κατανομή των προσαυξήσεων $W(t) - W(s),\ 0 \leq s < t$ είναι η κανονική με μέσο μηδέν καί διακύμανση $t - s$.

Η ιδιότητα (ii) ερμηνεύεται ως εξής: Ας επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε $\omega \in \Omega$ όπου το σύνολο Ω είναι ο δειγματικός χώρος πάνω στον οποίο έχει οριστεί η ανέλιξη $\{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$. Γιά αυτό το δεδομένο $\omega \in \Omega$ η ανέλιξη παράγει έναν αριθμό $w(t)$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Εάν θεωρήσουμε όλους τούς αριθμούς $w(t)$ (δηλαδή ολόκληρη την πραγματοποίηση της ανέλιξης πού αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο $\omega \in \Omega$) ως συνάρτηση τού $t \in \mathbb{R}_+$, τότε αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής ως προς t. Αξίζει να σημειώσουμε ότι παρότι κάθε πραγματοποίηση μιάς ανέλιξης Wiener είναι παντού συνεχής στο $t \in \mathbb{R}_+$ δεν είναι (πουθενά) παραγωγίσιμη. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t \in \mathbb{R}_+$ στην οποία να ορίζεται η παράγωγος της συνάρτησης $w(t)$. Ως εκ τούτου, η διαγραμματική απεικόνιση μιάς πραγματοποίησης Wiener είναι μιά εξαιρετικά "μη-ομαλή". Η ιδιότητα (iii) δηλώνει ότι οι "μεταβολές" της ανέλιξης είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Η ιδιότητα (iv) μας λέει ότι όλες οι προσαυξήσεις $W(t) - W(s)$ της ανέλιξης Wiener είναι κανονικές τυχαίες μεταβλητές με μέσο μηδέν καί διακύμανση ίση με τη διαφορά $t - s$. Η ιδιότητα της κανονικότητας δεν αφορά μόνο στις προσαυξήσεις $W(t) - W(s)$ αλλά καί στην ίδια τη στοχαστική ανέλιξη Wiener $\{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$. Πράγματι, η ανέλιξη $\{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ είναι κανονική υπό την έννοια τού ορισμού (ref: normal-st-pr). Αυτό σημαίνει ότι γιά κάθε σύνολο χρονικών στιγμών $t_1, t_2, \ldots, t_n,\ n = 1, 2, \ldots$ η από κοινού κατανομή τών τυχαίων μεταβλητών $W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n)$ είναι η πολυμεταβλητή κανονική κατανομή. Ως γνωστόν, μιά κανονική στοχαστική ανέλιξη περιγράφεται πλήρως από τις συναρτήσεις

$$\mu(t) = E(W(t)) \qquad \#$$

καί

$$\gamma(s,t) = Cov(W(t), W(s)). \qquad \#$$

Με άλλα λόγια, αν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις (ref: mean-ve) καί (ref: cov-ve) μπορούμε να έχουμε τις κατανομές πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n)$ γιά κάθε σύνολο χρονικών στιγμών $t_1, t_2, \ldots, t_n,\ n = 1, 2, \ldots$. Στη περίπτωση της ανέλιξης Wiener, ισχύουν τα εξής:

$$\mu(t) = 0, \forall t \qquad \#$$

καί

$$\gamma(s,t) = \min(s,t). \qquad \#$$

Ισχύει καί το αντίστροφο, δηλαδή αν μας δοθεί μιά κανονική στοχαστική ανέλιξη με συναρτήσεις μέσων καί διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων να δίνονται από τις σχέσεις (ref: mean-ve-wien) καί (ref: cov-ve-wien) αντίστοιχα, τότε μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι αυτή η ανέλιξη είναι ανέλιξη Wiener.

Τέλος μιά μορφή εξαρτημένης ανέλιξης την οποία θα συναντήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο είναι η $m-$εξαρτημένη ανέλιξη:

Definition ***(m-εξαρτημένη)***

Έστω η αυστηρά στάσιμη στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Η ανέλιξη αυτή θα λέγεται m-εξαρτημένη (όπου m είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος), εάν για κάθε $t \in \mathbb{Z}$, οι σ-άλγεβρες $\sigma(X_t, X_{t-1}, \ldots)$ και $\sigma(X_{t+m+1}, X_{t+m+2}, \ldots)$ που παράγονται από τα σύνολα τυχαίων μεταβλητών $\{X_j, j \leq t\}$ και $\{X_j, j \geq t + m + 1\}$, αντίστοιχα, είναι ανεξάρτητες κλάσεις.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο παραπάνω ορισμός ουσιαστικά απαιτεί για κάθε $t \in \mathbb{Z}$, κάθε τυχαίο διάνυσμα από τυχαίες μεταβλητές που ανήκουν στο σύνολο $\{X_j, j \leq t\}$ να είναι ανεξάρτητο από κάθε τυχαίο διάνυσμα από τυχαίες μεταβλητές που ανήκουν στο $\{X_j, j \geq t + m + 1\}$. Επίσης, στην ειδική περίπτωση $m = 0$, η έννοια της m-εξάρτησης ταυτίζεται με αυτήν της ανεξαρτησίας.

Ερωτήσεις Επανάληψης

1) Να δώσετε τον ορισμό των αποδόσεων και να τον συγκρίνετε τον ορισμό των

λογαριθμικών αποδόσεων.Πόσο καλή προσέγγιση της πραγματικής απόδοσης ειναι η λογαριθμική απόδοση και γιατί?

2) Να δείξετε οτι η λογαριθμική απόδοση στην περίοδο t είναι ίση με την διαφορά των λογαρίθμων των τιμών μεταξύ των περιόδων t-1 και t.

3) Για ποιο λόγο (ή λόγους) προτιμάμε να αναλύουμε τις λογαριθμικές αποδόσεις παρά τις πραγματικές?

4) Πότε μιά τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή? Ποιές είναι οι διαφορές μεταξύ της Κανονικής και της λογαριθμοκανονικής κατανομής?

5) Να δείξετε οτι αν οι αποδόσεις είναι ανεξάρτητες και ταυτόνομες τυχαίες μεταβλητές με μη-μηδενικό (αλλά σταθερό διαχρονικά) μέσο και σταθερή διακύμανση τότε η λογαριθμική τιμή ακολουθεί ενα τυχαίο περίπατο με τάση. Στη συνέχεια να αναλύσετε τη διαχρονική συμπεριφορά των μέσων $E(p_t)$ και των διακυμάνσεων $Var(p_t)$των λογαριθμικών τιμών . Με βάση την ανάλυση να προσδιορίσετε αν η ανέλιξη των λογαριθμικών τιμών είναι στασιμή δεύτερης τάξης.

6) Εάν η στοχαστική ανέλιξη των λογαριθμικών τιμών ακολουθεί τον αναδρομικό τύπο $p_t = p_{t-1} + \widetilde{R}_t$, μπορούμε να πούμε ότι ακολουθεί τυχαίο περίπατο χωρίς να προσδιορίσουμε τις ιδιότητες της γενεσιουργού ανέλιξης $\{\widetilde{R}_t\}$? Ή θα πρέπει η $\{\widetilde{R}_t\}$ να ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες (ποιές?) ώστε να πούμε ότι η $\{p_t\}$ είναι τυχαίος περίπατος?

7) Να δείξετε ότι αν η στοχαστική ανέλιξη των τιμών $\{P_t\}$ ακολουθεί ένα γεωμετρικό τυχαίο περίπατο με γενεσιουργό ανέλιξη την $\{V_t\}$, τότε η στοχαστική ανέλιξη των λογαριθμικών τιμών $\{p_t\}$ ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο με γενεσιουργό ανέλιξη την $\{\widetilde{R}_t\}$.

Εμπειρικές Ιδιότητες των Λογαριθμικών Αποδόσεων και των Λογαριθμικών Τιμών

Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα εμπειρικά χαρακτηριστικά των λογαριθμικών αποδόσεων, $\widetilde{R}_t$, και λογαριθμικών τιμών, p_t, τις οποίες και θα αποκαλούμε για λόγους ευκολίας ως αποδόσεις και τιμές αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, αυτό πού θα κάνουμε είναι να αναλύσουμε στατιστικά εμπειρικές χρονοσειρές αποδόσεων και τιμών προκειμένου να εντοπίσουμε τυχόν στατιστικές κανονικότητες σε αυτές τις σειρές, οι οποίες με την σειρά τους θα μας υποδείξουν τις θεωρητικές ιδιότητες (εξάρτησης, ετερογένειας και κατανομής) πού πιθανόν να επιδεικνύουν οι στοχαστικές ανελίξεις $\{\widetilde{R}_t\}$ και $\{p_t\}$. Στην προσπάθεια μας αυτή, θα κάνουμε εκτενή χρήση των επονομαζόμενων "χρονοδιαγραμμάτων". Ένα χρονοδιάγραμμα έχει στον οριζόντιο άξονα τις περιόδους (χρονικές στιγμές) για τις οποίες έχουμε παρατηρήσεις. Ο κάθετος άξονας μετράει το υπό μελέτη φαινόμενο (π.χ αποδόσεις ή τιμές). Σε κάθε χρονική στιγμή t αντιστοιχούμε την τιμή της υπο-εξέταση μεταβλητής και στο τέλος ενώνουμε όλα αυτά τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα. Έτσι παράγουμε το χρονοδιάγραμμα, η εξέταση του οποίου μας αποκαλύπτει πολλές πληροφορίες για την συμπεριφορά της ανέλιξης πού μας ενδιαφέρει. Στην ανάλυση πού ακολουθεί, οι χρονικές περίοδοι με τις οποίες θα σχοληθούμε είναι οι ήμέρες, οι εβδομάδες οι μήνες τα τρίμηνα και τα έτη. Αυτό σημαίνει ότι θα αναλύσουμε ημερήσια, εβδομαδιαία, μηνιαία, τριμηνιαία και ετήσια στοιχεία αντίστοιχα. Όπως θα δούμε οι αποδόσεις των μετοχών παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές όσο περνάμε από τα μικρά χρονικά διαστήματα (π.χ. ημέρες ή εβδομάδες) στα μεγάλα χρονικά διαστήματα (π.χ. τρίμηνα ή έτη). Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι όσο πιό μικρό είναι το χρονικό διάστημα παρατήρησης τόσο μεγαλύτερη είναι η λεγόμενη "συχνότητα παρατήρησης".

Διαχρονική Εξάρτηση και Κατανομικά Χαρακτηριστικά των Αποδόσεων

Θα ξεκινήσουμε την εμπειρική διερεύνηση των ιδιοτήτων της ανέλιξης $\{\widetilde{R}_t\}$ από ένα σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα, δηλαδή το τρίμηνο. Μέ άλλα λόγια, ο δείκτης t θα συμβολίζει τρίμηνα. Το Διάγραμμα 1 παρουσιάζει τις τριμηνιαίες (λογαριθμικές) αποδόσεις του Αμερικανικού χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 για το χρονικό διάστημα 1947Q2-2018Q4 (όπου Q είναι το αρχικό γράμμα της λέξης Quarter=τρίμηνο). Ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι 287 και καλύπτουν (σχεδόν) όλη την μεταπολεμική ιστορία του Αμερικανικού χρηματιστηρίου.

Διάγραμμα 1
Τριμηνιαίες Αποδόσεις του Χρηματιστηριακού Δείκτη S&P 500 γιά την Περίοδο 1947Q2-2018Q4

Τι συμπεράσματα μπορούμε να εξάγουμε από την μελέτη του παραπάνω διαγράμματος? Το πρώτο ενδιαφέρον στοιχείο πού παρατηρούμε είναι ότι οι αποδόσεις του δείκτη φαίνονται να παλινδρομούν γύρω από ένα σταθερό μέσο. Ο μέσος αυτός δεν είναι άλλος από τον δειγματικό μέσο

$$\overline{\widetilde{R}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widetilde{R}_t = 0.0178.$$

Αυτό σημαίνει ότι η μέση τριμηνιαία απόδοση του S&P 500 για το υπο-εξέταση διάστημα είναι 0.0178 ή 1.78%. Το γεγονός ότι ο μέσος φαινεται να είναι σταθερός διαχρονικά (υπό την έννοια του ότι δεν παρατηρούμε ούτε διακριτά άλματα ούτε τάσεις στο χρονοδιάγραμμα) προτείνει ότι ο θεωρητικός μέσος $E(\widetilde{R}_t)$ είναι ο ίδιος γιά κάθε t, γεγονός πού υποδηλώνει ότι η ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι στάσιμη πρώτης τάξης. Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο πού αξίζει να εντοπίσουμε είναι το ότι η ταχύτητα με την οποία συντελείται αυτή η παλινδρόμηση γύρω από τον σταθερό μέσο είναι μεγάλη. Με άλλα λόγια οι αποδόσεις τείνουν να επιστρέφουν στο μέσο τους με μεγάλη ταχύτητα και δεν παραμένουν για πολλές περιόδους είτε πάνω είτε κάτω από αυτόν. Αυτό το χαρακτηριστικό, δηλαδή η μεγάλη ταχύτητα με την οποία η σειρά επιστρέφει στο μέσο της, θεωρείται ένδειξη απουσίας γραμμικής διαχρονικής εξάρτησης. Προκειμένου να διερευνήσουμε την ύπαρξη ή όχι γραμμικής διαχρονικής εξάρτησης στις αποδόσεις του δείκτη εκτιμούμε την δειγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$\widehat{\rho}(h) = \widehat{Corr}(\widetilde{R}_t, \widetilde{R}_{t-h}).$$

Αν οι εκτιμηθέντες συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι κοντά στο μηδέν, τότε η υποψία μας ότι οι τριμηνιαίες αποδόσεις είναι διαχρονικά ασυσχέτιστες επιβεβαιώνεται ακόμα περισσότερο. Ο Πίνακας 1 περιέχει τους πρώτους έξι συντελεστές αυτοσυσχέτισης, δηλαδή τις εκτιμήσεις $\widehat{\rho}(h)$ γιά $h = 1, 2, \ldots, 6$.

Πίνακας 1
Δειγματική Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης των Τριμηνιαίων Αποδόσεων του Δείκτη S&P 500

$$\begin{bmatrix} h & \widehat{\rho}(h) \\ 1 & 0.079 \\ 2 & -0.047 \\ 3 & -0.026 \\ 4 & -0.006 \\ 5 & 0.006 \\ 6 & -0.079 \end{bmatrix}.$$

Όντως, αυτό πού παρατηρούμε έιναι ότι όλοι οι εκτιμηθέντες συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι πολύ κοντά στο μηδέν, γεγονός πού επιβεβαιώνει την αρχική μας υποψία ότι η γραμμική διαχρονική εξάρτηση (δηλαδή η αυτοσυσχέτιση) απουσιάζει από την $\{\widetilde{R}_t\}$. Φυσικά, το τι σημαίνει "κοντά στο μηδέν" στη Στατιστική δεν καθορίζεται απλά και μόνο διαμορφώνοντας μιά "οπτική αίσθηση" περί της απόστασης της εκτίμησης μας από το μηδέν αλλά διενεργώντας τους κατάλληλους στατιστικούς ελέγχους. Στη προκειμένη περίπτωση ένας τέτοιος έλεγχος συνίσταται στο να ελέγξουμε την από-κοινού υπόθεση

$$H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \ldots = \rho(6) = 0,$$

έναντι της εναλλακτικής ότι τουλάχιστον ένας από τους έξι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι διάφορος του μηδενός. Πράγματι, ένας τέτοιος έλεγχος μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0 στα συνηθισμένα επίπεδα στατιστικής σημαντικότητας. Εναλλακτικά, αυτό πού μπορούμε να κάνουμε προκειμένου να ελέγξουμε την ύπαρξη γραμμικής εξάρτησης (αυτοσυσχέτισης) στις αποδόσεις είναι να εκτιμήσουμε ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο της μορφής,

$$\widetilde{R}_t = c + \rho_1\widetilde{R}_{t-1} + \rho_2\widetilde{R}_{t-2} + \ldots + \rho_l\widetilde{R}_{t-l} + \varepsilon_t.$$

Στη συνέχεια στα πλαίσια αυτού του μοντέλου μπορούμε να ελέγξουμε είτε τις ατομικές υποθέσεις $H_0 : \rho_i = 0,\ i = 1,2,\ldots,l$ με την χρήση των ελεγχοσυναρτήσεων t είτε την απο-κοινού υπόθεση $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_l = 0$ με τη χρήση της ελεγχοσυνάρτησης F. Στον πίνακα πού ακολουθεί παραθέτουμε τις εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων $\widehat{\rho}_i$ γιά $i = 1,2,3,4$ μαζί με τα τυπικά τους σφάλματα και τις αντίστοιχες τιμές των στατιστικών t.

Πίνακας 2
Εκτιμήσεις των Παραμέτρων του Αυτοπαλίνδρομου Μοντέλου AR(4) γιά τις Τριμηνιαίες Αποδόσεις του S&P 500

Παράμετρος	Εκτίμηση OLS	Τυπικό Σφάλμα	t-στατιστική
c	0.018	0.005	3.544
ρ_1	0.084	0.060	1.390
ρ_2	-0.054	0.060	-0.894
ρ_3	-0.017	0.061	-0.292
ρ_4	-0.004	-0.060	-0.077

Αυτό πού παρατηρούμε είναι ότι κάθε επιμέρους εκτίμηση $\widehat{\rho}_i$ εμφανίζεται να είναι μη στατιστικά σημαντική (δηλαδή δεν είναι στατιστικά διάφορη του μηδενός). Ως εκ τούτου συμπεραίνουμε εκ νέου ότι η γραμμική εξάρτηση είναι απούσα από τις αποδόσεις.

Το επόμενο ερώτημα είναι το εξής: Υπό το φώς των παραπάνω εμπειρικών ευρημάτων, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι ανεξάρτητη? Με άλλα λόγια το γεγονός ότι η $\{\widetilde{R}_t\}$ εμφανίζεται να είναι γραμμικά ανεξάρτητη (ασυσχέτιστη) σημαίνει ότι είναι και (γενικά) ανεξάρτητη? Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αρνητική. Η γραμμική ανεξαρτησία συνεπάγεται γενική ανεξαρτησία μόνο κάτω από την υπόθεση της Κανονικότητας. Αυτό σημαίνει ότι αν εξετάσουμε την κατανομή των αποδόσεων και τη βρούμε να είναι Κανονική, τότε νομιμοποιούμαστε να συμπεράνουμε ότι η έλλειψη γραμμικής εξάρτησης μεταφράζεται σε γενική ανεξαρτησία για την $\{\widetilde{R}_t\}$. Πώς θα ελέγξουμε εμπειρικά την υπόθεση ότι η κατανομή της (κάθε) $\widetilde{R}_t$ είναι η Κανονική? Ως γνωστόν, μιά τυχαία μεταβλητή πού ακολουθεί την Κανονική κατανομή έχει συντελεστή ασυμμετρίας α_3 ίσο με το μηδέν και συντελεστή κύρτωσης α_4 ίσο με 3. Κατά συνέπεια, ένας στατιστικός έλεγχος περί Κανονικότητας μπορεί να κατασκευαστεί στη βάση των υποθέσεων $\alpha_3 = 0$ και $\alpha_4 = 3$. Οι εκτιμήσεις $\widehat{\alpha}_3$ και $\widehat{\alpha}_4$ για τα δεδομένα των τριμηνιαίων αποδόσεων πού έχουμε στα χέρια μας είναι $\widehat{\alpha}_3 = -0.95$ και $\widehat{\alpha}_4 = 5.01$. Ένας τυπικός στατιστικός έλεγχος περί Κανονικότητας πού βασίζεται σε αυτές τις εκτιμήσεις είναι ο έλεγχος Jarque-Berra τού οποίου η τιμή για τις συγκεκριμένες τιμές των $\widehat{\alpha}_3$ και $\widehat{\alpha}_4$ είναι $JB = 91.12$. Με βάση αυτή την τιμή, η υπόθεση ότι η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{R}_t$ ακολουθεί την Κανονική κατανομή απορρίπτεται ακόμα και στο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας του 1%. Κατά συνέπεια, τα εμπειρικά δεδομένα των αποδόσεων δεν υποστηρίζουν την υπόθεση ότι προέρχονται από μιά Κανονική κατανομή.

Με βάση τα εμπειρικά ευρήματα περί της μη-Κανονικότητας των αποδόσεων, τι μπορούμε να πούμε περί της γενικής ανεξαρτησίας αυτών? Όπως ήδη αναφέραμε, εν τη απουσία Κανονικότητας, η έλλειψη γραμμικής εξάρτησης δεν μεταφράζεται αυτομάτως σε έλλειψη οποιασδήποτε μορφής εξάρτησης για την στοχαστική ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$. Αυτό σημαίνει ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\widetilde{R}_t$ μπορούν κάλιστα να επιδεικνύουν μη-γραμμική διαχρονική εξάρτηση. Το ερώτημα είναι τι είδους εξάρτηση μπορεί να είναι αυτή? Η σύγχρονη βιβλιογραφία έχει εντοπίσει αυτή τη μη-γραμμική διαχρονική ως προκύπτουσα από τη δεσμευμένη διακύμανση των αποδόσεων. Συγκεκριμένα, παρότι ο δεσμευμένος μέσος $E(\widetilde{R}_t \mid \widetilde{R}_{t-1}, \widetilde{R}_{t-2}, \ldots, \widetilde{R}_0)$ φαίνεται να είναι ίσος με τον αδέσμευτο μέσο $E(\widetilde{R}_t)$ καί άρα η ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$ να είναι "ανεξάρτητη ως προς το δεσμευμένο μέσο", κάτι τέτοιο δεν φαίνεται να ισχύει για τη δεσμευμένη διακύμανση. Συνοπτικά, φαίνεται να έχουμε τις εξής σχέσεις μεταξύ δεσμευμένων και αδέσμευτων ροπών,

$$E(\widetilde{R}_t \mid \widetilde{R}_{t-1}, \widetilde{R}_{t-2}, \ldots, \widetilde{R}_0) = E(\widetilde{R}_t)$$
$$Var(\widetilde{R}_t \mid \widetilde{R}_{t-1}, \widetilde{R}_{t-2}, \ldots, \widetilde{R}_0) \neq Var(\widetilde{R}_t).$$

Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι η δεσμευμένη διακύμανση λειτουργεί ως "φορέας εξάρτησης" για την ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$. Πιό συγκεκριμένα, η δεσμευμένη διακύμανση $Var(\widetilde{R}_t \mid \widetilde{R}_{t-1}, \widetilde{R}_{t-2}, \ldots, \widetilde{R}_0)$ της τυχαίας μεταβλητής $\widetilde{R}_t$ είναι συνάρτηση των τυχαίων μεταβλητών $\widetilde{R}_{t-1}, \widetilde{R}_{t-2}, \ldots, \widetilde{R}_0$, δηλαδή της "ιστορίας" της ανέλιξης έως την χρονική στιγμή t. Μπορούμε να εντοπίσουμε αυτή την εξάρτηση μελετώντας το χρονοδιάγραμμα των αποδόσεων? Πράγματι, αν προσέξουμε το πώς συμπεριφέρεται διαχρονικά η μεταβλητότητα των αποδόσεων στο Διάγραμμα 1, θα δούμε ότι η μεταβλητότητα εμφανίζεται κατά κύματα. Αυτό σημαίνει ότι μεγάλες αποδόσεις τείνουν να ακολουθούνται από επίσης μεγάλες αποδόσεις ενώ μικρές αποδόσεις τείνουν να ακολουθούνται από μικρές αποδόσεις. Αυτό το φαινόμενο έχει ονομαστεί στη βιβλιογραφία ως "volatility clustering". Ο πρώτος πού παρατήρησε αυτό το φαινόμενο ήταν ο Γάλλος μαθηματικός Benoit Mandelbrot το 1962 σε μιά μελέτη του για τη συμπεριφορά των τιμών του βαμβακιού. Μέχρι τότε οι στατιστικοί και οικονομολόγοι πού μελετούσαν την διαχρονική συμπεριφόρα των αποδόσεων δεν είχαν εντοπίσει αυτό το φαινόμενο. Ως εκ τούτου η επικρατούσα αντίληψη ήταν ότι η στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων ήταν ανεξάρτητη.

Πώς μπορούμε να ελέγξουμε εμπειρικά την ύπαρξη μη-γραμμικής διαχρονικής εξάρτησης στις αποδόσεις η οποία πηγάζει από την δεσμευμένη διακύμανση? Κατ'αρχήν οφείλουμε να δώσουμε ένα τεχνικό όρο στο συγκεκριμένο είδος εξάρτησης. Στη βιβλιογραφία έχει καθιερωθεί ο όρος "δυναμική ετεροσκεδαστικότητα" προκειμένου να περιγράψει την εξάρτηση πού έχει ως φορέα την δεσμευμένη διακύμανση. Κατά συνέπεια το πρόβλημα πού έχουμε είναι το πώς να ελέγξουμε την ύπαρξη δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας στις αποδόσεις. Ένας έλεγχος πού έχει προταθεί στη βιβλιογραφία βασίζεται στο τετράγωνο των αποδόσεων $\widetilde{R}_t^2$. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι η $\widetilde{R}_t^2$ αποτελεί μιά παρατηρήσιμη προσέγγιση της διακύμανσης της $\widetilde{R}_t$, ο υπό-συζήτηση έλεγχος βασίζεται στην διερεύνηση της ύπαρξης μή μηδενικών συσχετίσεων μεταξύ της $\widetilde{R}_t^2$ και των χρονικών υστερήσεων $\widetilde{R}_{t-1}^2,\ \widetilde{R}_{t-2}^2, \ldots \widetilde{R}_{t-h}^2$. Κατά συνέπεια, αυτό πού πρέπει να κάνουμε είναι να εκτιμήσουμε την δειγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$\widehat{\rho}_2(h) = \widehat{Corr}(\widetilde{R}_t^2, \widetilde{R}_{t-h}^2)$$

Αν οι εκτιμηθέντες συντελεστές αυτοσυσχέτισης $\widehat{\rho}_2(h)$ είναι κοντά στο μηδέν, τότε τα εμπειρικά μας δεδομένα δεν συνηγορούν υπέρ της παρουσίας δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας στις αποδόσεις. Αντίθετα, αν οι εκτιμήσεις $\widehat{\rho}_2(h)$ είναι στατιστικά διάφορες του μηδενός τότε η ανέλιξη των αποδόσεων χαρακτηρίζεται από δυναμική ετεροσκεδαστικότητα. Ο Πίνακας 3 περιέχει τους πρώτους έξι συντελεστές αυτοσυσχέτισης, δηλαδή τις εκτιμήσεις $\widehat{\rho}_2(h)$ γιά $h = 1, 2, \ldots, 6$.

Πίνακας 3
Δειγματική Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης των Τετραγώνων των Τριμηνιαίων Αποδόσεων του Δείκτη S&P 500

h	$\widehat{\rho}_2(h)$
1	0.081
2	0.127
3	0.155
4	0.014
5	0.029
6	0.021

Από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα, παρατηρούμε ότι οι τρείς πρώτοι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι σχετικά "μεγάλοι". Αυτό μας ενισχύει την υποψία ότι στις τριμηνιαίες αποδόσεις του S&P 500 υπάρχει δυναμική ετεροσκεδαστικότητα. Προκειμένου να ελέγξουμε πιό μεθοδικά την υπόθεση αυτή, εκτιμούμε ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο AR(4) γιά τα τετράγωνα των αποδόσεων,

$$\widetilde{R}_t^2 = c_1 + \varphi_1 \widetilde{R}_{t-1}^2 + \varphi_2 \widetilde{R}_{t-2}^2 + \varphi_3 \widetilde{R}_{t-3}^2 + \varphi_4 \widetilde{R}_{t-4}^2 + v_t. \qquad \#$$

Στον πίνακα πού ακολουθεί παραθέτουμε τις εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων $\widehat{\varphi}_i$ γιά $i = 1, 2, 3, 4$ μαζί με τα τυπικά τους σφάλματα και τις αντίστοιχες τιμές των στατιστικών t.

Πίνακας 4
Εκτιμήσεις των Παραμέτρων του Αυτοπαλίνδρομου Μοντέλου AR(4) γιά τα Τετράγωνα των Τριμηνιαίων Αποδόσεων του S&P 500

Παράμετρος	Εκτίμηση OLS	Τυπικό Σφάλμα	t-στατιστική
c_1	0.0044	0.0009	5.024
φ_1	0.0545	0.0602	0.905
φ_2	0.1131	0.0591	1.894
φ_3	0.1413	0.0590	2.368
φ_4	-0.0207	0.0602	-0.343

Αυτό πού παρατηρούμε είναι ότι η $\widehat{\varphi}_2$ είναι στατιστικά σημαντική στο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 10% ενώ η $\widehat{\varphi}_3$ είναι στατιστικά σημαντική στο επίπεδο 5%. Κατά συνέπεια, συμπεραίνουμε ότι οι τριμηνιαίες αποδόσεις του S&P500 επιδεικνύουν ένα χαμηλό βαθμό δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας.

Ένα άλλο σημαντικό εύρημα της σύγχρονης βιβλιογραφίας είναι ότι ο βαθμός έντασης του φαινομένου της δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας αυξάνεται όσο μειώνεται το χρονικό διάστημα των παρατηρήσεων μας ή με άλλα λόγια όσο αυξάνεται η συχνότητα των παρατηρήσεων μας. Αυτό σημαίνει ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων φ_i αυξάνονται όσο πηγαίνουμε από τις τριμηνιαίες παρατηρήσεις, στις μηνιαίες, στις εβδομαδιαίες και τέλος στις ημερήσιες. Επιπλέον, αυτό πού επίσης αυξάνεται, όσο μειώνουμε το διάστημα των παρατηρήσεων μας, είναι ο βαθμός της μη-Κανονικότητας των αποδόσεων. Συγκεκριμένα, ο συντελεστής κύρτωσης α_4 αυξάνεται όσο αυξάνεται η συχνότητα των παρατηρήσεων. Ο Πίνακας 5 περιέχει τους συντελεστές ασυμμετρίας και κύρτωσης για τις αποδόσεις του S&P500 γιά τις περιπτώσεις των τριμηνιαίων, μηνιαίων, εβδομαδιαίων και ημερησίων παρατηρήσεων για το διάστημα 28/2/2000 έως 31/12/2018.

Πίνακας 5
Συντελεστές Ασυμμετρίας και Κύρτωσης γιά τις Αποδόσεις του S&P 500 για Διαφορετικές Συχνότητες Παρατήρησης

	Τριμηνιαίες	Μηνιαίες	Εβδομαδιαίες	Ημερήσιες
α_3	-0.96	-0.79	-0.90	-0.21
α_4	3.87	4.61	10.48	12.04

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι όντως η εκτίμηση $\widehat{\alpha}_4$ του συντελεστή κύρτωσης α_4 αυξάνεται όσο μειώνουμε το διάστημα παρατήρησης. Για παράδειγμα, ο συντελεστής κύρτωσης για την περίπτωση των ημερήσιων αποδόσεων είναι πάνω από τρείς φορές μεγαλύτερος τού συντελεστή κύρτωσης των τριμηνιαίων αποδόσοεων. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται στη βιβλιογραφία ως "παχιά άκρα" (fat tails) της κατανομής των αποδόσεων. Η αντίστοιχη κατανομή των αποδόσεων χαρακτηρίζεται ως "λεπτόκυρτη" κατανομή με το βαθμό της λεπτοκύρτωσης να φτάνει στη μεγαλύτερη τιμή του για τις ημερήσιες αποδόσεις. Σχετικά με την ασυμμετρία, αυτό πού παρατηρούμε είναι την ύπαρξη αρνητικής ασυμμετρίας σε κάθε συχνότητα παρατήρησης. Επιπλέον, δεν φαίνεται να υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ της έντασης της ασυμμετρίας και της συχνότητας παρατήρησης.

Ας συνοψίσουμε τα μέχρι τώρα εμπειρικά μας ευρήματα:

(i) Το πρώτο εύρημα είναι ότι οι αποδόσεις χαρακτηρίζονται από απουσία γραμμικής διαχρονικής εξάρτησης (ή αυτοσυσχέτισης). Αυτό μας επιτρέπει να υιοθετήσουμε την υπόθεση ότι η ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι ανεξάρτητη ως πρός τον δεσμευμένο μέσο. Βέβαια η υπόθεση της ανεξαρτησίας ως προς το δεσμευμένο μέσο είναι ισχυρότερη από την υπόθεση της γραμμικής ανεξαρτησίας, γεγονός πού (άν θέλουμε να εξαντλήσουμε την αυστηρότητα μας) δεν μας επιτρέπει να κάνουμε την συνεπαγωγή

$$\text{Γραμμική Ανεξαρτησία} \Rightarrow \text{Ανεξαρτησία ως προς το Δεσμευμένο Μέσο.}$$

Πλην όμως, θεωρούμε ότι η ανεξαρτησία ως προς το δεσμευμένο μέσο όντως έχει εμπειρική υποστήριξη και συνεπώς την υιοθετούμε χωρίς περαιτέρω δισταγμούς. Κατά συνέπεια, δεχόμαστε ότι

$$E(\widetilde{R}_t \mid \widetilde{R}_{t-1}, \widetilde{R}_{t-2}, \ldots, \widetilde{R}_0) = E(\widetilde{R}_t).$$

Η εκτίμηση για τον αδέσμευτο μέσο $E(\widetilde{R}_t)$ στη περίπτωση των τριμηνιαίων αποδόσεων γιά το διάστημα 1947Q2-2018Q4 είναι $\overline{\widetilde{R}} = 0.0178$. Το γεγονός ότι ο αδέσμευτος μέσος $E(\widetilde{R}_t)$ είναι διάφορος του μηδενός και θετικός (και θα δούμε ότι πέρα της εμπειρικής εκτίμησης υπάρχουν και θεωρητικοί λόγοι πού προβλέπουν κάτι τέτοιο) δεν μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε την $\{\widetilde{R}_t\}$ ως martingale διαφοράς.

(ii) Παρά την απουσία εξάρτησης πού να πηγάζει από το δεσμευμένο μέσο, η ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$ δεν είναι ανεξάρτητη. Ο λόγος είναι η παρουσία εξάρτησης πού αναδύεται μέσω της δεσμευμένης διακύμανσης. Αυτό σημαίνει ότι

$$Var(\widetilde{R}_t \mid \widetilde{R}_{t-1}, \widetilde{R}_{t-2}, \ldots, \widetilde{R}_0) = g(\widetilde{R}_{t-1}, \widetilde{R}_{t-2}, \ldots, \widetilde{R}_0)$$

όπου g είναι μιά συνάρτηση πού περιγράφει την ακριβή δομή της συγκεκριμένης εξάρτησης. Την εξάρτηση αυτή την ονομάσαμε δυναμική ετεροσκεδαστικότητα. Ο βαθμός της δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας καθίσταται εντονώτερος όσο αυξάνουμε την συχνότητα των παρατηρήσεων μας. Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ετεροσκεδαστικότητα είναι πιό έντονη στις ημερήσιες αποδόσεις από ότι στις τριμηνιαίες ή στις ετήσιες αποδόσεις.

(iii) Η κατανομή των αποδόσεων εμφανίζεται να είναι μη-Κανονική γιά κάθε συχνότητα παρατήρησης. Η μη-Κανονικότητα οφείλεται τόσο στη παρουσία αρνητικής ασυμμετρίας όσο και (κυρίως) στην ύπαρξη λεπτοκύρτωσης. Ο βαθμός λεπτοκύρτωσης είναι μεγαλύτερος όσο συχνότερο είναι το διάστημα των παρατηρήσεων. Ως εκ τούτου, οι ημερήσιες αποδόσεις χαρακτηρίζονται από τον μέγιστο βαθμό λεπτοκύρτωσης, το οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι οι ημερήσιες αποδόσεις επιδεικνύουν τον μεγαλύτερο βαθμό μη-Κανονικότητας.

Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι η στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_t\}$ δεν είναι μιά ανεξάρτητη ανέλιξη όπως επίσης δεν είναι και Κανονική. Επιπλέον, οι αποκλίσεις από την ανεξαρτησία και την Κανονικότητα είναι ιδιαιτέρως έντονες στις ημερήσιες και εβδομαδιαίες αποδόσεις ενώ είναι λιγότερο έντονες στις τριμηνιαίες και στις ετήσιες. Όπως αναφέραμε ήδη, αρχικά η εμπειρική βιβλιογραφία αγνόησε την παρουσία της δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας όπως επίσης υποβάθμισε τις ενδείξεις περί μη-Κανονικότητας των αποδόσεων. Ως εκ τούτου το αρχικό μοντέλο γιά την στοχαστική ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$ (το οποίο κυριάρχησε τουλάχιστον μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 70) ήταν ότι οι αποδόσεις ήταν ανεξάρτητες, ταυτόνομες και Κανονικές τυχαίες μεταβλητές,

$$\widetilde{R}_t \sim NIID(\mu_{\widetilde{R}}, \sigma^2_{\widetilde{R}}). \qquad \#$$

Αυτό είχε ως συνέπεια, την υπόθεση ότι η στοχαστική ανέλιξη των λογαριθμικών τιμών $\{p_t\}$ ακολουθεί ένα Κανονικό τυχαίο περίπατο. Στην υποενότητα πού ακολουθεί αναλύουμε εν συντομία κάποιες ιδιότητες αυτού του μοντέλου. Η ανάλυση αυτού του μοντέλου δεν σημαίνει ότι το αποδεχόμαστε ως ικανοποιητική περιγραφή της $\{\widetilde{R}_t\}$ ιδίως όταν η συχνότητα παρατήρησης είναι μεγάλη (π.χ ημερήσιες παρατηρήσεις). Ο λόγος πού το συζητάμε είναι αφενός μεν για ιστορικούς λόγους και αφετέρου για το ότι για μικρή συχνότητα παρατήρησης (π.χ ετήσιες παρατηρήσεις) το μοντέλο αυτό αποτελεί μιά καλή προσέγγιση του πραγματικού μοντέλου πού περιγράφει την $\{\widetilde{R}_t\}$.

Το Μοντέλο του Κανονικού Τυχαίου Περίπατου γιά τις Λογαριθμικές Τιμές

Η ανάλυση ξεκινά από την αποδοχή της υπόθεσης (ref: niid_r1) ότι δηλαδή η στοχαστική ανέλιξη των (λογαριθμικών) αποδόσεων είναι μια Κανονική, ανεξάρτητη και ταυτόνομη ανέλιξη. Αμέσως καταλαβαίνουμε από τη σχέση (ref: pric_rw) ότι η ανέλιξη $\{p_t\}$ ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο. Επιπλέον αφού ο μέσος, $\mu_{\widetilde{R}}$, της "γενεσιουργού" ανέλιξης $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι (εξ'υποθέσεως) θετικός, η $\{p_t\}$ ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο με τάση (random walk with drift). Αφού ο μέσος $\mu_{\widetilde{R}}$ είναι διάφορος του μηδενός, τότε γνωρίζουμε από τη Θεωρία Πιθανοτήτων ότι υπάρχει μιά άλλη Κανονική, ανεξάρτητη και ταυτόνομη ανέλιξη $\{V_t\}$ με μηδενικό μέσο και διακύμανση $\sigma_V^2 = \sigma_{\widetilde{R}}^2$ τέτοια ώστε

$$\widetilde{R}_t = \mu_{\widetilde{R}} + V_t \qquad \#$$

όπου

$$V_t \sim NIID(0, \sigma_V^2). \qquad \#$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (ref: pric_rw), (ref: dec1) και (ref: dec2) συμπεραίνουμε ότι

$$p_t = \mu_{\widetilde{R}} + p_{t-1} + V_t. \qquad \#$$

Η σχέση (ref: rw_d2) ισχύει γιά κάθε χρονική περίοδο t και άρα ισχύει και για την περίοδο $t-1$. Αυτό μας επιτρέπει να εκφράσουμε την ακόλουθη σχέση

$$p_{t-1} = \mu_{\widetilde{R}} + p_{t-2} + V_{t-1}. \qquad \#$$

Αντικαθιστώντας τον όρο p_{t-1} στην (ref: rw_d2) από την έκφραση για το p_{t-1} στην (ref: rw_dd2a) έχουμε,

$$p_t = \mu_{\widetilde{R}} + (\mu_{\widetilde{R}} + p_{t-2} + V_{t-1}) + V_t,$$

και άρα,

$$p_t = 2\mu_{\widetilde{R}} + p_{t-2} + V_t + V_{t-1}. \qquad \#$$

Στην τελευταία σχέση εμφανίζεται ο όρος p_{t-2} για τον οποίο είναι εμφανές ότι ισχύει,

$$p_{t-2} = \mu_{\widetilde{R}} + p_{t-3} + V_{t-2}.$$

Αντικαθιστώντας το p_{t-2} στην (ref: rw_d2b) έχουμε,

$$p_t = 2\mu_{\widetilde{R}} + (\mu_{\widetilde{R}} + p_{t-3} + V_{t-2}) + V_t + V_{t-1} \qquad \#$$

ή εναλλακτικά

$$p_t = 3\mu_{\widetilde{R}} + p_{t-3} + V_t + V_{t-1} + V_{t-2}.$$

Άρα μετά από δύο διαδοχικές αντικαταστάσεις έχουμε μιά έκφραση γιά την p_t ως συνάρτηση της $3\mu_{\tilde{R}}$, της p_{t-3} και των όρων V_t, V_{t-1} και V_{t-2}. Αν προχωρήσουμε και σε τρίτη διαδοχική αντικατάσταση (του p_{t-3}) θα προκύψει μιά έκφραση γιά την p_t ως συνάρτηση της $4\mu_{\tilde{R}}$, της p_{t-4} και των όρων V_t, V_{t-1}, V_{t-2} και V_{t-3}. Προχωρόντας ακόμα περισσότερο τη διαδικασία των διαδοχικών αντικαταστάσεων θα φτάσουμε έπειτα από $t-1$ διαδοχικές αντικαταστάσεις να έχουμε μιά έκφραση γιά την p_t ως συνάρτηση της $[(t-1)+1]\mu_{\tilde{R}} = t\mu_{\tilde{R}}$, της $p_{t-(t-1+1)} = p_0$ και των όρων V_t, V_{t-1}, $V_{t-2},\ldots,V_1$:

$$p_t = t\mu_{\tilde{R}} + p_0 + \sum_{i=0}^{t-1} V_{t-i}. \qquad \#$$

Η τελευταία έκφραση μας δίνει την τρέχουσα (λογαριθμική) τιμή ως συνάρτηση της αρχικής τιμής p_0 στο χρονικό σημείο $t = 0$ στο οποίο ξεκίνησε η ανέλιξη, τού όρου $t\mu_{\tilde{R}}$ ο οποίος εκφράζει μιά γραμμική συνάρτηση του χρόνου (μιά γραμμική τάση) και του αθροίσματος των όρων της V_1, $V_2,\ldots,$ V_{t-1}, V_t της γενεσιουργού ανέλιξης $\{V_t\}$.

Η τελευταία έκφραση για την p_t μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά διαχρονικής ετερογένειας (στασιμότητας ή μη-στασιμότητας) πού επιδεικνύει η ανέλιξη των τιμών $\{p_t\}$. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε τη διαχρονική συμπεριφορά των μέσων $E(p_t)$ και των διακυμάνσεων $Var(p_t)$ των τυχαίων μεταβλητών p_t. Εφαρμόζοντας τον τελεστή $E()$ και στα δύο μέλη της (ref: rw_fin1) έχουμε,

$$E(p_t) = E\left(t\mu_{\tilde{R}} + p_0 + \sum_{i=0}^{t-1} V_{t-i}\right) = t\mu_{\tilde{R}} + p_0 + E\left(\sum_{i=0}^{t-1} V_{t-i}\right) = \qquad \#$$
$$= t\mu_{\tilde{R}} + p_0 + \sum_{i=0}^{t-1} E(V_{t-i}) = t\mu_{\tilde{R}} + p_0.$$

Παρατήρηση

Οι παραπάνω ισότητες βασίστηκαν στο γεγονός ότι οι όροι $t\mu_{\tilde{R}}$ και p_0 δεν είναι τυχαίες μεταβλητές καί άρα $E(t\mu_{\tilde{R}}) = t\mu_{\tilde{R}}$ και $E(p_0) = p_0$ καθώς επίσης και από την υπόθεση ότι όλες οι τυχαίες μεταβλητές V_t έχουν μηδενικό μέσο.

Από την σχέση (ref: mean_ns) προκύπτει αμέσως ότι οι μέσοι των τυχάιων μεταβλητών p_t αλλάζουν γραμμικά με το t, το οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι η ανέλιξη $\{p_t\}$ δεν έχει σταθερό μέσο.

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια τη συμπεριφορά των διακυμάνσεων $Var(p_t)$ των τυχαίων μεταβλητών p_t. Εφαρμόζοντας τον τελεστή $Var()$ και στα δύο μέλη της (ref: rw_fin1) έχουμε,

$$Var(p_t) = Var\left(t\mu_{\tilde{R}} + p_0 + \sum_{i=0}^{t-1} V_{t-i}\right) = Var\left(\sum_{i=0}^{t-1} V_{t-i}\right) = \qquad \#$$
$$= \sum_{i=0}^{t-1} Var(V_{t-i}) = t\sigma_V^2.$$

Παρατήρηση

Στην εξαγωγή της παραπάνω σχέσης χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ανέλιξη

$\{V_t\}$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη, το οποίο με τη σειρά του μας επέτρεψε να θέσουμε την διακύμανση του αθροίσματος $Var\left(\sum_{i=0}^{t-1} V_{t-i}\right)$ ίση με το άθροισμα των διακυμάνσεων $\sum_{i=0}^{t-1} Var(V_{t-i})$ αφού οι συνδιακυμάνσεις μεταξύ των όρων της $\{V_t\}$ είναι όλες ίσες με το μηδέν.

Οι σχέσεις (ref: mean_ns) και (ref: var_ns) δείχνουν ότι τόσο οι μέσοι όσο και οι διακυμάνσεις των τυχαίων μεταβλητών p_t δεν είναι σταθεροί στο χρόνο αλλά αυξάνονται γραμμικά με το χρόνο. Ως εκ τούτου συμπεραίνουμε αμέσως ότι η ανέλιξη $\{p_t\}$ δεν είναι στασιμη ούτε πρώτης ούτε δεύτερης τάξης. Η σχέση (ref: mean_ns) η οποία εκφράζει την ποσότητα $E(p_t)$ ως γραμμική, θετική συνάρτηση του χρόνου t μας επιτρέπει να πούμε ότι η ανέλιξη $\{p_t\}$ έχει μιά "ντετερμινιστική τάση". Από την άλλη, η σχέση (ref: var_ns), σύμφωνα με την οποία η $Var(p_t)$ είναι γραμμική, θετική συνάρτηση του t, μας επιτρέπει να πούμε ότι η $\{p_t\}$ έχει μιά "στοχαστική τάση".

Είναι ενδιαφέρον να δούμε το χρονοδιάγραμμα της διαθέσιμης πραγματοποίησης της $\{p_t\}$ προκειμένου να εντοπίσουμε σε αυτό το διάγραμμα τόσο την ντετερμινιστική όσο και την στοχαστική τάση. Το Διάγραμμα 2 παρουσιάζει τις τριμηνιαίες (λογαριθμικές) τιμές του Αμερικανικού χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500 για το χρονικό διάστημα 1947Q2-2018Q4.

Διάγραμμα 2
Τριμηνιαίες Λογαριθμικές Τιμές του Χρηματιστηριακού Δείκτη S&P 500 γιά την Περίοδο 1947Q2-2018Q4

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε αμέσως την ύπαρξη μιάς ανοδικής τάσης στις λογαριθμικές τιμές. Αυτή η τάση, η οποία αντανακλάται στο γεγονός ότι όσο προχωράει ο χρόνος τόσο η σειρά τείνει να κινείται σε υψηλότερα επίπεδα, αντιστοιχεί στην ντετερμινιστική τάση πού εξάγαμε στην σχέση (ref: mean_ns). Πού αντανακλάται η στοχαστική τάση, η οπία δεν είναι άλλη παρά η διαρκώς αυξανόμενη διακύμανση $Var(p_t)$? Την ύπαρξη της στοχαστικής τάσης είναι πιό δύσκολο να την διακρίνουμε από την ντετερμινιστική τάση. Αυτό πού μπορούμε να πούμε είναι το ότι η στοχαστική τάση εμφανίζεται στην ταχύτητα με την οποία η χρονοσειρά τείνει να επιστρέφει στη ντετερμινιστική τάση. Αν η σειρά αποκλίνει από την ντετερμινιστική τάση και αυτή η απόκλιση διατηρείται για αυθαίρετα μεγάλο αριθμό περιόδων, τότε η σειρά επιδεικνύει και στοχαστική (πέρα της ντετερμινιστικής) τάση. Στη περίπτωση των λογαριθμικών τιμών παρατηρούμε ότι όντως οι αποκλίσεις από την (νοητή) ντετερμινιστική τάση του διαγράμματος δεν διαρκούν για λίγες χρονικές περιόδους. Αντίθετα, η σειρά μπορεί να παραμείνει είτε πάνω είτε κάτω από την ντετερμινιστική τάση για μεγάλο αριθμό περιόδων. Αυτό το χαρακτηριστικό, όπως είπαμε παραπάνω, υποδηλώνει την ύπαρξη της στοχαστικής τάσης όπως αναλυτικά εκφράζεται από τη σχέση (ref: var_ns).

Όπως αναφέραμε η υπόθεση ότι η ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη με μη-μηδενικό μέσο είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι η $\{p_t\}$ είναι ένας τυχαίος περίπατος με τάση. Το αν η $\{p_t\}$ είναι και Κανονικός τυχαίος περίπατος επίσης εξαρτάται από το αν η $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι Κανονική ανέλιξη. Όπως είδαμε ήδη η (κάθε) τυχαία μεταβλητή $\widetilde{R}_t$ δεν φαίνεται να ακολουθεί την Κανονική κατανομή , ιδίως γιά συχνά διαστήματα παρατήρησης, όπως η ημέρα ή η εβδομάδα. Στην επόμενη ενότητα θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην κατανομή των αποδόσεων $\widetilde{R}_t$ και θα αναρωτηθούμε τούς λόγους γιά τους οποίους αυτή η κατανομή παρουσιάζει σημαντικές αποκλίσεις από την Κανονική. Όπως θα δούμε το θέμα αυτό είναι ιδιαίτερα σύνθετο εξαιτίας τού ότι υπάρχει ένας πολύ καλός θεωρητικός λόγος για τον οποίο η κατανομή της $\widetilde{R}_t$ "οφείλει να είναι" η Κανονική. Ποιός είναι αυτός ο λόγος? Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) το οποίο θέτει τη συνθήκες έτσι ώστε το άθροισμα ενός (μεγάλου) αριθμού τυχαίων μεταβλητών πού ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες να προσεγγίζει την Κανονική κατανομή. Με δεδομένο ότι η $\widetilde{R}_t$ είναι το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού τυχαίων μεταβλητών (όπως θα δείξουμε στην επόμενη ενότητα), η μη-Κανονικότητα της $\widetilde{R}_t$ υπαινίσσεται ότι γιά κάποιο λόγο το ΚΟΘ δεν εφαρμόζεται στη περίπτωση της $\widetilde{R}_t$. Με άλλα λόγια, οι τυχαίες μεταβλητές - των οποίων το άθροισμα δίνει την $\widetilde{R}_t$ - δεν επιδεικνύουν εκείνες τις ιδιότητες πού απαιτεί το ΚΟΘ γιά να οδηγήσει στο αποτέλεσμα της οριακής Κανονικότητας. Σε αυτή τη περίπτωση τίθεται το ερώτημα μήπως υπάρχει κάποιο εναλλακτικό οριακό θεώρημα το οποίο να ισχύει για την περίπτωση ης $\widetilde{R}_t$ και μάλιστα το εναλλακτικό αυτό θεώρημα να υποδεικνύει ως οριακή κατανομή μιά λεπτόκυρτη κατανομή. Τα ερωτήματα αυτά θα αναλυθούν στη συνέχεια.

Μη-Κανονική Κατανομή των Αποδόσεων και Οριακά Θεωρήματα

Το αρχικό ερώτημα πού θα εξετάσουμε αφορά το εξής παράδοξο: Όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα (και έχει δειχθεί επανειλημμένως στη βιβλιογραφία) η κατανομή των αποδόσεων $\widetilde{R}_t$ δεν φαίνεται να είναι η Κανονική. Αντίθετα, η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{R}_t$ εμφανίζεται να ακολουθεί μια λεπτόκυρτη κατανομή της οποίας τα άκρα είναι πιό έντονα (παχιά) από τα αντίστοιχα της Κανονικής. Αυτό από μόνο του δεν συνιστά κάποιο παράδοξο. Η Κανονική δεν είναι η μόνη δυνατή κατανομή πού μιά εμπειρική τυχαία μεταβλητή δύναται να ακολουθεί. Το παράδοξο προκύπτει από το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{R}_t$ μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού κάποιων άλλων τυχαίων μεταβλητών. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στη σκέψη ότι αν αυτές οι (άλλες) τυχαίες μεταβλητές ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες τότε ανοίγει το πεδίο για την εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού

Θεωρήματος το οποίο με τη σειρά του οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $\widetilde{R}_t$ ακολουθεί κατά προσέγγιση την Κανονική κατανομή.

Ποιές είναι οι τυχαίες μεταβλητές ως συνάρτηση των οποίων μπορεί να εκφραστεί η $\widetilde{R}_t$? Ας υποθέσουμε ότι η (λογαριθμική) απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου μεταξύ των περιόδων $t-1$ και t είναι η $\widetilde{R}_t$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι μέσα σε αυτή την χρονική περίοδο (π.χ. μιά ημέρα) λαμβάνουν χώρα n στοιχειώδεις λογαριθμικές αποδόσεις ξ_{tj}, $j = 1,2,\ldots,n$. Ως στοιχειώδη απόδοση εννοούμε αυτή η οποία πραγματοποιείται από την μιά συναλλαγή στην άλλη. Μέσα στη χρονική περίοδο t συντελούνται n τέτοιες στοιχειώδεις συναλλαγές. Κατά συνέπεια, και με βάση την σχέση (ref: ret_rel1a), μπορούμε να εκφράσουμε την $\widetilde{R}_t$ ως το άθροισμα των ξ_{tj} πού πραγματοποιούνται εντός της χρονικής περίοδου t,

$$\widetilde{R}_t = \sum_{j=1}^{n} \xi_{tj}. \qquad \#$$

Κατά συνέπεια διαπιστώνουμε ότι το πρώτο χαρακτηριστικό για την εφαρμογή του ΚΟΘ, δηλαδή να έχουμε μιά τυχαία μεταβλητή πού να είναι το άθροισμα πολλών άλλων, ικανοποιείται. Το ερώτημα είναι ποιά είναι τα χαρακτηριστικά εξάρτησης, ετερογένειας και κατανομής πού πρέπει να επιδεικνύουν οι ξ_{tj}, $j = 1,2,\ldots,n$ προκειμένου να μπορούμε να επικαλεστούμε το ΚΟΘ. Το κεντρικό οριακό θεώρημα πού συναντήσαμε στο Κεφάλαιο 5, απαιτεί από τις ξ_{tj} να είναι ανεξάρτητες, ταυτόνομες και να έχουνε πεπερασμένη διακύμανση, $Var(\xi_{tj}) = \sigma^2_{\xi_{tj}} < \infty,\ \forall j$. Αυτό σημαίνει ότι αν οι στοιχειώδεις αποδόσεις μπορούν να θεωρηθουν ως ανεξάρτητες και ταυτόνομες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη διακύμανση, τότε η $\widetilde{R}_t$ θα ήταν ασυμπτωτικά Κανονική. Είδαμε όμως ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Η κατανομή της $\widetilde{R}_t$ παρουσιάζει σημαντικές αποκλίσεις από την Κανονικότητα ιδίως για την περίπτωση των ημερήσιων και εβδομαδιαίων αποδόσεων. Κατά συνέπεια, αυτό πού προκύπτει ως λογικό συμπέρασμα είναι ότι κάποια ή κάποιες από τις προαναφερθείσες ιδιότητες πού απαιτεί το ΚΟΘ, δηλαδή ανεξαρτησία, ταυτονομία και πεπερασμένη διακύμανση των ξ_{tj} θα πρέπει να παραβιάζονται. Ποιά ή ποιές είναι αυτές οι ιδιότητες? Έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις δεν είναι ανεξάρτητες αλλά επιδεικνύουν μη-γραμμική διαχρονική εξάρτηση η οποία παίρνει τη μορφή της δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας. Επιπλέον αυτή η εξάρτηση είναι πιό έντονη για συχνά διαστήματα παρατήρησης. Με δεδομένο ότι το συχνότερο δυνατό διάστημα παρατήρησης είναι αυτό των στοιχειωδών αποδόσεων (δηλαδή η απόδοση από τη μιά συναλλαγή στην άλλη) μπορούμε να υποθέσουμε με σχετική ασφάλεια ότι οι ξ_{tj} επιδεικνύουν έντονη δυναμική ετεροσκεδαστικότητα. Αυτό με τη σειρά του μας κάνει να αναρωτηθούμε μήπως αυτή η μη-γραμμική εξάρτηση των ξ_{tj} είναι υπεύθυνη για την μη-εφαρμογή του ΚΟΘ στη περίπτωση της (ref: sum_r1). Στο σημείο αυτό πρέπει να είμαστε ιδιαιτέρως προσεκτικοί. Αν το ΚΟΘ πού συναντήσαμε στο Κεφάλαιο 5 ήταν το μόνο κεντρικό οριακό θεώρημα και αν οι συνθήκες της ανεξαρτησίας, ταυτονομίας και πεπερασμένης διακύμανσης ήταν το μόνο σύνολο συνθηκών πού εξασφάλιζαν την ισχύ του θεωρήματος, τότε όντως η ύπαρξη μη-γραμμικής εξάρτησης των ξ_{tj} θα ήταν ικανός λόγος να εξηγήσει την έλλειψη Κανονικότητος στην $\widetilde{R}_t$. Πλην όμως, η παραπάνω εκδοχή του ΚΟΘ δεν είναι η μοναδική. Στη πραγματικότητα, η εκδοχή του ΚΟΘ πού απαιτεί, ανεξαρτησία ταυτονομία και πεπερασμένη διακύμανση, είναι η πιό περιοριστική εκδοχή του ΚΟΘ. Με την πάροδο του χρόνου, η Θεωρία Πιθανοτήτων εμπλουτίστηκε από λιγότερο περιοριστικές μορφές του ΚΟΘ, κάποιες εκ των οποίων επιτρέπουν στις συνιστώσες τυχαίες μεταβλητές (εν προκειμένω στις ξ_{tj}) να επιδεικνύουν τόσο εξάρτηση όσο και ετερογένεια. Πιό συγκεκριμένα, σε αυτές τις εκδοχές του ΚΟΘ, η ανεξαρτησία έχει υποκατασταθεί από κάποιες συγκεκριμένες μορφές εξάρτησης τις οποίες δύνανται να επιδεικνύουν οι ξ_{tj}. Όλες αυτές οι μορφές εξάρτησης επιτρέπουν την εξάρτηση μεταξύ "γειτονικών" τυχαίων μεταβλητών αλλά επιβάλλουν την μείωση της εξάρτησης όσο η απόσταση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών μεγαλώνει. Ασυμπτωτικά, η ανεξαρτησία αποκαθίσταται με την μορφή της επονομαζόμενης "ασυμπτωτικής ανεξαρτησίας". Κατά συνέπεια, για την περίπτωση πού μας ενδιαφέρει, μπορούμε να επιτρέψουμε στις ξ_{tj} να είναι εξαρτημένες αρκεί να έιναι παράλληλα ασυμπτωτικά ανεξάρτητες. Στο παράρτημα του παρόντος κεφαλάιου παραθέτουμε διάφορες παραλλαγές του ΚΟΘ στις οποίες οι αρχικές τυχαίες μεταβλητές (εν προκειμένω οι ξ_{tj}) επιδεικνύουν εναλλακτικές μορφές εξάρτησης η οποία φθίνει ασυμπτωτικά. Όπως παρατηρούμε από την μελέτη αυτών των θεωρημάτων η σύγκλιση στη Κανονική κατανομή είναι δυνατή ακόμα και εν τη παρουσία σημαντικής εξάρτησης (και ετερογένειας) στις αρχικές τυχαίες μεταβλητές. Κατά συνέπεια, η ύπαρξη της δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας στις ξ_{tj} δεν φαίνεται να είναι ιδιαιτέρως απειλητική για το ΚΟΘ. Κάπου αλλού πρέπει να είναι το πρόβλημα εξαιτίας του οποίου το ΚΟΘ δεν βρίσκει εφαρμογή. Πράγματι, αν μελετήσουμε με προσοχή τα θεωρήματα του παραρτήματος θα δούμε ότι όλα υποθέτουν την ύπαρξη ροπών τάξεως μεγαλύτερης του 2. Αυτό σημαίνει ότι μιά κοινή υπόθεση όλων των κεντρικών οριακών θεωρημάτων είναι ότι η διακύμανση των ξ_{tj} είναι πεπερασμένη. Άρα αν η διακύμανση των ξ_{tj} είναι άπειρη τότε το ΚΟΘ δεν ισχύει και συνεπώς η παρουσία της λεπτοκύρτωσης μπορεί να εξηγηθεί.

Την ιδέα ότι η διακύμανση των ξ_{tj} είναι άπειρη την εισήγαγε στη βιβλιογραφία ο Mandelbrot στις αρχές της δεκαετίας του 1960. Διαισθητικά, η υπόθεση της άπειρης διακύμανσης αντιστοιχεί στην ιδέα ότι η μεταβολή της τιμής της μετοχής από τη μιά συναλλαγή στην άλλη μπορεί να είναι "αυθαίρετα μεγάλη". Όπως είπαμε αν η διακύμανση των ξ_{tj} είναι άπειρη τότε δεν ισχύει το ΚΟΘ. Αυτό γεννά το ερώτημα τού αν υπάρχει κάποιο άλλο οριακό θεώρημα, διάφορο του κεντρικού, το οποίο να μας λέει σε ποιά κατανομή (διάφορη της Κανονικής) τείνει το άθροισμα τυχαίων μεταβλητών με άπειρη διακύμανση. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική. Η οικογένεια κατανομών πού μπορεί να λειτουργήσουν ως "οριακές" κατανομές είναι η επονομαζόμενη οικογένεια των "ευσταθών κατανομών" η οποία ορίζεται παρακάτω: Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των ευσταθών κατανομών υπάρχουν και είναι συνεχείς αλλά με ελάχιστες εξαιρέσεις δεν είναι γνωστές σε "κλειστή μορφή". Όμως η οικογένεια αυτή μπορεί να οριστεί κάνοντας χρήση της ακόλουθης οικογένειας χαρακτηριστικών συναρτήσεων.

Definition ***Οικογένεια Ευσταθών Κατανομών***

Μια τυχαία μεταβλητή, X, έχει ευσταθή κατανομή, εάν υπάρχουν παράμετροι,

$$0 < \alpha \leq 2, \sigma \geq 0, -1 \leq \beta \leq 1 \text{ και } \mu \in \mathbb{R}$$

τέτοιες, ώστε η χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(s)$ της X να έχει την ακόλουθη μορφή

$$\phi_X(s) = E(e^{isX}) = \exp\{\sigma^\alpha(-|s|^\alpha + isw(s,\alpha,\beta)) + i\mu s\} \qquad \#$$

όπου

$$w(s,\alpha,\beta) = \left[\begin{array}{lll} \beta|s|^{\alpha-1}\varepsilon\varphi\pi\frac{\pi\alpha}{2} & \alpha\nu & \alpha \neq 1 \\ -\beta\frac{2}{\pi}\ln|s| & \alpha\nu & \alpha = 1. \end{array}\right]$$

Παρατηρήσεις

(i) Η σημαντικότερη από τις παραπάνω παραμέτρους είναι η παράμετρος α η οποία ονομάζεται και *χαρακτηριστικός εκθέτης*. Για $\alpha = 2$, η χαρακτηριστική συνάρτηση (ref: cf-st2) γίνεται

$$E(e^{isX}) = \exp\{-\sigma^2 s^2 + i\mu s\}$$

η οποία είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας Κανονικής τυχαίας μεταβλητής με μέσο μ και διακύμανση $2\sigma^2$. Από αυτό φαίνεται ότι η Κανονική κατανομή ανήκει στην οικογένεια των ευσταθών κατανομών. Επίσης για $\alpha = 1$ (και $\beta = 0$) προκύπτει η χαρακτηριστική συνάρτηση Cauchy. Κατά συνέπεια και η κατανομή Cauchy ανήκει στην οικογένεια των ευσταθών κατανομών.

(ii) Αφού η οικογένεια των ευσταθών τυχαίων μεταβλητών ορίζεται σε όρους της (ref: cf-st2) από τις τέσσερις παραμέτρους που ορίσθηκαν παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε

$$X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu),$$

προκειμένου να συμβολίσουμε το ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει ως κατανομή τη $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$. Για παράδειγμα, ο συμβολισμός $X \sim S_2(\sigma,0,\mu)$ υποδηλώνει ότι $X \sim N(\mu,2\sigma^2)$.

Η οικογένεια των ευσταθών κατανομών πού ορίσαμε παραπάνω έχει τις εξής τρείς ιδιότητες. Πρώτον, αν μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει κατά νόμο σε κάποια κατανομή αυτή είναι οπωσδήποτε μέλος της $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$. Δεύτερον, όλα τα μέλη αυτής της οικογένειας, με εξαίρεση την περίπτωση του μέλους πού αντιστοιχεί σε $\alpha = 2$ (Κανονική κατανομή) επιδεικνύουν λεπτοκύρτωση και έχουν "παχιά άκρα". Τρίτον, αν οι αρχικές τυχαίες μεταβλητές (εν προκειμένω οι ξ_{tj}) έχουν πεπερασμένες διακυμάνσεις και συγκλίνουν κατά νόμο σε κάποια κατανομή, τότε αυτή η κατανομή είναι η Κανονική. Αν όμως οι αρχικές τυχαίες μεταβλητές έχουν άπειρες διακυμάνσεις και συγκλίνουν κατά νόμο σε κάποια κατανομή, τότε αυτή η κατανομή θα είναι οπωσδήποτε μέλος της $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ και θα επιδεικνύει λεπτοκύρτωση και παχιά άκρα. Αυτό σημαίνει ότι θα έχει χαρακτηριστικό εκθέτη $0 < \alpha < 2$.

Από τα παραπάνω προκύπτει η εξήγηση πού έδωσε ο Mandelbrot γιά την λεπτοκύρτωση πού παρουσιάζουν οι αποδόσεις $\widetilde{R}_t$: Η κατανομή των $\widetilde{R}_t$ είναι λεπτόκυρτη γιατί ανήκει στην οικογένεια των ευσταθών κατανομών με $\alpha < 2$. Πιό συγκεκριμένα, αυτή η κατανομή είναι η οριακή κατανομή προς την οποία συγκλίνει το άθροισμα των στοιχειωδών αποδόσεων ξ_{tj} όπου οι τελευταίες έχουν άπειρη διακύμανση. Άν όμως οι ξ_{tj} έχουν άπειρη διακύμανση τότε και η $\widetilde{R}_t$ θα έχει άπειρη διακύμανση. Πώς αντέδρασε η επιστημονική κοινότητα στην εξήγηση του Mandelbrot? Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι παρότι το επιχείρημα του Mandelbrot περί της οριακής ευσταθούς κατανομής ήταν αρκετά πειστικό και τεκμηριωμένο, οι οικονομολόγοι της εποχής εκείνης προσπάθησαν να το αντικρούσουν. Ο λόγος ήταν ότι αν δεχόντουσαν την υπόθεση της άπειρης διακύμανσης θα έπρεπε να δεχθούν και όλες τις συνέπειες πού αυτή επιφέρει. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, η σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου βασίζεται στην υπόθεση ότι οι διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων (δηλαδή οι ροπές δεύτερη τάξης) είναι πεπερασμένες. Αυτό σημαίνει ότι αν η υπόθεση της πεπερασμένης διακύμανσης δεν ισχύει τότε και όλη η Θεωρία Χαρτοφυλακίου καθίσταται αμφίβολη. Επιπλέον πολλές στατιστικές μέθοδοι και τεχνικές πού οι οικονομολόγοι χρησιμοποιούν στην ανάλυση των αποδόσεων των μετοχών βασίζονται στην υπόθεση της πεπερασμένης διακύμανσης. Αυτό σημαίνει ότι και αυτές οι μέθοδοι καθίστανται ύποπτες αν η διακύμανση των αποδόσεων είναι άπειρη. Γιά παράδειγμα, ο οικονομολόγος Paul Cootner σχολιάζει: "*Ο Mandelbrot, όπως ο πρωθυπουργός Churchill πριν απ' αυτόν μας υπόσχεται όχι την ουτοπία, αλλά αίμα, ιδρώτα καί δάκρυα. Εάν έχει δίκηο, τότε όλα τα στατιστικά μας εργαλεία είναι απαξιομένα - ελάχιστα τετράγωνα, φασματική ανάλυση, λύσεις μεγίστης πιθανοφάνειας, όλη η υφιστάμενη δειγματική θεωρία. Σχεδόν χωρίς καμμιά εξαίρεση η παρελθούσα οικονομετρική δουλειά πού έχει γίνει στερείται νοήματος*".

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η επιστημονική κοινότητα στα μέσα της δεκαετίας του 60 ήλθε αντιμέτωπη με το εξής δίλημμα: Αφενός μεν δεν μπορούσε να αμφισβητήσει το γεγονός ότι η κατανομή των αποδόσεων παρουσίαζε σημαντικές αποκλίσεις απο την Κανονικότητα. Αφετέρου, η εξήγηση του Mandelbrot περί άπειρης διακύμανσης δημιουργούσε περισσότερα προβλήματα από αυτά πού έλυνε. Κατά συνέπεια, οι προσπάθειες των οικονομολόγων στράφηκαν στην αναζήτηση μιάς θεωρίας η οποία θα εξηγούσε την λεπτοκύρτωση στη κατανομή της $\widetilde{R}_t$ χωρίς να θυσιάζει την υπόθεση της περασμένης διακύμανσης. Μιά τέτοια θεωρία προτάθηκε από τον P.D. Praetz το, 1972 στο άρθρο του "The Distribution of Share Price Changes" πού δημοσιεύτηκε στο Journal of Business και από τον P.K Clark το 1973, στο άρθρο του "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices" πού δημοσιεύτηκε στην Econometrica. Η ιδέα πίσω από αυτή τη θεωρία είναι σχετικά απλή. Οι προαναφερθέντες συγγραφείς ξεκινάνε απο την προφανή διαπίστωση ότι για κάποιο λόγο το ΚΟΘ δεν φαίνεται να ισχύει στη περίπτωση των αποδόσεων. Αντί όμως να υποθέσουν ότι ο λόγος γιά την αποτυχία του ΚΟΘ είναι η ύπαρξη άπειρης διακύμανσης στις στοιχειώδεις αποδόσεις ξ_{tj} ακολούθησαν ένα διαφορετικό δρόμο. Συγκεκριμένα εντόπισαν το πρόβλημα στο πλήθος n των προσθετέων ξ_{tj} στη σχέση (ref: sum_r1). Αντί να υποθέσουν ότι το n είναι μιά ντετερμινιστική μεταβλητή η οποία τείνει στο άπειρο (προκειμένου να έχουμε τη σύγκλιση κατά νόμο) υπέθεσαν ότι το πλήθος των προσθετέων είναι τυχαία μεταβλητή. Αυτή η υπόθεση τούς φέρνει σε ένα νέο πεδίο ασυμπτωτικής θεωρίας την επονομαζόμενη θεωρία "τυχαίων αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών" η οποία είχε κάνει την εμφάνιση της στη Θεωρία Πιθανοτήτων ήδη από το 1948. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε τα βασικά στοιχεία αυτής της θεωρίας προσαρμοσμένα στο πρόβλημα της οριακής κατανομής των αποδόσεων με το οποίο ασχολούμαστε.

Έστω ότι γιά κάθε χρονική περίοδο t, έχουμε την στοχαστική ακολουθία $\{\xi_{t,j}\}_{j\geq 1}$ από ανεξάρτητες και ταυτόνομες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένο μέσο $E(\xi_{t,j}) = \mu_\xi$ και πεπερασμένη διακύμανση $Var(\xi_{t,j}) = \sigma_\xi^2 > 0$. Επιπλέον, έστω $\{N_n\}_{n\geq 1}$ να είναι μιά ακολουθία απο μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές πού παίρνουν ακέραιες τιμές. Η ακολουθία των τυχαίων μερικών αθροισμάτων ορίζεται ως,

$$\widetilde{R}_{t,N_n} = \sum_{j=1}^{N_n} \xi_{t,j}. \qquad \#$$

Το ερώτημα πού μας απασχολεί είναι κάτω από ποιές συνθήκες η ακολουθία των τυχαίων μερικών αθροισμάτων $\widetilde{R}_{t,N_n}$ (κατάλληλα τυποποιημένη) συγκλίνει κατά νόμο σε κάποια τυχαία μεταβλητή Z και επιπλέον κάτω από ποιές επιπρόσθετες συνθήκες η οριακή τυχαία μεταβλητή Z κατανέμεται Κανονικά? Μιά βασική συνθήκη γιά το αν η παραπάνω ακολουθία συγκλίνει στη Κανονική κατανομή αφορά στη συμπεριφορά της μεταβλητότητας του N_n γύρω από το n καθώς το n αυξάνεται. Συγκεκριμένα, αν το N_n επιδεικνύει "σημαντικό βαθμό μεταβλητότητας" γύρω από το n, υπό την έννοια ότι η ακόλουθη συνθήκη

$$p\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{n} = 1 \qquad \#$$

παραβιάζεται, τότε η οριακή κατανομή της ακολουθίας των R_{t,N_n} δεν είναι η Κανονική αλλά αντίθετα εξαρτάται από την κατανομή του N_n. Πιό συγκεκριμένα, ο Clark υποθέτει ότι $N_n = [Zn]$ όπου Z είναι μιά τυχαία μεταβλητή με μέσο ίσο με την μονάδα και διακύμανση $\Gamma > 0$ και με το σύμβολο [] να δηλώνει "τον μεγαλύτερο ακέραιο πού είναι μικρότερος από". Αποδεικνύεται ότι κάτω από τις προαναφερθείσες υποθέσεις γιά τις στοιχειώδεις αποδόσεις $\xi_{t,j}$, και γιά κάθε πραγματοποίηση της τυχαίας μεταβλητής Z, ισχύει ότι

$$\frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{n}}\widetilde{R}_{t,N_n} = \sqrt{\frac{[nZ]}{n}}\,\frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{[nZ]}}\sum_{j=1}^{[nZ]}\xi_{t,j} \xrightarrow{L} N(0,Z).$$

Από την παραπάνω σύγκλιση παρατηρούμε ότι η (ασυμπτωτική) διακύμανση της οριακής κατανομής είναι η τυχαία μεταβλητή Z, γεγονός πού υποδηλώνει ότι η αδέσμευτη οριακή κατανομή είναι μιά "μίξη Κανονικών" (mixture of normals). Είναι γνωστό ότι μιά τέτοια κατανομή μπορεί να είναι λεπτόκυρτη. Κατά συνέπεια η λεπτοκύρτωση της $\widetilde{R}_t$ μπορεί να εξηγηθεί χωρίς την ανάγκη της υπόθεσης της άπειρης διακύμανσης. Αντίθετα, η λεπτοκύρτωση προκύπτει ως αποτέλεσμα τού ότι ο αριθμός των προσθετέων $\xi_{t,j}$ πού συνθέτουν την $\widetilde{R}_t$ είναι τυχαίος και επιπλέον επιδεικνύει σημαντική μεταβλητότητα. Συγκεκριμένα, ο Clark αιτιολόγησε την προσφυγή του στο παραπάνω τύπο οριακών θεωρημάτων προβάλλοντας τον ισχυρισμό ότι οι συναλλαγές δεν κατανέμονται ομοιόμορφα στο χρόνο αλλά αντίθετα επιδεικνύουν σημαντική μεταβλητότητα από ημέρα σε ημέρα.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι από τη στιγμή πού άνοιξε ο δρόμος για μιά εξήγηση της λεπτοκύρτωσης σε όρους πεπερασμένης διακύμανσης πολλές μελέτες ακολούθησαν προς αυτή τη κατεύθυνση. Γιά παράδειγμα οι Blattberg και Gonedes το 1974 υπέθεσαν ότι η Z^{-1} ακολουθεί μιά κατανομή Γάμμα το οποίο συνεπάγεται ότι η οριακή κατανομή της $\frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{n}}R_{t,N_n}$ είναι t τού Student.

Η Μοντελοποίηση της Δυναμικής Ετεροσκεδαστικότητας. Τα Μοντέλα ARCH/GARCH

Ας επιστρέψουμε τώρα στο φαινόμενο της δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας, δηλαδή στην ύπαρξη μη-γραμμικής διαχρονικής εξάρτησης στην ανέλιξη των αποδόσεων η οποία πηγάζει από την δεσμευμένη διακύμανση, και ας θέσουμε το εξής ερώτημα: Υπάρχει κάποιο παραμετρικό στατιστικό μοντέλο το οποίο να περιγράφει την δυναμική ετεροσκεδαστικότητα? Με άλλα λόγια υπάρχει κάποιο μοντέλο το οποίο να παράγει το φαινόμενο της "μεταβλητότητας κατά κύματα"? Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική. Το 1982, ο Robert Engle πρότεινε ένα τέτοιο μοντέλο το οποίο ονόμασε ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). Το μοντέλο ARCH γενικεύτηκε το 1986 από τον Tim Bollerslev και ονομάστηκε GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). Η βασική ιδέα πίσω από αυτά τα μοντέλα είναι ότι δεσμευμένη διακύμανση $Var(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1}) \equiv h_t^2$, όπου I_{t-1} είναι η παρελθούσα ιστορία της ανέλιξης έως και τη χρονική στιγμή $t-1$, έχει μιά αυτοπαλίνδρομη δομή. Αυτό σημαίνει ότι η δεσμευμένη διακύμανση h_t^2 τη χρονική στιγμή t είναι θετική συνάρτηση της δεσμευμένης διακύμανσης στις αμέσως προηγούμενες περιόδους (π.χ. από την h_{t-1}^2), το οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι μεγάλη διακύμανση την $t-1$ τείνει να συνοδεύεται από μεγάλη διακύμανση την t και μικρή διακύμανση την $t-1$ τείνει να συνοδεύεται από μικρή διακύμανση την t. Με άλλα λόγια η αυτοπαλίνδρομη δομή της δεσμευμένης διακύμανσης είναι σε θέση να αναπαράξει το φαινόμενο της μεταβλητότητας κατά κύματα.

Το πιό απλό μοντέλο αυτής της κατηγορίας είναι το ARCH(1) μοντέλο το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

$$\widetilde{R}_t = \mu_{\widetilde{R}} + V_t \qquad \#$$

όπου

$$V_t = h_t \varepsilon_t \qquad \#$$

με

$$h_t^2 = a_0 + a_1 V_{t-1}^2,\ a_0 > 0,\ a_1 \geq 0 \qquad \#$$

καί

$$\varepsilon_t \sim IID(0,1). \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Οι παραμετρικοί περιορισμοί $a_0 > 0,\ a_1 \geq 0$ πού ετέθησαν στην (ref: dec7) αποσκοπούν στο να εξασφαλίσουν ότι η h_t^2 (ως διακύμανση πού είναι) θα είναι πάντα θετική.

(ii) Η ουσία του μοντέλου ARCH(1) αποτυπώνεται στη σχέση (ref: dec7). Η δεσμευμένη διακύμανση τη χρονική στιγμή t είναι γραμμική συνάρτηση του τετραγωνικού σφάλματος V_{t-1}^2 της προηγουμενης περιόδου $t-1$. Όσο μεγαλύτερο είναι το σφάλμα της περιόδου $t-1$ τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η διακύμανση της περιόδου t.

Παρατηρούμε ότι η αρχική σχέση (ref: dec5) είναι ακριβώς ίδια με τη σχέση (ref: dec1) πού είδαμε στην προηγούμενη ενότητα. Αυτό πού όμως είναι διαφορετικό είναι οι ιδιότητες της ακολουθίας των "σφαλμάτων" $\{V_t\}$. Αντί της υπόθεσης ότι οι τυχαίες μεταβλητές V_t είναι ανεξάρτητες και ταυτόνομες, στο πλαίσο του ARCH(1) μοντέλου υποθέτουμε ότι η κάθε V_t είναι το γινόμενο δύο άλλων τυχαίων μεταβλητών, των h_t και ε_t οι οποίες με τη σειρά τους ορίζονται από τις σχέσεις (ref: dec7) και (ref: dec8) αντίστοιχα. Το ερώτημα είναι το συνολικό μοντέλο ARCH(1) το οποίο ορίζεται από τις σχέσεις (ref: dec5)-(ref: dec8) τι ιδιότητες συνεπάγεται γιά τη στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_t\}$. Ας εξετάσουμε πρώτα αν το ARCH(1) μοντέλο διατηρεί την ιδιότητα της ανεξαρτησίας ως προς το δεσμευμένο μέσο γιά την οποία έχουμε ικανή εμπειρική υποστήριξη. Ας θυμηθούμε ότι η ανεξαρτησία ως προς το δεσμευμένο μέσο ορίζεται ώς

$$E(\widetilde{R}_t \mid \widetilde{R}_{t-1}, \widetilde{R}_{t-2}, \ldots, \widetilde{R}_0) = E(\widetilde{R}_t)$$

ή με βάση τη σημειογραφία πού εισάγαμε στην παρούσα ενότητα,

$$E(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1}) = E(\widetilde{R}_t). \qquad \#$$

Αντικαθιστώντας την (ref: dec6) στην (ref: dec5) έχουμε,

$$\widetilde{R}_t = \mu_{\widetilde{R}} + h_t \varepsilon_t$$

απ'οπου με αντικατάσταση της h_t από την (ref: dec7) προκύπτει,

$$\widetilde{R}_t = \mu_{\widetilde{R}} + \sqrt{a_0 + a_1 V_{t-1}^2}\, \varepsilon_t.$$

Εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας τον τελεστή $E(\bullet \mid I_{t-1})$ έχουμε

$$E(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1}) = E\Big(\Big(\mu_{\widetilde{R}} + \sqrt{a_0 + a_1 V_{t-1}^2}\, \varepsilon_t\Big) \mid I_{t-1}\Big) =$$
$$= \mu_{\widetilde{R}} + \sqrt{a_0 + a_1 V_{t-1}^2}\, E(\varepsilon_t \mid I_{t-1}) = \mu_{\widetilde{R}}.$$

Η τελευταία ισότητα στην παραπάνω σχέση προκύπτει από το ότι ο δεσμευμένος μέσος της $\sqrt{a_0 + a_1 V_{t-1}^2}$ με δέσμευση την πληροφορία έως και την $t-1$ είναι η ίδια η τιμή της $\sqrt{a_0 + a_1 V_{t-1}^2}$ και επίσης από το γεγονός ότι οι τυχαίες μεταβητές ε_t είναι ανεξάρτητες, το οποίο συνεπάγεται ότι $E(\varepsilon_t \mid I_{t-1}) = E(\varepsilon_t) = 0$.

Άρα έχουμε δείξει ότι

$$E(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1}) = \mu_{\widetilde{R}}. \qquad \#$$

Προκειμένου να δείξουμε ότι η παράμετρος $\mu_{\widetilde{R}}$ είναι όντως ο αδέσμευτος μέσος $\widetilde{R}_t$ και άρα να καταλήξουμε στο ζητούμενο

$$E(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1}) = E(\widetilde{R}_t)$$

αρκεί να εφαρμόσουμε τον τελεστή $E()$ και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης (ref: dec10),

$$E\Big(E(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1})\Big) = E(\mu_{\widetilde{R}}) = \mu_{\widetilde{R}}.$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι ο αδέσμευτος μέσος της $\widetilde{R}_t$ διότι ως γνωστόν ισχύει η σχέση

$$E\Big(E(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1})\Big) = E(\widetilde{R}_t).$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις καταλήγουμε στο ότι

$$E(\widetilde{R}_t) = \mu_{\widetilde{R}}$$

και άρα τελικά αποδείξαμε την ισχύ της (ref: mean_ind2)το οποίο είναι και το ζητούμενο. Άρα τελικά δείξαμε ότι αν οι αποδόσεις περιγράφονται από ένα ARCH(1) μοντέλο τότε οι αποδόσεις διατηρούν την ιδιότητα της ανεξαρτησίας ως προς το δεσμευμένο μέσο.

Ας εξετάσουμε τώρα την μορφή της δεσμευμένης διακύμανσης $Var(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1})$ η οποία αντιστοιχεί στο μοντέλο ARCH(1). Το πρώτο σημείο το οποίο πρέπει να υθμηθούμε είναι ότι η διακύμανση μπορεί να εκφραστεί ως

$$Var(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1}) = E(\widetilde{R}_t^2 \mid I_{t-1}) - \left[E(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1})\right]^2.$$

Με δεδομένο ότι

$$E(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1}) = E(\widetilde{R}_t) = \mu_{\widetilde{R}}$$

η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$Var(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1}) = E(\widetilde{R}_t^2 \mid I_{t-1}) - \mu_{\widetilde{R}}^2. \qquad \#$$

Στη συνέχεια, ας κάνουμε την απλουστευτική υπόθεση ότι ο αδέσμευτος μέσος των αποδόσεων είναι ίσος με το μηδέν, $\mu_{\widetilde{R}} = 0$. Αυτό μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι

$$Var(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1}) = E(\widetilde{R}_t^2 \mid I_{t-1}).$$

Τώρα μπορούμε να πάμε πίσω στη βασική μας σχέση (ref: dec5) και ας υψώσουμε και τα δύο μέλη της στο τετράγωνο (υποθέτοντας $\mu_{\widetilde{R}} = 0$):

$$\widetilde{R}_t^2 = V_t^2.$$

Με δεδομένη την (ref: dec6) έχουμε,

$$\widetilde{R}_t^2 = h_t^2 \varepsilon_t^2 = (a_0 + a_1 V_{t-1}^2)\varepsilon_t^2.$$

Εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης τον τελεστη $E(\bullet \mid I_{t-1})$ και αφού παρατηρήσουμε ότι ο δείκτης του συνόλου πληροφοριών είναι $t-1$, έχουμε

$$E(\widetilde{R}_t^2 \mid I_{t-1}) = E((a_0 + a_1 V_{t-1}^2)\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1}) = (a_0 + a_1 V_{t-1}^2)E(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1}). \qquad \#$$

Η δεσμευμένη ροπή δεύτερης τάξεως $E(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1})$ είναι ίση με την αντίστοιχη αδέσμευτη, $E(\varepsilon_t^2)$ αφού η ανέλιξη $\{\varepsilon_t\}$ είναι ανεξάρτητη και επιπλέον η $E(\varepsilon_t^2)$ είναι η διακύμανση της ε_t αφού εξ'υποθέσεως η ε_t έχει μηδενικό μέσο. Επιπλέον, αφού έχουμε υποθέσει ότι

$$Var(\varepsilon_t) = 1$$

έχουμε τις εξής ισότητες να ισχύουν

$$E(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2) = Var(\varepsilon_t) = 1. \qquad \#$$

Συνδυάζοντας τις (ref: cond_v1) και (ref: cond_v2) έχουμε

$$E(\widetilde{R}_t^2 \mid I_{t-1}) = a_0 + a_1 V_{t-1}^2$$

ή εναλλακτικά

$$Var(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1}) = a_0 + a_1 V_{t-1}^2. \qquad \#$$

Κατά συνέπεια δείξαμε ότι όντως σε ένα ARCH(1) μοντέλο όπως αυτό ορίστηκε από τις σχέσεις (ref: dec5)-(ref: dec8), η δεσμευμένη διακύμανση της $\widetilde{R}_t$ δεν είναι ανεξάρτητη της πληροφορίας πού περιέχεται στο σύνολο πληροφοριών I_{t-1} το οποίο με τη σειρά του ερμηνεύεται ως ότι η ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_t\}$ επιδεικνύει μη-γραμμική εξάρτηση, πηγάζουσα από την δεσμευμένη διακύμανση.

Στη συνέχεια, το επόμενο ενδιαφέρον ερώτημα είναι να δείξουμε κάτω από ποιές συνθήκες η αδέσμευτη διακύμανση $Var(\widetilde{R}_t)$ υπάρχει, δηλαδή $Var(\widetilde{R}_t) = \sigma_{\widetilde{R}}^2 < \infty$. Αποδεικνύεται ότι κάτω από την υπόθεση ότι η $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι αυστηρά στάσιμη ανέλιξη, η αδέσμευτη διακύμανση υπάρχει αν και μόνο αν $a_1 < 1$. Επιπλέον η $Var(\widetilde{R}_t)$ είναι ίση με

$$Var(\widetilde{R}_t) = \frac{a_0}{1 - a_1}. \qquad \#$$

Η παραπάνω έκφραση για την αδέσμευτη διακύμανση μπορεί να εξαχθεί ως εξής: Από την ιδιότητα πού συνδέει την αδέσμευτη με τη δεσμευμένη διακύμανση γνωρίζουμε ότι

$$Var(\widetilde{R}_t) = E\Big(Var(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1})\Big) + Var\Big(E(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1})\Big).$$

Αφού $E(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1}) = 0$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$Var(\widetilde{R}_t) = E\Big(Var(\widetilde{R}_t \mid I_{t-1})\Big).$$

Αντικαθιστώντας,

$$Var(\widetilde{R}_t) = E(a_0 + a_1 V_{t-1}^2) = a_0 + a_1 E(V_{t-1}^2).$$

Η ροπή $E(V_{t-1}^2)$ είναι η διακύμανση $Var(V_{t-1})$ η οποία με τη σειρά της λόγω τού ότι υποθέσαμε ότι η $\{V_t\}$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη είναι ίση με την $Var(V_t)$. Αφού από την (ref: dec5) έχουμε $\widetilde{R}_t = V_t$ (έχουμε υποθέσει ότι $\mu_{\widetilde{R}} = 0$) θα ισχύει $Var(\widetilde{R}_t) = Var(V_t)$ το οποίο μας οδηγεί στο τελικό συμπέρασμα

$$Var(\widetilde{R}_t) = a_0 + a_1 Var(\widetilde{R}_t).$$

Λύνοντας ως προς $Var(\widetilde{R}_t)$,

$$Var(\widetilde{R}_t) = \frac{a_0}{1 - a_1},$$

έχοντας υποθέσει ότι $a_1 < 1$.

Παρατηρήσεις

(i) Ο λόγος για τον οποίο δεν απαιτούμε $a_1 \neq 1$ αλλά εξειδικεύουμε τον περιορισμό σε $a_1 < 1$ είναι ότι γιά τιμές $a_1 > 1$ θα είχαμε αρνητική διακύμανση.

(ii) Η περίπτωση $a_1 = 1$ είναι ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα αφού σε αυτή τη περίπτωση η αδέσμευτη διακύμανση $Var(\widetilde{R}_t)$ καθίσταται άπειρη. Το αντίστοιχο μοντέλο γιά αυτή τη περίπτωση έχει μιά ιδιαίτερη ονομασία στη βιβλιογραφία και αποκαλείται IGARCH(1) (Integrated ARCH) μοντέλο.

Το μοντέλο ARCH(1) γενικεύεται αν υποθέσουμε ότι στην σχέση (ref: dec7) η h_t^2 δεν είναι συνάρτηση μόνο της αμέσως προηγούμενης τυχαίας μεταβλητής V_{t-1}^2 αλλά των p προηγούμενων μεταβλητών $V_{t-1}^2, V_{t-2}^2, \ldots V_{t-p}^2$. Πιό συγκεκριμένα, το ARCH(p) μοντέλο ορίζεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\widetilde{R}_t = \mu_{\widetilde{R}} + V_t \qquad \#$$

όπου

$$V_t = h_t \varepsilon_t \qquad \#$$

με

$$h_t^2 = a_0 + a_1 V_{t-1}^2 + a_2 V_{t-2}^2 + \ldots + a_p V_{t-p}^2,\ a_0 > 0,\ a_1 \geq 0, \ldots, a_p \geq 0 \qquad \#$$

καί

$$\varepsilon_t \sim IID(0,1). \qquad \#$$

Μιά σημαντική ιδιότητα των μοντέλων ARCH είναι ότι παράγουν λεπτοκύρτωση. Πιό συγκεκριμένα, αν η στοχαστική ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$ ακολουθεί ένα μοντέλο ARCH(p) τότε η κατανομή της (κάθε) τυχαίας μεταβλητής $\widetilde{R}_t$ δεν θα είναι η Κανονική αλλά αντίθετα θα είναι μιά κατανομή της οποίας ο συντελεστής κύρτωσης θα είναι μεγαλύτερος του 3.

Οι αρχικές εφαρμογές των ARCH(p) μοντέλων στις αποδόσεις των μετοχών έδειξαν ότι ο αριθμός των χρονικών υστερήσεων p πού έπρεπε να υποτεθούν προκειμένου να μοντελοποιηθεί όλη η δυναμική ετεροσκεδαστικότητα πού υπάρχει στην ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$ ήταν πολύ μεγάλος. Αυτό με τη σειρά του δημιουργούσε την ανάγκη της εκτίμησης ενός πολύ μεγάλου αριθμού παραμέτρων. Αυτή η παρατήρηση οδήγησε των Tim Bollerslev το 1986 να προτείνει μιά τροποποίηση των ARCH μοντέλων τέτοια ώστε όλη η δυναμική ετεροσκεδαστικότητα να μπορεί να μοντελοποιηθεί σε όρους ενός μικρού αριθμού μεταβλητών/παραμέτρων. Η ιδέα του Bollerslev ήταν η δεσμευμένη διακύμανση h_t^2 να μήν είναι συνάρτηση μόνο των προηγούμενων τετραγωνικών σφαλμάτων αλλά και των ίδιων των δικών της χρονικών υστερήσεων. Στην πιό απλή εκδοχή του το GARCH μοντέλο υποθέτει μία χρονική υστέρηση για το τετραγωνικό σφάλμα V_{t-1}^2 και μιά χρονική υστέρηση για τη δεσμευμένη διακύμανση h_{t-1}^2. Το μοντέλο αυτό, το οποίο για προφανείς λόγους ονομάζεται GARCH(1,1), ορίζεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\widetilde{R}_t = \mu_{\widetilde{R}} + V_t \qquad \#$$

όπου

$$V_t = h_t \varepsilon_t \qquad \#$$

με

$$h_t^2 = a_0 + a_1 V_{t-1}^2 + b_1 h_{t-1}^2,\ a_0 > 0,\ a_1 \geq 0, b_1 \geq 0 \qquad \#$$

καί

$$\varepsilon_t \sim IID(0,1). \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Η μετάβαση από τα μοντέλα ARCH στα μοντέλα GARCH επιτελεί για την δεσμευμένη διακύμανση την ίδια λειτουργία πού επιτελεί η μετάβαση από τα μοντέλα MA (Moving Average) στα μοντέλα ARMA (Autoregressive Moving Average) γιά τον δεσμευμένο μέσο. Αυτή η λειτουργία είναι ο περιορισμός των (προς εκτίμηση) παραμέτρων.

(ii) Παράλληλα με τον Bollerslev, ο S.J. Taylor επίσης το 1986 πρότεινε (ανεξάρτητα από τον Bollerslev) τα GARCH μοντέλα.

(iii) Η συνθήκη για την ύπαρξη της αδέσμευτης διακύμανσης στο πλαίσιο του GARCH(1,1) μοντέλου είναι

$$a_1 + b_1 < 1.$$

Αν η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται, τότε η ανέλιξη $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι στάσιμη δεύτερης τάξης, και η αδέσμευτη διακύμανση είναι ίση με

$$Var(\widetilde{R}_t) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.$$

(iv) Αν το άθροισμα των συντελεστών a_1 και b_1 είναι ίσο με τη μονάδα, τότε η αδέσμευτη διακύμανση είναι άπειρη. Σε αυτή τη περίπτωση το GARCH(1,1) μοντέλο παίρνει την ονομασία IGARCH(1,1) (Integrated GARCH).

(v) Ένα GARCH(1,1) μοντέλο παράγει λεπτοκύρτωση. Συγκεκριμένα, ένα GARCH(1,1) μοντέλο παράγει περισσότερη λεπτοκύρτωση από ένα ARCH(1) μοντέλο και ως εκ τουτου είναι πιό κατάλληλο γιά μοντελοποίηση των αποδόσεων ιδίως όταν οι τελευταίες είναι ημερήσιες ή εβδομαδιαίες.

Εκτίμηση του GARCH(1,1) Μοντέλου για τις Αποδόσεις του S&P 500

Ας δούμε τώρα το πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε το μοντέλο GARCH(1,1) γιά τις ημερήσιες αποδόσεις του S&P 5000 γιά τη χρονική περίοδο 28/2/2000 έως 31/12/2018. Αρχικά ας ξεκινήσουμε παρατηρώντας το χρονοδιάγραμμα των αποδόσεων, το οποίο παρατίθεται στο Διάγραμμα 3

Διάγραμμα 3
Ημερήσιες Αποδόσεις του Χρηματιστηριακού Δείκτη S&P 500 γιά την Περίοδο 28/2/2000 - 31/12/2018

Το πρώτο πού παρατηρούμε είναι ότι η συμπεριφορά των ημερήσιων αποδόσεων παρουσιάζει σημαντικές διαφορές από την συμπεριφορά των τριμηνιαίων αποδόσεων όπως αποτυπώνεται στο Διάγραμμα 1. Η σημαντικότερη διαφορά έγκειται στο ότι στα μεν ημερήσια δεδομένα το φαινόμενο της μεταβλητότητας κατά κύματα είναι κάτι περισσότερο από ορατό ενώ στα τριμηνιαία δεδομένα το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται σε πολύ μικρότερη ένταση. Πέραν της οπτικής αναγνώρισης του φαινομένου, οφείλουμε να διεξάγουμε και στατιστικούς ελέγχους προκειμένου να διαπιστώσουμε την ύπαρξη δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας. Όπως έχουμε ήδη συζητήσει, ένας τέτοιος έλεγχος βασίζεται στην εκτίμησης της εξίσωσης (ref: ar_sq1). Τα αποτέλεσματα από την εκτίμησης αυτής της εξίσωσης για τις ημερήσιες αποδόσεις του S&P 500 παρουσιάζονται στον Πίνακα 6:

Πίνακας 6
Εκτιμήσεις των Παραμέτρων του Αυτοπαλίνδρομου Μοντέλου AR(4) γιά τα Τετράγωνα των Ημερήσιων Αποδόσεων του S&P 500

Παράμετρος	Εκτίμηση OLS	Τυπικό Σφάλμα	t-στατιστική
c_1	0.0000575	0.00000615	8.70
φ_1	0.0917	0.0141	6.47
φ_2	0.2893	0.0142	20.39
φ_3	0.0878	0.0141	6.19
φ_4	0.1203	0.0142	8.46

Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 είναι (εξαιρετικά) στατιστικά σημαντικές με τις t-στατιστικές να είναι πολύ μεγαλύτερες των αντίστοιχων t-στατιστικών για τις τριμηνιαίες αποδόσεις (σύγκριση Πίνακα 6 με Πίνακα 4). Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ετεροσκεδαστικότητα για τις ημερήσιες αποδόσεις είναι πολύ εντονώτερη από αυτή για τις τριμηνιαίες αποδόσεις.

Έχοντας εντοπίσει το φαινόμενο της δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας, καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να το μοντελοποιήσουμε με τη βοήθεια ενός παραμετρικού μοντέλου. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι, όπως είδαμε, το GARCH(1,1) μοντέλο το οποίο ορίζεται από τις εξισώσεις (ref: dec5b) - (ref: dec8b). Αυτό γεννά το ερώτημα του πώς θα εκτιμήσουμε το GARCH(1,1). Όπως γνωρίζουμε από την Στατιστική, η πιό γενική μέθοδος εκτίμησης είναι η μέθοδος της μεγίστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood - ML). Αυτή η μέθοδος προυποθέτει να κάνουμε μιά συγκεκριμένη υπόθεση σχετικά με την κατανομή του δείγματος μας. Στο πλαίσιο του GARCH(1,1) η κατανομική υπόθεση αφορά στις τυχαίες μεταβλητές ε_t. Αν υποθέσουμε ότι η (κάθε) τυχαία μεταβλητή ε_t είναι η Κανονική τότε η δεσμευμένη κατανομή της $\widetilde{R}_t$ με δέσμευση την πληροφορία I_{t-1} θα είναι η (δεσμευμένη) Κανονική. Συγκεκριμένα,

$$\widetilde{R}_t \mid I_{t-1} \sim N(\mu_{\widetilde{R}}, h_t^2).$$

Με βάση αυτή την υπόθεση, μπορούμε να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση πιθανοφάνειας, να πάρουμε το λογάριθμό της και να μεγιστοποιήσουμε ως προς τις άγνωστες παραμέτρους $\mu_{\widetilde{R}}$, a_0, a_1 και b_1. Οι εκτιμήσεις μεγίστης πιθανοφάνειας $\widehat{\mu}_{\widetilde{R}}$, $\widehat{a}_0$, $\widehat{a}_1$ και $\widehat{b}_1$ μαζί με τα τυπικά τους σφάλματα και τις στατιστικές t δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 7
Εκτιμήσεις Μεγίστης Πιθανοφάνειας των Παραμέτρων του GARCH(1,1) γιά τις Ημερήσιες Αποδόσεις του S&P 500

Παράμετρος	Εκτίμηση ML	Τυπικό Σφάλμα	t-στατιστική
$\mu_{\widetilde{R}}$	0.00052	0.00011	4.59
a_0	0.0000017	0.00000059	11.02
a_1	0.099	0.0059	16.60
b_1	0.877	0.0063	139.4

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι όλες οι εκτιμηθείσες παράμετροι είναι στατιστικά σημαντικές. Επίσης παρατηρούμε ότι το άθροισμα των $\widehat{a}_1$ και $\widehat{b}_1$ είναι πολύ κοντά στη μονάδα,

$$\widehat{a}_1 + \widehat{b}_1 = 0.099 + 0.877 = 0.976$$

γεγονός πού μας γεννά υποψίες ότι τελικά το μοντέλο πού περιγράφει τις ημερήσιες αποδόσεις του S&P 500 είναι ένα IGARCH(1,1).

Στη συνέχεια, με βάση τις εκτιμημένες παραμέτρους της δεσμευμένης διακύμανσης μπορούμε να έχουμε αντίστοιχες εκτιμήσεις της δεσμευμένης διακύμανσης $\widehat{h}_t^2$:

$$\widehat{h}_t^2 = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 \widehat{V}_{t-1}^2 + \widehat{b}_1 \widehat{h}_{t-1}^2$$

με

$$\widehat{V}_{t-1} = \widetilde{R}_t - \widehat{\mu}_{\widetilde{R}}.$$

Οι εκτιμήσεις αυτές παρουσιάζονται με τη μορφή του παρακάτω διαγράμματος:

Διάγραμμα 4
Εκτίμηση της Δεσμευμένης Διακύμανσης των Ημερήσιων Αποδόσεων του Χρηματιστηριακού Δείκτη S&P 500

Από το παραπάνω διάγραμμα φαίνεται καθαρά το φαινόμενο της μεταβλητότητας κατά κύματα. Συγκεκριμένα, η δεσμευμένη διακύμανση ήταν σε αρκετά υψηλά επίπεδα τα πρώτα δύο χρόνια του δείγματος. Στη συνέχεια επακολούθησε μιά παρατεταμένη περίοδος χαμηλής μεταβλητότητας η οποία διήρκεσε έως την μεγάλη χρηματοοικονομική κρίση του 2007-2008 κατά την οποία η μεταβλητότητα έφτασε στη μέγιστη τιμή της.

Ταυτόχρονη Γραμμική Εξάρτηση (Συσχέτιση) Μεταξύ n Περιουσιακών Στοιχείων (assets)

Στην μέχρι τώρα ανάλυση δώσαμε ιδιαίτερη έμφαση στη συμπεριφορά των αποδόσεων ένος συγκεκριμένου asset i κατά μήκος τού χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι στο $\widetilde{R}_{it}$ διατηρήσαμε το i σταθερό (και γιά αυτό το λόγο το παραλείψαμε από τη σημειογραφία και γράφαμε απλώς $\widetilde{R}_t$) και αναλύσαμε το πώς οι τυχαίες μεταβλητές $\widetilde{R}_t$ συμπεριφέρονται όταν ο δείκτης t μεταβάλλεται. Γιά παράδειγμα, ένα θέμα πού μας απασχόλησε ως τώρα ήταν το να δούμε πώς η απόδοση μιά μετοχής σε μιά χρονική στιγμή εξαρτάται από την απόδοση της ίδιας μετοχής σε μιά άλλη χρονική στιγμή. Στην παρούσα ενότητα θα αλλάξουμε τον άξονα της ανάλυσης μας. Συγκεκριμένα, θα διατηρήσουμε το t σταθερό και θα επιτρέψουμε στο i να διατρέχει τις τιμές, $i = 1, 2, \ldots, n$ όπου n είναι ο αριθμός των assets με κίνδυνο (π.χ. μετοχών) στην Οικονομία. Αυτό σημαίνει ότι το ενδιαφέρον μας θα στραφεί στην ταυτόχρονη εξάρτηση (δηλαδή μέσα στο ίδιο t) πού επιδεικνύουν οι τυχαίες μεταβλητές $\widetilde{R}_{1t}$, $\widetilde{R}_{2t}, \ldots, \widetilde{R}_{nt}$. Με άλλα λόγια, το μαθηματικό αντικείμενο της ανάλυσης μας θα είναι το τυχαίο διάνυσμα

$$\widetilde{\mathbf{R}}_t = \begin{bmatrix} \widetilde{R}_{1t} \\ \widetilde{R}_{2t} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \widetilde{R}_{nt} \end{bmatrix}.$$

Υποθέτοντας ότι η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\widetilde{\mathbf{R}}_t$ είναι σταθερή διαχρονικά, μπορούμε να παραλείψουμε στην παραπάνω σημειογραφία τον δείκτη t και να ασχοληθούμε εφεξής με το τυχαίο διάνυσμα

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \widetilde{R}_{1} \\ \widetilde{R}_{2} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \widetilde{R}_{n} \end{bmatrix}.$$

Η από-κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2, \ldots, \widetilde{R}_n$ θα συμβολίζεται ως $f_{\widetilde{R}_1,\widetilde{R}_2,\ldots,\widetilde{R}_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta)$ και θα εκφράζει (στη συνήθη περίπτωση πού οι αποδόσεις θεωρούνται συνεχείς τυχαίες μεταβλητές) την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (του τυχαίου διανύσματος $\widetilde{\mathbf{R}}$). Το Θ συμβολίζει τις παραμέτρους της από-κοινού κατανομής. Γιά παράδειγμα, αν η $f_{\widetilde{R}_1,\widetilde{R}_2,\ldots,\widetilde{R}_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της πολυμεταβλητής Κανονικής κατανομής, τότε το Θ περιλαμβάνει το διάνυσμα των μέσων $\boldsymbol{\mu}$ και τον πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ. Πιό συγκεκριμένα, το διάνυσμα των μέσων $\boldsymbol{\mu}$ ορίζεται ως

$$\boldsymbol{\mu} = E(\widetilde{\mathbf{R}}) = \begin{bmatrix} E(\widetilde{R}_1) \\ E(\widetilde{R}_2) \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ E(\widetilde{R}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \mu_n \end{bmatrix},$$

ενώ ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ ορίζεται ως

$$\Sigma = Cov(\widetilde{\mathbf{R}}) = \begin{bmatrix} Var(\widetilde{R}_1) & Cov(\widetilde{R}_1,\widetilde{R}_2) & \cdots & Cov(\widetilde{R}_1,\widetilde{R}_n) \\ Cov(\widetilde{R}_2,\widetilde{R}_1) & Var(\widetilde{R}_2) & \cdots & Cov(\widetilde{R}_2,\widetilde{R}_n) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ Cov(\widetilde{R}_n,\widetilde{R}_1) & Cov(\widetilde{R}_n,\widetilde{R}_2) & \cdots & Var(\widetilde{R}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

Ως γνωστόν, η συνδιακύμανση μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών, για παράδειγμα μεταξύ των $\widetilde{R}_i$ και $\widetilde{R}_j$, $i \neq j$ είναι ένα μέτρο του βαθμού γραμμικής εξάρτησης (ή συσχέτισης) μεταξύ των δύο αυτών τυχαίων μεταβλητών. Επειδή η συνδιακύμανση εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης των μεταβλητών, συχνά χρησιμοποιούμε την τυποποιημένη συνδιακύμανση την οποία αποκαλούμε συντελεστή συσχέτισης των δύο μεταβλητών. Ο συντελεστής συσχέτισης ορίστηκε από τη σχέση (ref: corr1) σε προηγούμενο κεφάλαιο. Την σχέση αυτή σε συμβολισμό του παρόντος κεφαλαίου την επαναδιατυπωνουμε παρακάτω,

$$\rho_{ij} = Corr(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_j) = \frac{Cov(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_j)}{\sqrt{Var(\widetilde{R}_i)}\sqrt{Var(\widetilde{R}_j)}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}. \qquad \#$$

Παρατήρηση

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο συντελεστής συσχέτισης ρ_{ij} παίρνει τιμές στο διάστημα $[-1,1]$. Όταν $\rho_{ij} = 0$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $\widetilde{R}_i$ και $\widetilde{R}_j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες (αλλά όχι απαραιτήτως γενικά ανεξάρτητες). Αν $\rho_{ij} = -1$ τότε οι $\widetilde{R}_i$ και $\widetilde{R}_j$ συνδέονται με πλήρη αρνητική γραμμική εξάρτηση, ενώ αν $\rho_{ij} = 1$ τότε η μεταξύ τους σχέση είναι ακριβής θετική γραμμική.

Μιά ιδιότητα της διακύμανσης η οποία θα μας φανεί πολύ χρήσιμη αργότερα είναι η ιδιότητα της διακύμανσης του αθροίσματος δύο (ή περισσοτέρων) τυχαίων μεταβλητών. Αν και την ιδιότητα αυτή την έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο την επαναδιατυπώνουμε εδώ γιά λόγους ευκολίας. Συγκεκριμένα έχουμε γιά w_i και w_j πραγματικούς αριθμούς,

$$\begin{aligned} Var(w_i\widetilde{R}_i + w_j\widetilde{R}_j) &= w_i^2 Var(\widetilde{R}_i) + w_j^2 Var(\widetilde{R}_j) + 2w_iw_jCov(\widetilde{R}_i,\widetilde{R}_j) = \qquad \# \\ &= w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2w_iw_j\sigma_{ij}. \end{aligned}$$

Η παραπάνω ιδιότητα θα αποτελέσει τον κύριο πυλώνα στη Θεωρία Χαρτοφυλακίου πού θα αναλύσουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Ο λόγος θα φανεί στη συνέχεια. Στο παρόν σημείο αρκεί να αναφέρουμε ότι το κλειδί έγκειται στην παρουσία της συνδιακύμανσης σ_{ij} στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης. Η τελευταία μπορεί να επαναδιατυπωθεί αντικαθιστώντας την συνδιακύμανση σ_{ij} με τον συντελεστή συσχέτισης ρ_{ij}. Συγκεκριμένα, αφου

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

η παραπάνω σχέση γίνεται

$$Var(w_i\widetilde{R}_i + w_j\widetilde{R}_j) = w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2w_iw_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j. \qquad \#$$

Ας εξετάσουμε το πώς η παραπάνω σχέση μετατρέπεται αν υποθέσουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\widetilde{R}_i$ και $\widetilde{R}_j$ επιδεικνύουν πλήρη αρνητική ($\rho_{ij} = -1$) ή πλήρη θετική ($\rho_{ij} = 1$) συσχέτιση. Ας ξεκινήσουμε με την δεύτερη περίπτωση, $\rho_{ij} = 1$. Σε αυτή τη περίπτωση η σχέση (ref: var_propa2) γίνεται,

$$Var(w_i\widetilde{R}_i + w_j\widetilde{R}_j) = w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2w_iw_j\sigma_i\sigma_j = \quad \#$$
$$= (w_i\sigma_i + w_j\sigma_j)^2. \quad \#$$

Παιρνοντας την (θετική) τετραγωνική ρίζα και από τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας έχουμε,

$$\sqrt{Var(w_i\widetilde{R}_i + w_j\widetilde{R}_j)} = w_i\sigma_i + w_j\sigma_j$$

ή χρησιμοποιώντας το $\sigma(w_i\widetilde{R}_i + w_j\widetilde{R}_j)$ για να εκφράσουμε την τυπική απόκλιση του σταθμισμένου αθρίσματος των $\widetilde{R}_i$ και $\widetilde{R}_j$ έχουμε

$$\sigma(w_i\widetilde{R}_i + w_j\widetilde{R}_j) = w_i\sigma_i + w_j\sigma_j. \quad \#$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι στη περίπτωση κατά την οποία οι αποδόσεις $\widetilde{R}_i$ και $\widetilde{R}_j$ είναι πλήρως και θετικά συσχετιζόμενες τότε (και μόνο τότε) η τυπική απόκλιση του σταθμισμένου αθροίσματος είναι ίση με το σταθμισμένο άθροισμα των τυπικών αποκλίσεων. Αν τώρα ερμηνεύσουμε την τυπική απόκλιση του $w_i\widetilde{R}_i + w_j\widetilde{R}_j$ ως το ρίσκο ενός χαρτοφυλακίου πού περιέχει ποσοστό w_i του asset i και w_j του asset j τότε η σχέση (ref: var_propa3) μας λέει ότι το ρίσκο του χαρτοφυλακίου είναι ίσο με το άθροισμα των ρίσκων των επιμέρους assets μόνο αν οι αποδόσεις των δύο assets είναι πλήρως και θετικά συσχετιζόμενες.

Στη περίπτωση πού η συσχέτιση μεταξύ των $\widetilde{R}_i$ και $\widetilde{R}_j$ δεν είναι πλήρης και θετική, δηλαδή η περίπτωση $\rho_{ij} < 1$, το ρίσκο του χαρτοφυλακίου είναι μικρότερο του αθροίσματος των ρίσκων των δύο assets. Ας εξετάσουμε την εντελώς αντίθετη περίπτωση, κατά την οποία τα δύο assets επιδεικνύουν πλήρη αρνητική συσχέτιση, $\rho_{ij} = -1$. Σε αυτή τη περίπτωση, $\sigma_{ij} = -\sigma_i\sigma_j$ και η σχέση (ref: var_propa2) γίνεται,

$$Var(w_i\widetilde{R}_i + w_j\widetilde{R}_j) = w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 - 2w_iw_j\sigma_i\sigma_j = \quad \#$$
$$= (w_i\sigma_i - w_j\sigma_j)^2. \quad \#$$

Παιρνοντας και πάλι την τετραγωνική ρίζα και από τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας έχουμε,

$$\sqrt{Var(w_i\widetilde{R}_i + w_j\widetilde{R}_j)} = w_i\sigma_i - w_j\sigma_j$$

ή ισοδύναμα,

$$\sigma(w_i\widetilde{R}_i + w_j\widetilde{R}_j) = w_i\sigma_i - w_j\sigma_j. \quad \#$$

Σε αυτή τη περίπτωση η τυπική απόκλιση του $w_i\widetilde{R}_i + w_j\widetilde{R}_j$ μπορεί να γίνει μηδέν (και το ρίσκο να εξαλειφθεί πλήρως). Πράγματι, θέτοντας,

$$w_i\sigma_i - w_j\sigma_j = 0 \quad \#$$

και λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό

$$w_i + w_j = 1$$

ο οποίος εκφράζει το γεγονός ότι όλο το κεφάλαιο κατανέμεται στα δύο αυτά assets, έχουμε,

$$(1 - w_j)\sigma_i - w_j\sigma_j = 0$$

απ'όπου συνεπάγεται ότι

$$w_j = \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \sigma_j} \qquad \#$$

και άρα,

$$w_i = 1 - \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \sigma_j}. \qquad \#$$

Κατά συνέπεια αν κατανείμουμε το κεφάλαιο μας στα assets i kai j σύμφωνα με τις σχέσεις (ref: we1) και (ref: we2) τότε το ρίσκο του χαρτοφυλακίου πού θα προκύψει (όπως μετριέται από την τυπική απόκλιση) θα είναι μηδέν. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των w_j και w_i στην (ref: zero_risk) έχουμε,

$$\left(1 - \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \sigma_j}\right)\sigma_i - \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i + \sigma_j}\right)\sigma_j = \sigma_i - \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i + \sigma_j} - \frac{\sigma_i\sigma_j}{\sigma_i + \sigma_j} =$$

$$= \frac{\sigma_i(\sigma_i + \sigma_j) - \sigma_i^2 - \sigma_i\sigma_j}{\sigma_i + \sigma_j} = \frac{\sigma_i^2 + \sigma_i\sigma_j - \sigma_i^2 - \sigma_i\sigma_j}{\sigma_i + \sigma_j} = 0.$$

Η παραπάνω ανάλυση καταδεικνύει αυτό πού είπαμε πριν σχετικά με τη λειτουργία της συνδιακύμανσης ή συσχέτισης στον μετριασμό του ρίσκου του χαρτοφυλακίου καί άρα στον σημαντικό ρόλο πού παίζει η συσχέτιση των αποδόσεων σε ολόκληρη την Θεωρία Χαρτοφυλακίου. Βεβαίως, η περίπτωση κατά την οποία οι αποδόσεις $\widetilde{R}_i$ και $\widetilde{R}_j$ επιδεικνύουν πλήρη αρνητική συσχέτιση είναι μόνο θεωρητικού χαρακτήρα και δεν απαντάται στην πράξη. Συνήθως, οι αποδόσεις των μετοχών πού διαπραγματεύονται στο ίδιο Χρηματιστήριο επιδεικνύουν θετικές (αλλά όχι πλήρεις) συσχετίσεις $(0 < \rho_{ij} < 1)$.

Εκτιμήσεις των Μέσων, Διακυμάνσεων, Συνδιακυμάνσεων και Συσχετίσεων των Αποδόσεων

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η Θεωρία Χαρτοφυλακίου κάνει εκτεταμένη χρήση του διανύσματος $\boldsymbol{\mu}$ των μέσων και του πίνακα Σ των διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των αποδόσεων. Στις πρακτικές εφαρμογές της Θεωρίας, αυτό πού χρειαζόμαστε είναι συνεπείς εκτιμήσεις $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ και $\widehat{\Sigma}$ των $\boldsymbol{\mu}$ και Σ αντίστοιχα. Αυτές τις εκτιμήσεις συνήθως τις παίρνουμε κάνοντα χρήση των γνωστών δειγματικών ροπών οι οποίες, όπως γνωρίζουμε απο την Στατιστική, είναι συνεπείς εκτιμητές των αντίστοιχων θεωρητικών ροπών. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μονο τρείς μετοχές, $(n = 3)$: την μετοχή της Apple $(i = 1)$ την μετοχή της Bank of America $(i = 2)$ και την μετοχή της JP Morgan $(i = 3)$. Γιά αυτές τις τρείς μετοχές έχουμε ημερήσιες αποδόσεις για την περίοδο 28/2/2000 - 31/12/2018. Από αυτά τα στατιστικά δεδομένα, μπορούμε να εκτιμήσουμε το $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ και $\widehat{\Sigma}$. Τα αποτελέσματα αυτών των εκτιμήσεων παρουσιάζονται παρακάτω:

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mu}_1 \\ \widehat{\mu}_2 \\ \widehat{\mu}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000745 \\ 0.000441 \\ 0.000128 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \widehat{\sigma}_1^2 & \widehat{\sigma}_{12} & \widehat{\sigma}_{13} \\ \widehat{\sigma}_{21} & \widehat{\sigma}_2^2 & \widehat{\sigma}_{23} \\ \widehat{\sigma}_{31} & \widehat{\sigma}_{32} & \widehat{\sigma}_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000684 & 0.000131 & 0.000213 \\ 0.000131 & 0.000341 & 0.000192 \\ 0.000213 & 0.000192 & 0.000582 \end{bmatrix}.$$

Τι παρατηρούμε από τα παραπάνω αποτελέσματα? Το πρώτο πού παρατηρούμε είναι ότι η μέση ημερήσια απόδοση της μετοχής της Apple είναι η μεγαλύτερη εκ των τριών, ακολουθούμενη από την μέση ημερήσια απόδοση της μετοχής της Bank of America. Συγκεκριμένα, η μέση ημερήσια απόδοση των Apple, Bank of America και JP Morgan είναι 0.000745, 0.000441 και 0.000128 ή 0.0745%, 0.0441% και 0.0128% αντίστοιχα. Στη συνέχεια, στρέφουμε την προσοχή μας στον $\widehat{\Sigma}$. Αυτό πού παρατηρούμε αμέσως είναι ότι η (εκτιμημένη) διακύμανση της Apple είναι η μεγαλύτερη των τριών (0.000684) ακολουθούμενη από την διακύμανση της JP Morgan (0.000582) και τέλος από την διακύμανση της Bank of America (0.000341). Αν η εκτιμημένη διακύμανση θεωρηθεί ως μιά εκτίμηση του κινδύνου (ρίσκου) της κάθε μετοχής, τότε συμπεραίνουμε ότι η μετοχή με την μεγαλύτερη μέση απόδοση, δηλαδή η μετοχή της Apple, είναι και η μετοχή με το μεγαλύτερο ρίσκο. Το επόμενο σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι οι εκτιμήσεις των συνδιακυμάνσεων είναι όλες θετικές. Πόσο έντονη είναι η θετική συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων? Με άλλα λόγια ποιό ζεύγος αποδόσεων παρουσιάζει την μεγαλύτερη θετική συσχέτιση και πόσο κοντά στην "πλήρη" συσχέτιση βρίσκεται αυτή? Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, πρέπει να μετατρέψουμε τον πίνακα συνδιακυμάνσεων $\widehat{\Sigma}$ σε πίνακα συσχετίσεων $\widehat{\Phi}$. Αυτό μπορεί να γίνει κάνοντας χρήση του τύπου (ref: corr1n) και αντικαθιστώντας τις θεωρητικές ροπές με τις αντίστοιχες δειγματικές:

$$\widehat{\rho}_{ij} = \frac{\widehat{\sigma}_{ij}}{\widehat{\sigma}_i \widehat{\sigma}_j}.$$

Με αυτό το τρόπο υπολογισμού, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας $\widehat{\Phi}$,

$$\widehat{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_1^2} & \frac{\widehat{\sigma}_{12}}{\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2} & \frac{\widehat{\sigma}_{13}}{\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_3} \\ \frac{\widehat{\sigma}_{21}}{\widehat{\sigma}_2\widehat{\sigma}_1} & \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{\widehat{\sigma}_2^2} & \frac{\widehat{\sigma}_{23}}{\widehat{\sigma}_2\widehat{\sigma}_3} \\ \frac{\widehat{\sigma}_{31}}{\widehat{\sigma}_3\widehat{\sigma}_1} & \frac{\widehat{\sigma}_{32}}{\widehat{\sigma}_3\widehat{\sigma}_2} & \frac{\widehat{\sigma}_3^2}{\widehat{\sigma}_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\rho}_{11} & \widehat{\rho}_{12} & \widehat{\rho}_{13} \\ \widehat{\rho}_{21} & \widehat{\rho}_{22} & \widehat{\rho}_{23} \\ \widehat{\rho}_{31} & \widehat{\rho}_{32} & \widehat{\rho}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.270 & 0.337 \\ 0.270 & 1 & 0.430 \\ 0.337 & 0.430 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τώρα πλέον είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την ένταση της θετικής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων των τριών μετοχών. Παρατηρούμε ότι την ισχυρότερη θετική συσχέτιση επιδεικνύουν οι αποδόσεις των μετοχών Bank of America και JP Morgan των οποίων ο συντελεστής συσχέτισης είναι $\widehat{\rho}_{23} = 0.430$.

Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει δεδομένου ότι και οι δύο μετοχές ανήκουν στον τραπεζικό/χρηματοποστωτικό κλάδο. Αντίθετα ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της Apple και της Bank of America εκτιμήθηκε στην τιμή $\widehat{\rho}_{12} = 0.270$, η οποία θεωρείται αρκετά χαμηλή. Μετοχές των οποίων οι αποδόσεις επιδεικνύουν χαμηλή συσχέτιση θεωρούνται ότι προσφέρουν σημαντικά "οφέλη διαφοροποίησης" και ως εκ τούτου πρέπει να συμπεριλαμβάνονται στο άριστο χαρτοφυλάκιο μετοχών. Το πώς ακριβώς κατασκευάζουμε το άριστο χαρτοφυλάκιο (ή τα άριστα χαρτοφυλάκια) μετοχών και ποιός είναι ακριβώς ο ρόλος των $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ και $\widehat{\Sigma}$ στην όλη διαδικασία θα το εξετάσουμε αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο.

Παράρτημα Δ: Κεντρικά Οριακά Θεωρήματα γιά Εξαρτημένες Τυχαίες Μεταβλητές

Στο παρόν παράρτημα θα παραθέσουμε ορισμένα Κεντρικά Oρικά Θεωρήματα (ή εκδοχές του ΚΟΘ) γιά την περίπτωση κατά την οποία η αρχική στοχαστική ακολουθία (από την οποία θα σχηματίσουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων) επιδεικνύει κάποια μορφή εξάρτησης (και ετερογένειας). Το βασικό ερώτημα είναι το εξής: Έστω μία αρχική στοχαστική ακολουθία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ η οποία *δεν* είναι ανεξάρτητη αλλά χαρακτηρίζεται από κάποια μορφή εξάρτησης (η οποία θα εξειδικεύεται ανά περίπτωση). Έστω επίσης οι (ντετερμινιστικές) ακολουθίες $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ και $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ με $\gamma_n > 0$. Από τις $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$, $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ και $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ δημιουργούμε τη στοχαστική ακολουθία $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ των τυποποιημένων μερικών αθροισμάτων σύμφωνα με τον τύπο,

$$Z_n = \gamma_n^{-1}\left(\sum_{t=1}^{n} X_t - b_n\right).$$

Το ερώτημα έιναι κάτω από ποιές ιδιότητες για την $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ η νέα ακολουθία $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ συγκλίνει κατά νόμο στην τυχαία μεταβλητή Z, με $Z \sim N(0,1)$, δηλαδή $Z_n \overset{L}{\to} N(0,1)$. Να σημειωθεί ότι σε όλα τα θεωρήματα που θα παραθέσουμε θα κάνουμε την απλουστευτική υπόθεση ότι όλες οι αρχικές τυχαίες μεταβλητές X_t έχουν κοινό μέσο ίσο με το μηδέν. Επίσης, σε όλη τη συζήτηση που θα ακολουθήσει, η ακολουθία $\{S_n\}_{n\geq 1}$ θα συμβολίζει την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της αρχικής στοχαστικής ακολουθίας $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$, δηλαδή $S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$.

Το πρώτο ΚΟΘ πού θα εξετάσουμε είναι αυτό στο οποίο η αρχική ακολουθία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ χαρακτηρίζεται από το 'απλούστερο' είδος εξάρτησης, την επονομαζόμενη m-εξάρτηση. Επίσης το θεώρημα υποθέτει πλήρη διαχρονική ομοιογένεια υπό τη μορφή της αυστηρής στασιμότητας.

Theorem *(Ibragimov και Linnik 1971)*

Έστω η αυστηρά στάσιμη και m-εξαρτημένη στοχαστική ακολουθία, $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ με $E(X_1) = 0$ και με πεπερασμένες διακυμάνσεις $E(X_1^2) = \sigma_X^2 < \infty$. Τότε η *μακροχρόνια διακύμανση* σ^2 της $\{X_t\}_{t\geq 1}$

$$\sigma^2 = E(X_1^2) + 2\sum_{j=2}^{\infty} E(X_1 X_j)$$

ορίζεται καλώς, υπό την έννοια ότι η σειρά $\sum_{j=2}^{\infty} E(X_1 X_j)$ συγκλίνει. Επιπλέον, αν $\sigma \neq 0$, τότε

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n \xrightarrow{L} N(0,1).$$

Μία από τις περιοριστικές υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι η αρχική ακολουθία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι αυστηρά στάσιμη. Το επόμενο θεώρημα διατηρεί τις υποθέσεις της m-εξάρτησης, του μηδενικού μέσου και των πεπερασμένων διακυμάνσεων, αλλά καταργεί την υπόθεση της αυστηρής στασιμότητας:

Theorem ***(Marsaglia 1954)***

Έστω η m-εξαρτημένη στοχαστική ακολουθία, $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ με $E(X_1) = 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι η ακολουθία $\{E(X_t^2)\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ των διακυμάνσεων της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι φραγμένη. Ακόμα, ορίζουμε την ακολουθία $\{s_n^2\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ των διακυμάνσεων της $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, δηλαδή $s_n^2 = E(S_n^2)$, για την οποία υποθέτουμε ότι

$$|s_n^2 - n\sigma^2| = O(1), \qquad \#$$

για κάποια σταθερή $\sigma^2 > 0$, και επίσης

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{-(2+\delta)} \sum_{t=1}^{n} E(|X_t|^{2+\delta}) = 0, \qquad \#$$

για κάποιο $\delta > 0$. Τότε

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n \xrightarrow{L} N(0,1).$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η άρση της υπόθεσης της αυστηρής στασιμότητας συνεπάγεται ότι οι διακυμάνσεις των X_t δεν είναι (αναγκαστικά) σταθερές, αλλά μεταβάλλονται με το δείκτη t. Όμως η έκταση αυτής της μεταβολής ελέγχεται από τις επιπρόσθετες υποθέσεις του θεωρήματος.

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε ένα κεντρικό οριακό θεώρημα στο οποίο η αρχική ακολουθία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι martingale διαφοράς.

Theorem ***(Billingsley 1961)***

Έστω η αυστηρά στάσιμη (και εργοδική) στοχαστική ανέλιξη, $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ με

$$E(X_1^2) = \sigma_X^2 < \infty.$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι martingale διαφοράς ως προς το (φυσιολογικό) φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\geq 1}$ με $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_t)$, δηλαδή

$$E(X_1) = 0 \qquad \#$$

και

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}^X) = E(X_t \mid X_1, X_2, \ldots, X_{t-1}) = 0,\ t = 2,3,\ldots \qquad \#$$

σχεδόν βέβαια. Τότε

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n \xrightarrow{L} N(0,1).$$

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε κεντρικά οριακά θεωρήματα στα οποία η αρχική ακολουθία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι ασυμπτωτικά ανεξάρτητη. Ο τρόπος με τον οποίο θα επιθέσουμε την ασυμπτωτική ανεξαρτησία είναι μέσω της τεχνικής έννοιας της "mixing" στοχαστικής ανέλιξης. Όπως θα δούμε Μήπως το βασικό ΚΟΘ για ανεξάρτητες και ταυτόνομες στοχαστικές ανελίξεις επεκτείνεται ως ένα βαθμό, για ασυμπτωτικά ανεξάρτητες (τύπου mixing) και στάσιμες ανελίξεις.

Theorem *(Ibragimov 1962, για* **α** *–mixing)*

Έστω η αυστηρά στάσιμη και α –mixing στοχαστική ακολουθία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

$$E(X_1) = 0, \qquad \#$$

$$E|X_1|^{2+\delta} < \infty,\ \delta > 0 \qquad \#$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty. \qquad \#$$

Τότε

$$\sigma^2 = E(X_1^2) + 2\sum_{j=2}^{\infty} E(X_1 X_j) < \infty \qquad \#$$

και, εάν $\sigma > 0$,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n \xrightarrow{L} N(0,1). \qquad \#$$

Το παραπάνω θεώρημα υποθέτει ότι η αρχική ακολουθία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$ είναι αυστηρά στάσιμη. Το ερώτημα που ανακύπτει σε αυτό το σημείο είναι το πόσο σημαντική είναι αυτή η υπόθεση για το κεντρικό οριακό θεώρημα. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα μας λέει ότι μπορούμε να άρουμε την υπόθεση της αυστηρής στασιμότητας και παράλληλα να διατηρήσουμε το βασικό συμπέρασμα του ΚΟΘ (σύγκλιση στη Κανονική κατανομή):

Theorem *(Herrndorf 1984)*

Έστω η α –mixing στοχαστική ακολουθία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}_+}$, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

$$E(X_t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \#$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{S_n^2}{n}\right) = \sigma^2,\ 0 < \sigma^2 < \infty \qquad \#$$

$$\sup_{t\in\mathbb{N}} E|X_t|^b < \infty, \text{ για } b > 2 \qquad \#$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)^{1-\frac{2}{b}} < \infty. \qquad \#$$

Τότε

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n \xrightarrow{L} N(0,1).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι όπως και στην περίπτωση του θεωρήματος (ref: ibragimov-62), στα πλαίσια του οποίου η αρχική ακολουθία $\{X_t\}_{t\geq 1}$ είναι αυστηρά στάσιμη, έτσι και στο θεώρημα (ref: herrndorf-84) επιβάλλουμε την ύπαρξη των ροπών των X_t τάξης $(2+\delta)$ μέσω της συνθήκης (ref: herr2). Αυτή η συνθήκη απαιτεί από τις ροπές τάξης $b,\ b > 2$ να είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Και πάλι παρατηρούμε ότι η παράμετρος b που καθορίζει την τάξη των απαιτούμενων ροπών καθορίζει και το ρυθμό με τον οποίο οι συντελεστές mixing συγκλίνουν στο μηδέν μέσω της συνθήκης (ref: herr3). Με άλλα λόγια, η παράμετρος πού καθορίζει την τάξη των ροπών οι οποίες είναι πεπερασμένες, καθορίζει επίσης και το "ρυθμό" με τον οποίο επιτυγχάνεται η ασυμπτωτική ανεξαρτησία.

Ερωτήσεις Επανάληψης

1) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: "Η ανάλυση των τριμηνιαίων παρτηρήσεων γιά τις αποδόσεις του S&P 500 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ανέλιξη αυτών των αποδόσεων είναι στάσιμη πρώτης τάξης".

2) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: "Η ανάλυση των τριμηνιαίων παρτηρήσεων γιά τις αποδόσεις του S&P 500 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ανέλιξη αυτών των αποδόσεων είναι γραμμικά ανεξάρτητη (ασυσχέτιστη)".

3) Ποιούς στατιστικούς ελέγχους για τη γραμμική ανεξαρτησία των αποδόσεων γνωρίζετε? Να διατυπώσετε με σαφήνεια την H_0 σε κάθε περίπτωση.

4) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: "Η αποδοχή της υπόθεσης της γραμμικής ανεξαρτησίας για την ανέλιξη των αποδόσεων δεν συνεπάγεται απαραίτητα την υπόθεση της γενικής ανεξαρτησίας γιά την ίδια ανέλιξη. Με ποιά επιπλέον υπόθεση, η γραμμική ανεξαρτησία καθίσταται ισοδύναμη της γενικής ανεξαρτησίας?

5) Να περιγράψετε το είδος της διαχρονικής εξάρτησης πού φαίνεται να χαρακτηρίζει την ανέλιξη των αποδόσεων. Από πού πηγάζει αυτή η εξάρτηση? Από τον δεσμευμένο μέσο ή από την δεσμευμένη διακύμανση?

6) Να εξηγήσετε τι σημαίνει ο όρος "δυναμική ετεροσκεδαστικότητα". Πώς εμφανίζεται εμπειρικά η δυναμική ετεροσκεδαστικότητα στη χρονοσειρά των αποδόσεων?

7) Ποιά είναι η σχέση μεταξύ της εμπειρικής έννοιας "μεταβλητότητα κατά κύματα" και της θεωρητικής έννοιας "δυναμική ετεροσκεδαστικότητα".

8) Να αναλύσετε τους εμπειρικούς ελέγχους που γνωρίζετε γιά την υπόθεση της

ύπαρξης δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας στην ανέλιξη των αποδόσεων.

9) Για ποιό διάστημα (συχνότητα) παρατήρησης το φαινόμενο της "μεταβλητότητας κατά κύματα" είναι εντονώτερο?

10) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: "Η κατανομή των αποδόσεων δεν είναι η Κανονική. Οι αποκλίσεις από την Κανονικότητα οφείλονται κυρίως στην παρουσία λεπτοκύρτωσης και είναι εντονώτερες όταν το διάστημα παρατήρησης είναι μικρό (π.χ ημερήσιες παρατηρήσεις)".

11) Να δείξετε ότι αν η ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι ανεξάρτητη, ταυτόνομη και Κανονική, τότε η ανέλιξη των λογαριθμικών τιμών $\{p_t\}$ είναι Κανονικός τυχαίος περίπατος με τάση.

12) Να δείξετε ότι αν η ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι ανεξάρτητη, ταυτόνομη και Κανονική, τότε η ανέλιξη των λογαριθμικών τιμών $\{p_t\}$ δεν είναι στάσιμη πρώτης τάξης. Σε αυτή τη περίπτωση τι μπορείτε να πείτε γιά το είδος της μη-στασιμότητας πού χαρακτηρίζει την $\{p_t\}$?

13) Να δείξετε ότι αν η ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_t\}$ είναι ανεξάρτητη, ταυτόνομη και Κανονική, τότε η διακύμανση $Var(p_t)$ των λογαριθμικών τιμών p_t είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου t.

14) Να εξηγήσετε τη διαφορά μεταξύ της ντετερμινιστικής και στοχαστικής τάσης και το πώς η κάθε μία εμφανίζεται στα εμπειρικά δεδομένα.

15) Υπό ποιά έννοια η παρουσία μη-Κανονικότητας στη κατανομή των αποδόσεων θεωρείται "παράδοξο"? Ποιός είναι ο ρόλος του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος σε αυτό το παράδοξο?

16) Ποιά ήταν η εξήγηση του Mandelbrot για το παράδοξο πού αναφέραμε στην προηγούμενη ερώτηση? Πώς ο Mandelbrot κατάφερε να εξηγήσει το γεγονός ότι η κατανομή των αποδόσεων είναι λεπτόκυρτη σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η απόδοση σε ένα χρονικό διάστημα (π.χ μιά ημέρα) είναι το "άθροισμα" πολλών στοιχειωδών αποδόσεων?

17) Ποίες ήταν οι δυσάρεστες συνέπειες της εξήγησης του Mandelbrot για την μη-Κανονικότητα των αποδόσεων? Πως αντέδρασαν οι οικονομολόγοι της εποχής εκείνης στην θεωρία του Mandelbrot?

18) Ποιά εναλλακτική εξήγηση πρότεινε ο Clark για την παρουσία της λεπτοκύρτωσης στη κατανομή των αποδόσεων? Ποιό είναι το μεγάλο πλεονέκτημα της θεωρίας του Clark έναντι αυτής του Mandelbrot?

19) Να διατυπώσετε αναλυτικά όλες τις υποθέσεις πού χαρακτηρίζουν το μοντέλο ARCH(1) γιά τις αποδόσεις. Στη συνέχεια να εξάγετε τον δεσμευμένο μέσο και τη δεσμευμένη διακύμανση των αποδόσεων και να αναλύσετε ποιά από τις δύο αυτές δεσμευμένες ροπές είναι ο φορέας της διαχρονικής εξάρτησης.

20) Να διατυπώσετε αναλυτικά όλες τις υποθέσεις πού χαρακτηρίζουν το μοντέλο GARCH(1,1) γιά τις αποδόσεις. Ποιά είναι η βασική διαφορά μεταξύ των ARCH(1) και GARCH(1,1) μοντέλων?

21) Κάτω από ποιά συνθήκη η αδέσμευτη διακύμανση των αποδόσεων στο πλαίσιο ενός GARCH(1,1) μοντέλου είναι πεπερασμένη? Είναι δυνατόν η δεσμευμένη διακύμανση να είναι πεπερασμένη γιά κάθε χρονική στιγμή t και ταυτόχρονα η αδέσμευτη διακύμανση να είναι άπειρη?

22) Έστω οι αποδόσεις $\widetilde{R}_i$ και $\widetilde{R}_j$ των μετοχών i και j αντίστοιχα σε μιά (οποιαδήποτε) χρονική στιγμή. Έστω επίσης ο συντελεστής συσχέτισης ρ_{ij} μεταξύ των δύο αυτών αποδόσεων. Να διερευνήσετε το πώς συμπεριφέρεται το ρίσκο (όπως μετράται με την τυπική απόκλιση) ενός χαρτοφυλακίου πού αποτελείται από w_i ποσοστό της μετοχής i και w_j ποσοστό της μετοχής j (με $w_i + w_j = 1$) όταν α) $\rho_{ij} = 1$, β) $\rho_{ij} = 0$, γ) $\rho_{ij} = -1$.

Η Θεωρία των Αποτελεσματικών Αγορών

Εισαγωγή

Η έννοια της αποτελεσματικότητας των αγορών κεφαλαίου κατέχει κεντρική θέση στη σύγχρονη Χρηματοοικονομική Θεωρία. Η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών πέρασε από διάφορα στάδια θεωρητικής επεξεργασίας καί εμπειρικής διερεύνησης. Η έννοια αυτή (αν και προυπήρχε σε μιά διαισθητική αν και όχι αποκρυσταλλωμένη μορφή από την αρχή του εικοστού αιώνα) εισήχθη στη βιβλιογραφία στά μέσα της δεκαετίας του 1960 από τους Paul Samuelson και Eugene Fama, με τον τελευταίο να ορίζει διαφορετικά είδη αποτελεσματικότητας και να ερευνά εμπειρικά το κάθε είδος.

Ο όρος "αποτελεσματική" αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο οι επενδυτές επεξεργάζονται τις διαθέσιμες σε αυτούς πληροφορίες. Η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών ισχυρίζεται ότι οι επενδυτές επεξεργάζονται με "αποτελεσματικό"τρόπο τις διαθέσιμες πληροφορίες πού αφορούν τις υπό διαπραγμάτευση εταιρείες. Τι σημαίνει "αποτελεσματικός τρόπος"? Ο όρος αποτελεσματικός σημαίνει δύο πράγματα: ταχύτητα και ακρίβεια. Συγκεκριμένα, έστω ότι κατά τη χρονική στιγμή t δημοσιεύονται κάποια θετικά νέα σχετικά με την εταιρεία i. Οι επενδυτές αντιδρούν *αυτόματα/στιγμιαία* στην ανακοίνωση αυτών των νέων (αγοράζοντας μετοχές της εταιρείας i) προκαλώντας μιά αυτόματη αύξηση της τιμής, P_{it}, της μετοχής i. Επιπλέον εκτός της ταχύτητας με την οποία οι επενδυτές επεξεργάζονται την πληροφορία, ένα επιπλέον στοιχείο είναι και η ακρίβεια στην επεξεργασία της πληροφορίας. Τι σημαίνει ακρίβεια? Σημαίνει ότι οι επενδυτές είναι σε θέση να καταλάβουν πλήρως τις συνέπειες πού έχει η νέα αυτή πληροφορία για την μελλοντική κερδοφορία της επιχείρησης. Με άλλα λόγια οι επενδυτές διαμορφώνουν *ορθολογικές προσδοκίες* για τα μελλοντικά κέρδη της επιχείρησης. Ως συνέπεια των ορθολογικών τους προσδοκιών, η αύξηση στην τιμή πού θα προκαλέσουν οι επενδυτές θα είναι τόση (ούτε μεγαλύτερη ούτε μικρότερη) όση συνεπάγεται από τα συγκεκριμένα νέα.

Η ταχύτητα και η ακρίβεια με τις οποίες αντιδρούν οι επενδυτές στην έλευση της νέας πληροφορίας έχει ως αποτέλεσμα την αυτόματη ενσωμάτωση της πληροφορίας στην τιμή της μετοχής. Με άλλα λόγια σε κάθε χρονική στιγμή t η τιμή της μετοχής P_{it} αντανακλά πλήρως και ακριβώς τις διαθέσιμες πληροφορίες. Αυτό σημαίνει ότι η αγορά δεν δίνει την δυνατότητα σε κανένα μεμονωμένο επενδυτή να εκμεταλλευτεί την έλευση της νέας πληροφορίας γιατί η ίδια η αγορά είναι καλύτερος επεξεργαστής πληροφοριών (ύπό την έννοια της ταχύτητας και της ακρίβειας) από οποιονδήποτε μεμονωμένο επενδυτή. Κατά συνέπεια η προσπάθεια εκ μέρους του κάθε μεμονωμένου επενδυτή να συλλέξει πληροφορίες για οποιαδήποτε μετοχή είναι άσκοπη και άνευ αποτελέσματος. Το μόνο πού έχει να κάνει ο επενδυτής είναι να παρατηρήσει την τιμή της μετοχής για την οποία ενδιαφέρεται, αφού η τιμή είναι ο "φορέας" όλης της διαθέσιμης πληροφορίας. Αφού λοιπόν η αγορά μετουσιώνει αυτομάτως και με απόλυτη ακρίβεια την όποια πληροφορία έρχεται τη χρονική στιγμή t σε μεταβολή της τιμής η οποία συντελείται μέσα στην ίδια στιγμή t οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η πληροφορία την t δεν παίζει κανένα ρόλο στην τιμή πού θα διαμορφωθεί την χρονική στιγμή $t + 1$. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι η μεταβολή της τιμής από τη μιά χρονική στιγμή στην άλλη, δηλαδή από την t στην $t + 1$, συντελείται με τυχαίο, μη-προβλέψιμο τρόπο αφού είναι συνάρτηση μόνο των μελλοντικών "νέων" (της πληροφορίας πού θα έλθει την χρονική στιγμή $t + 1$) τα οποία κανείς δεν γνωρίζει εκ των προτέρων.

Ας εξετάσουμε την παραπάνω διαδικασία στα πλαίσια ενός υποθετικού παραδείγματος. Έστω μιά φαρμακευτική εταιρεία, i, της οποίας η τιμή P_{it} την χρονική στιγμή t είναι 10 δολλάρια. Έστω ότι την ίδια χρονική στιγμή t γίνεται γνωστό ότι στην εταιρεία δόθηκε άδεια για την παρασκευή ενός νέου φαρμάκου το οποίο αναμένεται να αυξήσει την κερδοφορία της επιχείρησης. Η αγορά αυτομάτως μεταβαίνει από κατάσταση ισορροπίας σε κατάσταση υπερβάλλουσας ζήτησης για την μετοχή της εταιρείας. Αυτή η ζήτηση έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της τιμής της μετοχής. Μέχρι ποιού σημείου είναι σωστό (ορθολογικό) να αυξηθεί η τιμή? Μέχρι του σημείου στο οποίο η νέα τιμή να αντανακλά την μελλοντική αυξημένη κερδοφορία της επιχείρησης. Ας πούμε ότι αυτή η τιμή είναι τα 12 δολλάρια. Η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών μας λέει ότι η αγορά όντως θα αυξήσει στιγμιαία την τιμή από τα 10 στα 12 δολλάρια, ουτε παραπάνω ούτε παρακάτω. Με άλλα λόγια η αποτελεσματική αγορά έχει την ικανότητα να "απεικονίσει" τα συγκεκριμένα νέα σε συγκεκριμένη αύξηση της τιμής, εν προκειμένω αύξηση κατά 20%. Επιπλέον η αποτελεσματική αγορά δεν χρειάζεται να ξοδέψει χρόνο προκειμένου να υπολογίσει το πόση αύξηση της τιμής αντιστοιχεί στα συγκεκριμένα νέα. Αυτή την υπολογιστική διαδικασία η αποτελεσματική αγορά την κάνει αυτόματα ή στιγμιάια. Κατά συνέπεια, το σύνολο της πληροφορία πού έγινε γνωστό την χρονική στιγμή t ενσωματώθηκε με απόλυτη ακρίβεια στην τιμή της μετοχής την ίδια χρονική στιγμή t. Αυτό σημαίνει ότι τίποτα από την πληροφορία αυτή (πού έγινε γνωστή την t) δεν απομένει "αδιάθετο την t" προκειμένου να ασκήσει επίδραση στη διαμόρφωση της τιμής την $t + 1$. Η τιμή στην περίοδο $t + 1$ θα διαμορφωθεί (με ανάλογη διαδικασία) από τα νέα που θα γίνουν γνωστά την $t + 1$ και τα οποία, ως "νέα" πού είναι, δεν είναι γνωστά ήδη απο την t. Αντίθετα, αν η αγορά δεν είχε την ικανότητα να επεξεργάζεται άμεσα την πληροφορία (δεν ήταν αποτελεσματική), τότε η πληροφορία πού εμφανίζεται την χρονική στιγμή t θα ασκεί επίδραση όχι μόνο στην τιμή την t αλλά και στην τιμή την $t + 1$, $t + 2$, κλπ. έως ότου όλη η πληροφορία ενσωματωθεί *σταδιακά* στην τιμή.

Η συζήτηση πού προηγήθηκε μας βάζει στον πειρασμό να ορίσουμε ως αποτελεσματική μιά αγορά στην οποία οι αποδόσεις των μετοχών είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Στα αρχικά στάδια της διατύπωσης της θεωρίας των αποτελεσματικών αγορών, η υπόθεση της ανεξαρτησίας των αποδόσεων (η οποία όπως είδαμε αποτελεί βασική υπόθεση τού κανονικού τυχαίου περίπατου) θεωρήθηκε ως αναγκαία συνθήκη γιά την ύπαρξη αποτελεσματικών αγορών. Πράγματι, αν οι αποδόσεις των μετοχών περιγράφονται από ανεξάρτητες στοχαστικές ανελίξεις, τότε οποιαδήποτε πληροφορία σχετικά με την παρελθούσα συμπεριφορά των αποδόσεων είναι εντελώς άχρηστη γιά την πρόβλεψη της μελλοντικής πορείας των αποδόσεων. Στο πλαίσιο της θεωρίας των αποτελεσματικών αγορών αυτό ερμηνεύεται ως ότι η παρελθούσα πληροφορία έχει ήδη ενσωματωθεί πλήρως στις τιμές καί ως εκ τούτου δεν έχει αφήσει κανένα "ανεκμετάλευτο ίχνος" στην ιστορία των αποδόσεων. Είναι όμως η υπόθεση της ανεξαρτησίας των αποδόσεων όντως αναγκαία συνθήκη γιά την αποτελεσματικότητα των αγορών? Η απάντηση είναι όχι. Προκειμένου να ορίσουμε την έννοια της αποτελεσματικότητας σε όρους των ιδιοτήτων πού πρέπει να έχουν οι στοχαστικές ανελίξεις των αποδόσεων των μετοχών, χρειάζεται να αναλύσουμε την υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Αυτός είναι ο σκοπός της επόμενης ενότητας.

Αποτελεσματικές Αγορές καί Ιδιότητες της Στοχαστικής Ανέλιξης των Αποδόσεων

Ας υποθέσουμε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t-1$ (σήμερα), οι επενδυτές ενδιαφέρονται να υπολογίσουν τις πιθανότητες με τις οποίες η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{R}_{it}$, (δηλαδή η "αυριανή" λογαριθμική απόδοση μιάς συγκεκριμένης μετοχής i) παίρνει διάφορες τιμές. Γιά παράδειγμα, ενδιαφέρονται να υπολογίσουν την πιθανότητα η αυριανή απόδοση να είναι μεταξύ τού μηδεν καί τού 1% καί άρα ενδιαφέρονται για την $P(0 < \widetilde{R}_{it} < 0.01)$. Αντιμετωπίζοντας την $\widetilde{R}_{it}$ ως συνεχή τυχαία μεταβλητή, οι παραπάνω πιθανότητες υπολογίζονται αν γνωρίζουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\widetilde{R}_{it}$. Οι επενδυτές διαμορφώνουν μιά άποψη γιά το ποιά είναι αυτή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας λαμβάνοντας υπόψη το σύνολο πληροφοριών, I^s_{it-1}, πού θεωρούν σχετικό γιά τις αποδόσεις της μετοχής i καί το οποίο είναι διαθέσιμο κατά την χρονική στιγμή $t-1$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με βάση την οποία οι επενδυτές υπολογίζουν πιθανότητες σχετικά με τις αυριανές αποδόσεις μπορεί να συμβολιστεί ως (όπου ο υπερ-δείκτης s συμβολίζει το "υποκειμενικό" - "subjective"),

$$f^s_{\widetilde{R}_{it}}(r_{it} \mid I^s_{it-1}).$$

Πλην όμως το *υποκειμενικό* σύνολο πληροφοριών I^s_{it-1} καί η συνεπαγόμενη *υποκειμενική* συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f^s_{\widetilde{R}_{it}}$ των επενδυτών δεν ταυτίζονται κατ'ανάγκη με το *αντικειμενικό* (πραγματικό) σύνολο πληροφοριών I_{it-1} καί την *αντικειμενική* συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{\widetilde{R}_{it}}$ πού διέπουν τη στοχαστική συμπεριφορά των αποδόσεων της μετοχής i. Πιό συγκεκριμένα, το (υποκειμενικό) I^s_{it-1} πού επιλέγουν οι επενδυτές μπορεί να περιέχει μόνο μέρος της χρήσιμης πληροφορίας πού υπάρχει στο (αντικειμενικό) I_{it-1}, δηλαδή $I^s_{it-1} \subseteq I_{it-1}$. Η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών βασίζεται ακριβώς πάνω στη σχέση μεταξύ των I^s_{it-1} καί I_{it-1} καθώς επίσης και στη σχέση μεταξύ υποκειμενικών και αντικειμενικών κατανομών πιθανότητας. Συγκεκριμένα, μπορούμε να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό:

Definition *ref: eff-mark-hyp* ***(Αποτελεσματική Αγορά)***

Μιά αγορά κεφαλαίου θα λέγεται αποτελεσματική εάν

$$I^s_{it-1} = I_{it-1}, \qquad \#$$

καί

$$f^s_{\widetilde{R}_{it}}(r_{it} \mid I^s_{it-1}) = f_{\widetilde{R}_{it}}(r_{it} \mid I_{it-1}) \qquad \#$$

γιά κάθε $r_{it} \in \mathbb{R}$ καί $i = 1,2,\ldots,n$, όπου n είναι ο αριθμός των μετοχών πού διαπραγματεύονται στη συγκεκριμένη αγορά.

Παρατηρήσεις

(i) Η σχέση (ref: eff1) σημαίνει ότι οι επενδυτές έχουν την ικανότητα να αναγνωρίζουν όλη εκείνη την πληροφορία πού είναι χρήσιμη γιά τον υπολογισμό της κατανομής των αποδόσεων. Η σχέση (ref: eff2) σημαίνει ότι οι επενδυτές επεξεργάζονται αυτή την πληροφορία με τον σωστό (ορθολογικό) τρόπο.

(ii) Ανάλογα με το τι πληροφορίες περιέχονται στο σύνολο πληροφοριών $I_{i,t-1}$ έχουμε και ένα διαφορετικό είδος αποτελεσματικής αγοράς. Συγκεκριμένα, στη περίπτωση κατά την οποία το σύνολο πληροφοριών περιέχει μόνο παρελθούσες αποδόσεις της ίδιας της μετοχής i, δηλαδή αν $I_{i,t-1} = (\widetilde{R}_{it-1},\widetilde{R}_{it-2},\ldots)$, (και οι σχέσεις (ref: eff1) καί (ref: eff2) ισχύουν), τότε η αγορά αναφέρεται ως *ασθενώς αποτελεσματική*. Αν διευρύνουμε το σύνολο πληροφοριών έτσι ώστε να περιλαμβάνει όλη την πληροφορία πού είναι ελέυθερα διαθέσιμη έως και την χρονική στιγμή $t-1$, όπως π.χ. εκτός των παλαιών αποδόσεων της μετοχής i, το επίπεδο της βιομηχανικής παραγωγής, το επίπεδο της ανεργίας, το επίπεδο του πληθωρισμού, κλπ. τότε η ισχύς των σχέσεων (ref: eff1) καί (ref: eff2) μας επιτρέπει να ονομάσουμε την αγορά *ημι-ισχυρά αποτελεσματική*. Τέλος αν το $I_{i,t-1}$ περιλαμβάνει όλη την δυνατή πληροφορία συμπεριλαμβανομένης και της "εσωτερικής πληροφόρησης" τότε η αγορά ονομάζεται *ισχυρά αποτελεσματική*.

(iii) Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να λάβει μιά ακόμα πιό αυστηρή μορφή. Συγκεκριμένα αντί να υποθέσουμε απλώς την ισχύ της σχέσης (ref: eff2), η οποία αναφέρεται σε κάθε μιά από τις n επι-μέρους αποδόσεις, μπορούμε να απαιτήσουμε την ισχύ των σχέσεων

$$\mathbf{I}_{t-1}^{s} = \mathbf{I}_{t-1}, \qquad \#$$

καί

$$f^{s}_{\widetilde{R}_{1t},\widetilde{R}_{2t},\ldots,\widetilde{R}_{nt}}(r_{1t},r_{2t},\ldots,r_{nt} \mid \mathbf{I}^{s}_{t-1}) = f_{\widetilde{R}_{1t},\widetilde{R}_{2t},\ldots,\widetilde{R}_{nt}}(r_{1t},r_{2t},\ldots,r_{nt} \mid \mathbf{I}_{t-1}) \qquad \#$$

γιά κάθε $(r_{1t},r_{2t},\ldots,r_{nt}) \in \mathbb{R}^n$. Το σύνολο πληροφοριών $\mathbf{I}_{t-1}$ περιέχει όλες εκείνες τις πληροφορίες πού είναι χρήσιμες γιά τον υπολογισμό της από-κοινού συνάρτησης πυκνότητας των n αυριανών αποδόσεων. Είναι προφανές ότι η ισχύ των σχέσεων (ref: eff11) καί (ref: eff12) συνεπάγεται την ισχύ των σχέσεων (ref: eff1) καί (ref: eff2) αντίστοιχα.

(iv) Αν η αγορά είναι αποτελεσματική ως προς ένα δεδομένο σύνολο πληροφοριών, $\mathbf{I}_{t-1}$ τότε οποιοσδήποτε αλγόριθμος έχει σχεδιαστεί με σκοπό την πρόβλεψη των μελλοντικών αποδόσεων με βάση το $\mathbf{I}_{t-1}$ είναι καταδικασμένος σε αποτυχία. Αυτή η συνέπεια των αποτελεσματικών αγορών αποτέλεσε την βάση για τους πρώτους εμπειρικούς ελέγχους της υπόθεσης που διενεργήθηκαν κυρίως τη δεκαετία του 1970. Συγκεκριμένα, όρισμένοι γνωστοί προβλεπτικοί κανόνες για την μελλοντική πορεία των τιμών (συμπεριλαμβανομένης και της επονομαζόμενης "τεχνικής ανάλυσης") ελέγχθηκαν στατιστικά σχετικά με την προβλεπτική τους ικανότητα. Η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών, δηλαδή ότι κανείς τέτοιος κανόνας δεν μπορεί να οδηγήσει σε υπερβάλλουσες αποδόσεις, έλαβε σημαντική υποστήριξη από αυτούς τους πρώτους στατιστικούς ελέγχους.

Ο παραπάνω ορισμός της αποτελεσματικής αγοράς απαιτεί από την υποκειμενική διαδικασία επεξεργασίας της διαθέσιμης πληροφορίας να ταυτίζεται με την διαδικασία πού θα ακολουθούσαν οι επενδυτές αν γνώριζαν τον πραγματικό στοχαστικό μηχανισμό πού παράγει τις αποδόσεις. Το αμέσως επόμενο ενδιαφέρον ερώτημα είναι το τι ιδιότητες επιβάλλει στη στοχαστική ανέλιξη $\{\widetilde{R}_{it}\}$ η υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς. Με άλλα λόγια, αν υποθέσουμε ότι η αγορά είναι αποτελεσματική υπό την έννοια του ορισμού (ref: eff-mark-hyp) μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι για τις ιδιότητες εξάρτησης και ετερογένειας που επιδεικνύει η στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων? Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι ότι από μόνη της η υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς δεν συνεπάγεται κάποιες (υποχρεωτικές) ιδιότητες για την $\{\widetilde{R}_{it}\}$. Πλην όμως, η υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς σε συνδυασμό με μιά υπόθεση για τις *αναμενόμενες αποδόσεις ισορροπίας* (δηλαδή αυτή η κοινή υπόθεση) καταλήγει σε κάποιους ενδιαφέροντες περιορισμούς εξάρτησης και ετερογένειας της $\{\widetilde{R}_{it}\}$.

Τι είναι οι αναμενόμενες αποδόσεις ισορροπίας? Προκειμένου να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα ας φανταστούμε την αγορά μιάς μετοχής i ως συμμετοχή σε μιά λοταρία. Σε αυτή τη περίπτωση, η αναμενόμενη απόδοση της λοταρίας είναι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής i. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η χρονική στιγμή στην οποία αποφασίζω αν θα συμμετάσχω ή όχι στη λοταρία είναι η $t-1$, τότε η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής/λοταρίας είναι η $E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1})$. Επιπρόσθετα, το *βέβαιο ισοδύναμο* για τον επενδυτή είναι η απόδοση του (αξιόπιστου) κρατικού ομολόγου R_f. Ένας επενδυτής πού απεχθάνεται τον κίνδυνο θα συμμετάσχει στη λοταρία (θα αγοράσει την μετοχή) μόνο αν

$$E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1}) - R_f = \rho_{it-1} > 0, \forall t, \qquad \#$$

δηλαδή θα συμμετάσχει στη λοταρία μόνο αν του προσφερθεί (κατά τη χρονική στιγμή $t-1$) ένα θετικό ασφάλιστρο κινδύνου. Ποιό είναι το ύψος του ασφάλιστρου κινδύνου γιά το οποίο η αγορά για την μετοχή i θα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας? Σε αυτό το σημείο υπεισέρχεται η υπόθεση για τις αναμενόμενες αποδόσεις ισορροπίας την οποία αναφέραμε παραπάνω. Γιά παράδειγμα, στο πλαίσιο του CAPM (Capital Asset Pricing Model) πού θα αναλύσουμε σε επόμενο κεφάλαιο, το ρ_{it} εξαρτάται μόνο από τον συστηματικό κίνδυνο (το επονομαζόμενο "βήτα") της μετοχής i. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το CAPM είναι μοντέλο "μιάς περιόδου" το οποίο σημαίνει ότι δεν μπορεί να μας πεί κάτι για τη διαχρονική συμπεριφορά του ασφάλιστρου κινδύνου. Εξ'αυτού τού λόγου χρειάζεται να κάνουμε μιά επιπλέον υπόθεση για το πώς συμπεριφέρεται το ρ_{it} διαχρονικά. Θα υποθέσουμε ότι το ασφάλιστρο κινδύνου είναι διαχρονικά σταθερό (και θετικό). Δηλαδή

$$\rho_{it} = \rho_i > 0, \ \forall t. \qquad \#$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε τους περιορισμούς πού επιβάλλει στην στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_{it}\}$ η κοινή υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς και της υπόθεσης (ref: rp_capm) γιά τις αναμενόμενες αποδόσεις ισορροπίας. Ας ξεκινήσουμε με την υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς (ref: eff1) - (ref: eff2). Αφού σύμφωνα με αυτή την υπόθεση η υποκειμενική δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας (του επενδυτή) είναι ίση με την αντικειμενική κατανομή πιθανότητας, συμπεραίνουμε αμέσως ότι και η υποκειμενική δεσμευμένη μέση τιμή (η πρώτη ροπή της κατανομής) θα είναι ίση με την αντικειμενική δεσμευμένη μέση τιμή,

$$\mathcal{E}(\widetilde{R}_{it} \mid I^s_{it-1}) = E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1}) \qquad \#$$

όπου $\mathcal{E}(\widetilde{R}_{it} \mid I^s_{it-1})$ είναι η υποκειμενική μέση τιμή της $f^s_{\widetilde{R}_{it}}(r_{it} \mid I^s_{it-1})$. Το επόμενο ερώτημα είναι το αν μπορούμε να πούμε κάτι για την αντικειμενική μέση τιμή $E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1})$ και κυρίως για το αν αυτή η δεσμευμένη ροπή είναι συνάρτηση (ή όχι) του δεσμεύοντος συνόλου πληροφοριών I_{it-1}. Προκειμένου να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα σκεφτόμαστε ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι η $E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1})$ είναι όντως συνάρτηση κάποιων μεταβλητών πού περιέχονται στο I_{it-1}. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η $E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1})$ είναι γραμμική συνάρτηση της $\widetilde{R}_{it-1}$, όπου $\widetilde{R}_{it-1} \in I_{it-1}$:

$$E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1}) = \gamma \widetilde{R}_{it-1}. \qquad \#$$

Αν η αναμενόμενη απόδοση είναι συνάρτηση της παρούσας απόδοσης (υποθέτουμε ότι το "παρόν" είναι η χρονική στιγμή $t-1$) τότε ο κάθε επενδυτής πού έχει ορθολογικές προσδοκίες (εξ' υποθέσεως των αποτελεσματικών αγορών) θα είναι σε θέση να αντιληφθεί αυτή τη συνάρτηση (την (ref: fun1)). Από τη στιγμή πού ο κάθε επενδυτής εντοπίζει την (ref: fun1) θα την χρησιμοποιήσει προκειμένου να βελτιώσει την πρόβλεψη πού κάνει για την αυριανή απόδοση. Αφού αυτό θα το κάνει ο κάθε επενδυτής τότε πολύ γρήγορα η παραπάνω σχέση θα πάψει να υφίσταται, το οποίο σημαίνει ότι η αντικειμενική αναμενόμενη απόδοση θα πάψει να είναι γραμμική συνάρτηση της $\widetilde{R}_{it-1}$. Πράγματι, στο συγκεκριμένο φαινόμενο πού αναλύουμε το αντικειμενικό και το υποκειμενικό διαπλέκονται. Το εμπειρικό φαινόμενο της αγοράς μετοχών έχει ως επίκεντρο τους επενδυτές με τις προσδοκίες τους. Το τι πιστεύουν οι επενδυτές (υποκειμενικό στοιχείο) καθορίζει την συμπεριφορά τους, η οποία με τη σειρά τους καθορίζει τις τιμες πού διαμορφώνονται στην αγορά (αντικειμενικό στοιχείο). Αφού λοιπόν ο ανταγωνισμός μεταξύ των επενδυτών τείνει να εξαλείφει οποιαδήποτε συνάρτηση μεταξύ της $E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1})$ και των στοιχείων του I_{it-1} συμπεραίνουμε ότι ο αντικειμενικός δεσμευμένος μέσος $E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1})$ θα τείνει να εξισωθεί με τον αντικειμενικό αδέσμευτο μέσο $E(\widetilde{R}_{it})$. Κατά συνέπεια, το ερώτημα πού τίθεται είναι το αν η ικανότητα των επενδυτών να αναλύουν στιγμιαία και με ακρίβεια την όποια διαθέσιμη πληροφορία (δηλαδή η υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς) και η συνεπακόλουθη κατάργηση οποιουδήποτε "προβλεπτικού μοτίβου" υπάρχει στις αποδόσεις, επιφέρει τελικά ως αποτέλεσμα την ισότητα,

$$E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1}) = E(\widetilde{R}_{it}). \qquad \#$$

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική αν η υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς ενισχυθεί με μιά συγκεκριμένη υπόθεση σχετικά με τη διαχρονική συμπεριφορά του ασφάλιστρου κινδύνου. Ποιά είναι η απαιτούμενη υπόθεση για τη διαχρονική συμπεριφορά του ασφάλιστρου κινδύνου ρ_{it}? Μιά τέτοια υπόθεση είναι η (ref: rp_capm), σύμφωνα με την οποία το ασφάλιστρο κινδύνου είναι διαχρονικά σταθερό. Αυτό σημαίνει ότι

$$\left[\begin{array}{c} \text{Υπόθεση Αποτελεσματικής Αγοράς} \\ + \\ \text{Σταθερό Διαχρονικά Ασφάλιστρο Κινδύνου} \end{array} \Rightarrow \text{Ανεξαρτησία ως προς το Δεσμευμένο Μέσο}\right]$$

Το ερώτημα είναι σε τι χρειάζεται η υπόθεση περί των αναμενόμενων αποδόσεων ισορροπίας (ref: rp_capm) προκειμένου να εξασφαλίσουμε την παραπάνω συνεπαγωγή? Με άλλα λόγια γιατί η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών από μόνη της δεν μας εξασφαλίζει την ανεξαρτησία ως προς τον δεσμευμένο μέσο της $\{\widetilde{R}_{it}\}$ και απαιτείται η επιπλέον υπόθεση περί της διαχρονικής σταθερότητας του ασφάλιστρου κινδύνου? Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έχει ως εξής. Ας υποθέσουμε ότι όντως ο ανταγωνισμός μεταξύ των επενδυτών τείνει να καταργήσει την οποιαδήποτε εξάρτηση μεταξύ της $E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1})$ και στοιχείων του I_{it-1}. Πλην όμως ας υποθέσουμε ότι το ασφάλιστρο κινδύνου ρ_{it} πού απαιτούν οι επενδυτές δεν είναι σταθερό διαχρονικά. Αντίθετα ας υποθέσουμε ότι επιδεικνύει διαχρονική εξάρτηση, για παράδειγμα έστω,

$$\rho_{it} = \kappa_0 + \kappa_1 \rho_{it-1} + \nu_{it}.$$

Αν το ασφάλιστρο κινδύνου επιδεικνύει μιά τέτοια συμπεριφορά, τότε αυτή η συμπεριφορά θα αντανακλάται στην αναμενόμενη απόδοση $E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1})$ αφού

$$\mathcal{E}(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1}) = E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1}) = R_f + \rho_{it-1}, \qquad \#$$

με αποτέλεσμα η ανέλιξη $\{\widetilde{R}_{it}\}$ να επιδεικνυει και αυτή το είδος της διαχρονικής εξάρτησης πού επιδεικνύει το ασφάλιστρο κινδύνου. Πιό συγκεκριμένα, από την Θεωρία Πιθανοτήτων γνωρίζουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{R}_{it}$ μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, την δεσμευμένη μέση τιμή $E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1})$ και την μη συστηματική συνιστώσα u_{it} με $E(u_{it} \mid I_{it-1}) = 0$:

$$\widetilde{R}_{it} = E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1}) + u_{it}.$$

Αντικαθιστώντας την $E(\widetilde{R}_{it} \mid I_{it-1})$ από την (ref: joint_hyp2) έχουμε,

$$\widetilde{R}_{it} = R_f + \rho_{it-1} + u_{it}.$$

Από την τελευταία σχέση καθίσταται εμφανές ότι η ιδιότητες της $\{\widetilde{R}_{it}\}$ επηρεάζονται άμεσα από τις ιδιότητες της ανέλιξης $\{\rho_{it}\}$. Αυτό σημαίνει ότι η ανεξαρτησία ως προς τον δεσμευμένο μέσο της $\{\widetilde{R}_{it}\}$ μπορεί να παραβιάζεται όχι γιατί η αγορά είναι αναποτελεσματική (η απαίτηση $E(u_{it} \mid I_{it-1}) = 0$ ισχύει) αλλά επειδή το ασφάλιστρο κινδύνου επιδεικνύει διαχρονική εξάρτηση. Σε αυτή τη περίπτωση η απο-κοινου υπόθεση της (ref: joint_hyp1) θα απορριφθεί αν επιχειρήσουμε στατιστικό έλεγχο, όχι γιατί η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών είναι λάθος, αλλά γιατί το συγκεκριμένο μοντέλο αναμενόμενων αποδόσεων ισορροπίας πού υποθέσαμε (δηλαδή το (ref: rp_capm)) είναι εσφαλμένο.

Με βάση την παραπάνω συζήτηση συμπεραίνουμε ότι η κοινή υπόθεση α) της αποτελεσματικής αγοράς και β) του σταθερού διαχρονικά ασφάλιστρου κινδύνου μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ανέλιξη των υπερβαλλουσών αποδόσεων $\{\widetilde{R}^e_{it}\}$ με

$$\widetilde{R}^e_{it} = \widetilde{R}_{it} - R_f - \rho_i \qquad \#$$

είναι martingale διαφοράς. Το τελευταίο σημαίνει ότι

$$E(\widetilde{R}^e_{it} \mid I_{t-1}) = 0. \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Το θεωρητικό συμπέρασμα στο οποίο οδηγηθήκαμε στο παρόν κεφάλαιο, ότι δηλαδή κάτω από την υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών και της διαχρονικής σταθερότητας του ασφάλιστρου κινδύνου, η ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_{it}\}$ είναι ανεξάρτητη ως πρός το δεσμευμένο μέσο, (ή ισοδύναμα η ανέλιξη των υπερβαλλουσών αποδόσεων $\{\widetilde{R}^e_{it}\}$ είναι martingale διαφοράς) είναι συνεπές με το εμπειρικό αποτέλεσμα του προηγούμενου κεφαλαίου, σύμφωνα με το οποίο η ανέλιξη των αποδόσεων δεν παρουσιάζει γραμμική διαχρονική εξάρτηση (αυτοσυσχέτιση).

(ii) Από την παραπάνω συζήτηση καταλαβαίνουμε ότι η υπόθεση των αποτελσματικών αγορών δεν απαιτεί από την ανέλιξη $\{\widetilde{R}_{it}\}$ να είναι ανεξάρτητη. Το μόνο πού απαιτεί (από κοινού με την υπόθεση του διαχρονικά σταθερού ασφάλιστρου κινδύνου) είναι να είναι ανεξάρτητη ως προς τον δεσμευμένο μέσο. Αυτό σημαίνει ότι η ύπαρξη δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας (πού τεκμηριώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) δεν απειλεί την υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών, αφού η δυναμική ετεροσκεδαστικότητα είναι ένα είδος διαχρονικής εξάρτησης πού πηγάζει όχι από τον δεσμευμένο μέσο αλλά από την δεσμευμένη διακύμανση.

Η τελευταία παρατήρηση καθιστά σαφές ότι η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών δεν απαιτεί από την στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_{it}\}$ να είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη, το οποίο σημαίνει ότι δεν απαιτεί από την ανέλιξη των (λογαριθμικών) τιμών $\{p_{it}\}$ να είναι τυχαίος περίπατος. Αυτή η διάκριση μεταξύ της υπόθεσης των αποτελεσματικών αγορών και του μοντέλου του τυχαίου περίπατου δεν ήταν πάντοτε ξεκάθαρη. Συγκεκριμένα, πριν τα μέσα της δεκαετίας του 1960, η ιδέα ότι οι τιμές προσαρμόζονται στιγμιαία στην έλευση της νέας πληροφορίας θεωρείτο ισοδύναμη με την απαίτηση οι τιμές να ακολουθούν ένα τυχαίο περίπατο. Από τα μέσα της δεκαετίας του 60 και μετά, έγινε σαφές ότι η απαίτηση του τυχαίου περίπατου ήταν πολύ αυστηρή και ότι η αγορά θα μπορούσε να είναι αποτελεσματική ακόμα και αν οι τιμές δεν ακολουθούσαν τυχαίο περίπατο. Πράγματι όπως είδαμε, η αποτελεσματικότητα της αγοράς (από κοινού με την υπόθεση του σταθερού διαχρονικά ασφάλιστρου κινδύνου) σημαίνει ότι η ανέλιξη $\{\widetilde{R}_{it}\}$ είναι απλώς ανεξάρτητη ως προς το δεσμευμένο μέσο και όχι γενικά ανεξάρτητη όπως απαιτεί το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου για τις λογαριθμικές τιμές.

Μιά επίσης ενδιαφέρουσα συνέπεια της υπόθεσης των αποτελεσματικών αγορών είναι ότι σε κάθε χρονική στιγμή t η τιμή P_{it} της μετοχής i διαμορφώνεται στο επίπεδο εκείνο πού είναι συνεπές με τα "θεμελιώδη" στοιχεία της μετοχής. Με άλλα λόγια, σε κάθε χρονική στιγμή t η τιμή της μετοχής πού διαμορφώνεται στην αγορά ταυτίζεται με την "θεμελιώδη" τιμή P^F_{it} της μετοχής. Ποιά είναι η θεμελιώδης τιμή της μετοχής και πώς καθορίζεται? Αυτό το ερώτημα απαντάται στην επόμενη ενότητα. Όπως θα δούμε η θεμελιώδης τιμή της μετοχής i είναι ίση με τα προεξοφλημένα αναμενόμενα μερίσματα της μετοχής i, όπου ως συντελεστής προεξόφλησης χρησιμοποιείται η απόδοση του asset χωρίς κίνδυνο (π.χ. η απόδοση του αξιόπιστου κρατικού ομολόγου) συν το ασφάλιστρο κινδύνου πού οι επενδυτές απαιτούν για τη διακράτηση της μετοχής *i*.

Θεμελιώδης Τιμή: Το Υπόδειγμα των Προεξοφλημένων Μελλοντικών Μερισμάτων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα επενδυτή ο οποίος αντιμετωπίζει δύο επενδυτικές επιλογές. Η πρώτη είναι να αγοράσει μιά μετοχή *i* αναλαμβάνοντας τον κίνδυνο μιάς πιθανής μελλοντικής πτώσης της τιμής της μετοχής. Η δεύτερη επιλογή τού επενδυτή είναι να επενδύσει το κεφάλαιο του στο αξιόπιστο κρατικό ομόλογο της χώρας του απολαμβάνοντας μιά (χωρίς ρίσκο) απόδοση R_f. Η δεύτερη επιλογή του δεν ενέχει κανένα επενδυτικό κίνδυνο αλλά ταυτόχρονα δεν συνοδεύεται καί από κάποια πιθανή υπεραπόδοση. Το ερώτημα είναι κάτω από ποιές συνθήκες ο επενδυτής είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο αυτών επενδυτικών επιλογών.

Όπως παρατηρούμε από τη διατύπωση του προβλήματος, το πρόβλημα εμπίπτει στη κατηγορία της λήψης αποφάσεων σε καθεστώς ρίσκου κατά Von Neumann - Morgenstern πού αναλύσαμε στο πρώτο τμήμα του βιβλίου. Στο παρόν πρόβλημα ο επενδυτής (ο λήπτης της απόφασης) δεν έχει δικαίωμα να επιλέξει ο ίδιος το "βέβαιο ισοδύναμο" αλλά το παίρνει ως δεδομένο εξωγενώς. Πράγματι, το βέβαιο ισοδύναμο γιά τον επενδυτή είναι η απόδοση R_f. Με δεδομένο το βέβαιο ισοδύναμο το ερώτημα είναι ποιά είναι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής *i* γιά την οποία ο επενδυτής καθίσταται αδιάφορος μεταξύ της επένδυσης στη μετοχή και της επένδυσης στο ομόλογο. Αυτή η απόδοση ονομάζεται αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας, υπό την έννοια ότι ο επενδυτής βρίσκεται σε μιά κατάσταση ισορροπίας σχετικά με την επιλογή του μεταξύ της επένδυσης στη μετοχή και της επένδυσης στο ομόλογο.

Όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλιο, η απόδοση, R_{it+1}, της μετοχής *i* μεταξύ των περιόδων t καί $t+1$ ορίζεται ως (ο δείκτης *i* παραλείπεται για σημειογραφική οικονομία),

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t + d_t}{P_t} \qquad \#$$

όπου P_t καί d_t είναι η τιμή καί το μέρισμα της μετοχής αντιστοίχως.

Παρατήρηση

Όπως είναι εμφανές η συζήτηση πού θα ακολουθήσει αφορά στις πραγματικές R_{t+1} και όχι στις λογαριθμικές αποδόσεις $\widetilde{R}_{t+1}$.

Στο σημείο αυτό υποθέτουμε ότι η αγορά είναι αποτελεσματική. Αυτό σημαίνει ότι η υποκειμενική αναμενόμενη δεσμευμένη απόδοση $\mathcal{E}(R_{t+1} \mid I_t)$ ταυτίζεται με τις αντικειμενική αναμενόμενη δεσμευμένη απόδοση $E(R_{t+1} \mid I_t)$. Η τελευταία προκύπτει εφαρμόζοντας τον τελεστή $E(\bullet \mid I_t)$ και στα δύο μέλη της (ref: arb1). Έτσι έχουμε,

$$E(R_{t+1} \mid I_t) = \frac{E(P_{t+1} \mid I_t) - P_t + d_t}{P_t}. \qquad \#$$

Στη συνέχεια ερχόμαστε σε ένα κρίσιμο σημείο. Στο σημείο αυτό πρέπει να αποφασίσουμε για τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώνεται η αναμενόμενη απόδοση

$E(R_{t+1} \mid I_t)$ έτσι ώστε ο επενδυτής να βρίσκεται σε ισορροπία. Προκειμένου να το κάνουμε αυτό χρειαζόμαστε μία θεωρία αποτίμησης. Μιά τέτοια θεωρία είναι το μοντέλο CAPM το οποίο θα εξετάσουμε σε επόμενο κεφάλιο.

Παρατήρηση

Προς το παρόν απλώς να αναφέρουμε ότι το CAPM καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η $E(R_{t+1} \mid I_t)$ καθορίζεται από τον συστηματικό κίνδυνο και μόνο της μετοχής i. Με άλλα λόγια, το CAPM μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το ασφάλιστρο κινδύνου

$$\rho_t = E(R_{t+1} \mid I_t) - R_f$$

είναι αποκλειστική συνάρτηση του συστηματικού κινδύνου της υπο-συζήτηση μετοχής όπως αυτός μετριέται από το αντίστοιχο "βήτα" της μετοχής. Αν υποθέσουμε ένα διαφορετικό μοντέλο αποτίμησης (διαφορετικό από το CAPM) θα καταλήξουμε με ένα διαφορετικό σύνολο προσδιοριστικών παραγόντων γιά το ασφάλιστρο κινδύνου.

Γιά τη συνέχεια η μόνη υπόθεση πού θα κάνουμε για το ασφάλιστρο κινδύνου είναι αυτή πού αφορά στη διαχρονική συμπεριφορά του. Συγκεκριμένα το μόνο πού θα υποθέσουμε είναι ότι το ασφάλιστρο κινδύνου παραμένει σταθερό διαχρονικά, δηλαδή

$$\rho_t = \rho > 0, \ \forall t. \qquad \#$$

Κάνοντας χρήση αυτής της υπόθεσης, οδηγούμαστε στη σχέση,

$$E(R_{t+1} \mid I_t) = R_f + \rho \equiv r. \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Η σχέση (ref: arbitr1) συνήθως ονομάζεται *συνθήκη arbitrage*. Το άθροισμα της απόδοσης του ασφαλούς ομολόγου και του ασφάλιστρου κινδύνου, r θα το αποκαλούμε *προεξοφλητικό επιτόκιο*.

(ii) Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η σχέση (ref: arbitr1) αποκτήθηκε κατόπιν συγκεκριμένων υποθέσεων (θεωρίας) πού κάναμε για τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώνεται η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας (ή ισοδύναμα το ασφάλιστρο κινδύνου). Οι υποθέσεις αυτές μπορεί να είναι πολύ γενικές ή πολύ συγκεκριμένες (όπως αυτές πού απορρέουν από το CAPM). Γιά την σχέση (ref: arbitr1) αρκεί να υποθέσουμε μιά πολύ γενική (και ασαφή) θεωρία στο πλαίσιο της οποίας οι επενδυτές απαιτούν σε κάθε χρονική στιγμή ένα μη-μηδενικό ασφάλιστρο κινδύνου (άρα απεχθάνονται τον κίνδυνο) το οποίο είναι και σταθερό διαχρονικά. Στο πλαίσιο αυτής της "θεωρίας" τίποτε άλλο δεν υποθέτουμε για τον τρόπο πού διαμορφώνεται αυτό το ασφάλιστρο κινδύνου. Αντίθετα, αν επικαλεστούμε το CAPM τότε η θεωρία γίνεται πολύ πιό συγκεκριμένη αφού πιά μας λέει ότι το ασφάλιστρο κινδύνου καθορίζεται αποκλειστικά από το βήτα της μετοχής. Στην συζήτηση πού ακολουθεί δεν υποθέτουμε (κατ'ανάγκη) το CAPM αλλά μένουμε στο πιό γενικό πλαίσιο ενός σταθερού διαχρονικά ασφάλιστρου κινδύνου, χωρίς να υποθέτουμε κάτι σχετικά με τον τρόπο πού αυτό διαμορφώνεται.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (ref: def1) καί (ref: arbitr1) έχουμε

$$\frac{E(P_{t+1} \mid I_t) - P_t + d_t}{P_t} = r$$

απ’όπου συνεπάγεται ότι

$$E(P_{t+1} \mid I_t) - P_t + d_t = rP_t.$$

Μεταφέροντας τον όρο P_t στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας, καί λύνοντας ως προς P_t προκύπτει τελικά η σχέση

$$P_t = aE(P_{t+1} \mid I_t) + ad_t \qquad \#$$

με

$$0 < a = \frac{1}{1+r} < 1.$$

Η εξίσωση (ref: final-eq1) είναι μιά εξίσωση διαφορών με ορθολογικές προσδοκίες της μορφής (ref: rat-exp-eq1) πού περιγράφεται στο παράρτημα του παρόντος κεφαλαίου. Επιπλέον, στην (ref: final-eq1) ο συντελεστής τού όρου $E(P_{t+1} \mid I_t)$ ταυτίζεται με το συντελεστή τού "εξωγενούς" όρου, εν προκειμένω τού d_t.

Κάτω από την υπόθεση,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(d_{t+i} \mid I_t) < \infty \qquad \#$$

μιά λύση της εξίσωσης (ref: final-eq1) είναι η

$$P_t = a\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(d_{t+i} \mid I_t)$$

η οποία, μεταφέροντας τον συντελεστή a μέσα στο άθροισμα, γράφεται ως

$$P_t = P_t^F = \sum_{i=0}^{\infty} a^{i+1} E(d_{t+i} \mid I_t). \qquad \#$$

Η λύση (ref: final-sol1) είναι η μοναδική λύση της (ref: final-eq1) αν θέσουμε ως κριτήριο επιλογής την απαίτηση ότι οι προσδοκίες γιά τις μελλοντικές τιμές, $E(P_{t+T+1} \mid I_t)$ είναι τέτοιες ώστε να ικανοποιούν την συνθήκη

$$\lim_{T\to\infty} a^{T+1} E(P_{t+T+1} \mid I_t) = 0. \qquad \#$$

Σε αυτή τη περίπτωση, η λύση (ref: final-sol1) ονομάζεται *λύση των θεμελιωδών μεγεθών της αγοράς* ή γιά συντομία, *θεμελιώδης λύση*. Η λύση αυτή εκφράζει την τρέχουσα τιμή της μετοχής ως το σταθμισμένο άθροισμα όλων των αναμενόμενων μερισμάτων από τη τρέχουσα στιγμή έως το "άπειρο" μέλλον. Η αντίστοιχη τιμή P_t^F ονομάζεται *θεμελιώδης τιμή*.

Κερδοσκοπικές Φούσκες

Αντίθετα, εάν η συνθήκη (ref: trans-1d) παραβιάζεται τότε η θεμελιώδης λύση δεν είναι η μοναδική λύση της (ref: final-eq1) αλλά αντίθετα υπάρχει μιά πολλαπλότητα λύσεων της μορφής

$$P_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^{i+1} E(d_{t+i} \mid I_t) + P_t^h \qquad \#$$

όπου ο όρος P_t^h, πού είναι η λύση της ομογενούς, ικανοποιεί τη σχέση

$$P_t^h = \frac{1}{a^t}\eta_t, \qquad \#$$

όπου ως γνωστόν η ακολουθία $\{\eta_t\}$ είναι martingale. Ο όρος P_t^h εκφράζει την απόκλιση της τιμής P_t από την *θεμελιώδη τιμή* P_t^F πού δίνεται από τη σχέση (ref: final-sol1). Με άλλα λόγια, στη χρονική στιγμή t, η τιμή της μετοχής δεν καθορίζεται μόνο από τα αναμενόμενα μερίσματα αλλά καί από ένα άλλο όρο ό οποίος, σύμφωνα με τη σχέση (ref: bubble1), αναμένεται να αυξάνεται στο χρόνο. Ποιά είναι η οικονομική ερμηνεία τού όρου P_t^h; Μήπως η συμπεριφορά καί οι ιδιότητες τού όρου P_t^h είναι τέτοιες πού να μας επιτρέπουν να ερμηνεύσουμε αυτό τον όρο ως *κερδοσκοπική φούσκα*; Πράγματι, η έννοια της κερδοσκοπικής φούσκας αναφέρεται σε ραγδαίες μεταβολές τις τιμής στο χρόνο, οι οποίες δεν δικαιολογούνται από τις πληροφορίες γιά τα θεμελιώδη μεγέθη, εν προκειμένω τα μερίσματα, πού είναι διαθέσιμες γιά τη δεδομένη χρονική περίοδο. Επιπλέον μιά κερδοσκοπική φούσκα δεν διαρκεί "γιά πάντα", αλλά κάποια στιγμή "σπάει" με αποτέλεσμα την απότομη μεταβολή της τιμής προς την αντίθετη κατεύθυνση. Κατά συνέπεια το ερώτημα είναι εάν μπορούμε να εξειδικεύσουμε περαιτέρω τον όρο P_t^h έτσι ώστε να μπορεί να αποδώσει πειστικά την έννοια της κερδοσκοπικής φούσκας. Γιά παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι

$$P_t^h = a_0\left(\frac{1}{a}\right)^t. \qquad \#$$

Η σχέση (ref: bubble2) υποθέτει ότι ο όρος P_t^h είναι μιά ντετερμινιστική συνάρτηση τού t. Κατά συνέπεια η ακολουθία $\{P_t^h\}$ δεν είναι μιά στοχαστική ακολουθία αλλά μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών. Το ερώτημα είναι αν η υπόθεση (ref: bubble2) ικανοποιεί τη συνθήκη (ref: bubble1) προκειμένου ο όρος P_t^h να αποτελεί μέρος της λύσης (ref: multi-sol1). Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική αφού η σταθερή ακολουθία $\{a_0\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μιά εκφυλισμένη ανέλιξη martingale. Άρα το πρώτο πού δείξαμε είναι ότι όντως η υπόθεση (ref: bubble2) ικανοποιεί την συνθήκη (ref: bubble1). Πλην όμως η υπόθεση (ref: bubble2), η οποία στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται ως *ορθολογική ντετερμινιστική φούσκα*, περιγράφει μιά κερδοσκοπική φούσκα η οποία αυξάνει συνεχώς καί δεν σκάει ποτέ. Μιά τέτοια υπόθεση δεν συνάδει με την πραγματικότητα, όπου παρατηρούμε κερδοσκοπικές φούσκες να διατηρούνται στις αγορές γιά κάποιο διάστημα καί μετά να διαλύονται. Κατά συνέπεια η υπόθεση (ref: bubble2), παρότι ικανοποιεί την συνθήκη (ref: bubble1), δεν θεωρείται μιά ρεαλιστική υπόθεση κερδοσκοπικής φούσκας στις αγορές κεφαλαίου. Γιά εναλλακτικές καί πιό ρεαλιστικές υποθέσεις ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το πέμπτο κεφάλαιο των Blanchard and Fischer (1990) ή το άρθρο των Blanchard and Watson (1982).

Υποθέσεις γιά την Στοχαστική Ακολουθία των Μερισμάτων.

Ας υποθέσουμε ότι η $\{d_t\}$ είναι ότι ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο, δηλαδή

$$d_t = d_{t-1} + u_t \qquad \#$$

με

$$u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$$

καί ακόμα υποθέτουμε ότι η u_t να είναι ανεξάρτητη από όλες τις μεταβλητές πού περιλαμβάνονται στο I_{t-1}. Τότε όπως δείχνουμε στο παράρτημα του παρόντος κεφαλαίου, η λύση της (ref: final-eq1) είναι η

$$P_t = \frac{a}{1-a} d_t. \qquad \#$$

Η σχέση (ref: div-rw) αποτελεί τη μοναδική λύση της (ref: final-eq1) κάτω από τις συνθήκες (ref: trans-1d) καί (ref: trans-2d). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (ref: div-rw) προκειμένου να υπολογίσουμε την "δίκαιη" τιμή μιάς μετοχής; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική. Πράγματι, αφού $a = 1/(1+r)$, τότε η παράμετρος a υπολογίζεται αμέσως ως συνάρτηση των R_f και ρ. Η απόδοση του ασφαλούς ομολόγου R_f είναι γνωστή την χρονική στιγμή t. Το ασφάλιστρο κινδύνου για την μετοχή i δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμο και πρέπει να εκτιμηθεί. Προκειμένου να γίνει αυτή η εκτίμηση χρειάζεταινα ενισχύσουμε τις υποθέσεις πού έχουμε κάνει μέχρι τώρα σχετικά με το ποιοί παράγοντες καθορίζουν το ασφάλιστρο κινδύνου. Αν γιά παράδειγμα επικαλεστούμε και πάλι το CAPM τότε το ασφάλιστρο κινδύνου μπορεί να εκτιμηθεί ως συνάρτηση του εκτιμημένου βήτα της μετοχής. Επιπλέον, το μέρισμα d_t πού δίνει η επιχείρηση τη χρονική στιγμή t είναι γνωστό καί άρα η τιμή P_t μπορεί εύκολα να υπολογιστεί.

Το επόμενο ερώτημα αφορά στην επίδραση πού έχει στη δίκαιη τιμή μιάς μετοχής μιά μεταβολή τού προεξοφλητικού επιτοκίου. Παρατηρούμε ότι η σχέση (ref: div-rw) μπορεί να γραφεί καί ως

$$P_t = \frac{\frac{1}{1+r}}{1 - \frac{1}{1+r}} d_t \qquad \#$$

απ'όπου με πράξεις προκύπτει ότι

$$P_t = \frac{1}{r} d_t. \qquad \#$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι μιά αύξηση τού προεξοφλητικού επιτοκίου r οδηγεί σε μείωση της δίκαιης τιμής της μετοχής πού αντιστοιχεί στο επίπεδο μερίσματος d_t.

Παρατηρήσεις

(i) Η παραπάνω ανάλυση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μιά αύξηση της απόδοσης R_f του ασφαλούς ομολόγου οδηγεί σε αύξηση του προεξοφλητικού επιτοκίου r η οποία μέσω της σχέσης (ref: fair-pri) προκαλεί μιά μείωση στη θεμελιώδη τιμή P_t. Αντίστοιχη επίδραση έχει και μιά αύξηση του ασφάλιστρου κινδύνου ρ το οποίο απαιτούν οι επενδυτές για τη διακράτηση της μετοχής i.

(ii) Η παραπάνω ανάλυση καταδεικνύει το τρόπο με τον οποίο δύο βασικά μοντέλα της Χρηματοοικονομικής, το CAPM και το μοντέλο της προεξόφλησης των μελλοντικών μερισμάτων σχετίζονται. Ο τρόπος αυτός έχει να κάνει με το προεξοφλητικό επιτόκιο πού εμφανίζεται στο μοντέλο των προεξοφλημένων μελλοντικών μερισμάτων. Συγκεκριμένα, το σημείο εκκίνησης αυτού του μοντέλου είναι η σχέση (ref: risk_prem1a) η οποία μας λέει ότι α) το ασφάλιστρο κινδύνου είναι μη-μηδενικό και θετικό (άρα οι επενδυτές αποστρέφονται τον κίνδυνο) και β) το ασφάλιστρο κινδύνου είναι τό ίδιο σε κάθε χρονική στιγμή. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι το ασφάλιστρο κινδύνου είναι αποκλειστική συνάρτηση του συστηματικού κινδύνου τότε ουσιαστικά έχουμε μεταβεί στο πλαίσιο του CAPM. Άρα ο συνδετικός κρίκος των δύο μοντέλων είναι το ασφάλιστρο κινδύνου το οποίο αποτελεί συνιστώσα του προεξοφλητικού επιτοκίου.

(iii) Η θεμελιώδης ή δίκαιη τιμή μιας μετοχής είναι όπως είπαμε ίση με τα προεξοφλημένα αναμενόμενα μελλοντικά μερίσματα. Ο συντελεστής προεξόφλησης περιλαμβάνει, εκτός του επιτοκίου R_f και το ασφάλιστρο κινδύνου ρ_t. Έστω για παράδειγμα ότι η δίκαιη τιμή μιάς μετοχής είναι 10 δολλάρια και η τρέχουσα τιμή της είναι επίσης 10 δολλάρια. Αυτά τα δέκα δολλάρια έχουν ενσωματώσει το ασφάλιστρο κινδύνου ρ_t πού απαιτούν οι επενδυτές για τη διακράτηση της μετοχής. Αυτό σημαίνει ότι όταν η τρέχουσα τιμή είναι 10 δολλάρια και άρα δεν υπάρχει καμμιά απόκλιση μεταξύ δίκαιης και τρέχουσας τιμής, οι επενδυτές εξακολουθούν να αναμένουν μια υπερβάλλουσα αναμενόμενη απόδοση για την μετοχή ίση με $\rho_t = E(R_{t+1} \mid I_t) - R_f$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάποιο λόγο το ασφάλιστρο κινδύνου πού απαιτούν οι επενδυτές αυξάνεται και άρα η δίκαιη τιμή μειώνεται από τα 10 δολλάρια στα 8 δολλάρια. Ξαφνικά η μετοχή θα βρεθεί υπερτιμημένη υπό την έννοια ότι η τρέχουσα τιμή της είναι υψηλότερη από την (νέα) δίκαιη τιμή της. Τώρα πλέον οι επενδυτές δεν αισθάνονται ότι αποζημιώνονται αρκετά για την διακράτηση της μετοχής. Ως εκ τούτου προβαίνουν σε πωλήσεις της μετοχής έως ότου η τρέχουσα τιμή της πέσει στα 8 δολλάρια. Στα 8 δολλάρια, η αναμενόμενη απόδοση $E(R_{t+1} \mid I_t)$ είναι μεγαλύτερη από ότι ήταν στα 10 δολλάρια και άρα το ασφάλιστρο κινδύνου έρχεται στο επίπεδο πού βρίσκουν ικανοποιητικό οι επενδυτές.

(iv) Η παραπάνω παρατήρηση οδηγεί σε ένα γενικό συμπέρασμα: Για οποιοδήποτε δεδομένο επίπεδο αναμενόμενων μελλοντικών μερισμάτων, επιτοκιού R_f και ασφάλιστρου κινδύνου ρ_t όσο μικρότερη είναι η τρέχουσα τιμή μιάς μετοχής, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η αναμενόμενη απόδοση της. Ως συνέχεια του παραπάνω παραδείγματος, αν η τρέχουσα τιμή είναι 8 δολλάρια, τότε η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής είναι 2 δολλάρια έως τα 10 πού είναι η δίκαιη τιμή της συν το ασφάλιστρο κινδύνου το οποίο είναι ενσωματωμένο στη δίκαιη τιμή των 10 δολλαρίων (π.χ. 3 δολλάρια). Άρα όταν η τρέχουσα τιμή είναι 8 δολλάρια, οι επενδυτές δικαιούνται να αναμένουν αύξηση της τιμής κατά 5 δολλάρια. Αν η τρέχουσα τιμή ήταν χαμηλότερη, π.χ. 7 δολλάρια τότε η αναμενόμενη απόδοση από αυτό το επίπεδο τρέχουσας τιμής θα είναι ακόμα μεγαλύτερη.

Συμπεράσματα

Η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών είναι μιά υπόθεση σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι επενδυτές επεξεργάζονται την πληροφορία πού καθίσταται διαθέσιμη σε μιά χρονική στιγμή t. Συγκεκριμένα, η υπόθεση αυτή μας λέει ότι οι επενδυτές επεξεργάζονται την πληροφορία πολύ γρήγορα - σχεδόν στιγμιαία - και με απόλυτη ακρίβεια. Αυτό σημαίνει ότι η πληροφορία πού γίνεται γνωστή τη χρονική στιγμή t υφίσταται μιά άμεση και ακριβή επεξεργασία από την αγορά (το σύνολο των επενδυτών) μέσα στη χρονική στιγμή t και άρα όλο το περιεχόμενο της πληροφορίας ενσωματώνεται ορθολογικά στην τιμή P_t εντός της χρονικής στιγμής t. Η αποτελεσματική επεξεργασία της πληροφορίας (υπό τις έννοιες της ταχύτητας και ακρίβειας) σημαίνει ότι σε κάθε χρονική στιγμή η υποκειμενική κατανομή πιθανότητας των επενδυτών για τις αποδόσεις της επόμενης χρονικής στιγμής ταυτίζεται με την αντίστοιχη αντικειμενική κατανομή πιθανότητας. Η ταύτιση της υποκειμενικής κατανομής πιθανοτήτων με την αντίστοιχη αντικειμενική αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως η "υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών". Κατά συνέπεια η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών (πού ανέκυψε κυρίως στη Χρηματοοικονομική) μπορεί να θεωρηθεί ως ισοδύναμη με την υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών (πού ανέκυψε κυρίως στη Μακροοικονομική). Ως συνέπειες της υπόθεσης των αποτελεσματικών αγορών έχουμε ότι: α) Η τιμή της μετοχής i σε κάθε χρονική στιγμή αντανακλά πλήρως και με ακρίβεια όλη τη διαθέσιμη πληροφορία πού υπάρχει έως εκείνη τη στιγμή για τη μετοχή i. β) Η τιμή της μετοχής i σε κάθε χρονική στιγμή ισούται με την θεμελιώδη τιμή της μετοχής i, με την τελευταία να είναι ίση με το άθροισμα των προεξοφλημένων ορθολογικών προσδοκιών για τα μελλοντικά μερίσματα. γ) Με την επιπρόσθετη υπόθεση ότι το ασφάλιστρο κινδύνου είναι διαχρονικά σταθερο, η ακολουθία των (λογαριθμικών) αποδόσεων είναι ανεξάρτητη ως προς τον δεσμευμένο μέσο, το οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι η ακολουθία των υπερβαλλουσών αποδόσεων $\{\widetilde{R}_{it}^{e}\}$ είναι martingale διαφοράς.

Στο πρακτικό επίπεδο, η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών σημαίνει ότι κανείς μεμονωμένος επενδυτής δεν έχει το χρόνο να επεξεργαστεί την πληροφορία πού εμφανίστηκε σε μια δεδομένη χρονική στιγμή για την μετοχή i "με υπομονή", προκειμένου να αποφασίσει αν πρέπει να αγοράσει την μετοχή i ή όχι. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η πληροφορία είναι ευνοική για την μελλοντική κερδοφορία της επιχείρησης, τότε η αγορά αυτομάτως θα κατανοήσει πλήρως τι σημαίνει αυτή η πληροφορία γιά τα μελλοντικά μερίσματα και θα διαμορφώσει ορθολογικές προσδοκίες για αυτά. Στη συνέχεια, θα υπολογίσει την θεμελιώδη τιμή ως το άθροισμα των προεξοφλημένων αναμενόμενων μερισμάτων και θα θέσει την αγοραία τιμή στο επίπεδο της θεμελιώδους. Όλα αυτά θα τα κάνει "στιγμιαία" με αποτέλεσμα η πληροφορία να ενσωματωθεί στην αγοραία τιμή την ίδια ακριβώς στιγμή πού αυτή η πληροφορία καθίσταται διαθέσιμη.

Τι σημαίνει αυτό για ένα επενδυτή ο οποίος αποφασίζει σήμερα να αγοράσει την μετοχή i? Συνήθως αυτό πού κάνει ένας τυπικός επενδυτής πριν αποφασίσει να αγοράσει μιά μετοχή είναι να συλλέξει πληροφορίες για την οικονομική κατάσταση της εταιρείας. Αυτό το κάνει είτε μελετώντας ο ίδιος τα οικονομικά στοιχεία της επιχείρησης τα οποία είναι διαθέσιμα είτε ρωτώντας την γνώμη κάποιου ειδικού συμβούλου (η οποία συνήθως δεν δίνεται δωρεάν). Η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών μας λέει ότι όλη αυτή η διαδικασία συλλογής πληροφοριών στην οποία προβαίνει ο επενδυτής είναι άσκοπη και αχρείαστα δαπανηρή. Όλη αυτή η πληροφορία πού τελικά θα συλλέξει ο επενδυτής (συχνά πληρώνοντας για αυτό) είναι ήδη ενσωματωμένη στη τιμή. Άρα το μόνο πού χρειάζεται να κάνει ο επενδυτής είναι να ελέγξει την τιμή της μετοχής i και θα λάβει όλη την πληροφορία πού χρειάζεται. Με άλλα λόγια η τιμή της μετοχής είναι αυτό πού λέμε στη Στατιστική "επαρκής στατιστική" υπό την έννοια ότι αντανακλά με επάρκεια όλη την πληροφορία πού είναι σχετική για την μετοχή i.

Μιά άλλη πρακτική συνέπεια της υπόθεσης των αποτελεσματικών αγορών είναι το ότι δεν υπάρχουν "experts" όσον αφορά την διαχείριση χαρτοφυλακίου. Πράγματι, κανείς δεν μπορεί να "νικήσει συστηματικά" μιά αποτελεσματική αγορά γιατί κανείς δεν μπορεί να επεξεργαστεί την πληροφορία καλύτερα από μια αποτελεσματική αγορά. Ως εκ τούτου διάφορες τεχνικές πού αποσκοπούν (ή διαφημίζουν) στο να επιτύχουν υπερ-αποδόσεις στα υπό διαχείριση χαρτοφυλάκια είναι εξ’ορισμού καταδικασμένες σε αποτυχία. Σε μια αποτελεσματική αγορά η "ενεργητική" διαχείριση επενδύσεων στερείται νοήματος. Ως εκ τούτου σε μιά αποτελεσματική αγορά το μόνο είδος διαχείρισης πού έχει νόημα είναι η παθητική διαχείριση. Αυτό σημαίνει ότι ο μόνος στόχος πού πρέπει να έχουν οι επενδυτές είναι να κατασκευάσουν ένα επαρκώς διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο στο οποίο ο ιδιοσυγκρατικός κίνδυνος θα έχει εξαλειφθεί και το συνολικό ρίσκο του οποίου θα ανταποκρίνεται στο βαθμό αποστροφής κινδύνου του κάθε επενδυτή.

Τέλος το ερώτημα πού ανακύπτει από όλη την συζήτηση είναι το πώς μιά αποτελεσματική αγορά επιτυγχάνει αυτή την αποτελεσματικότητα της. Με άλλα λόγια, ποιός είναι ο μηχανισμός μέσω του οποίου η αγορά επιτυγχάνει να ενσωματώσει (ταχύτατα και με ακρίβεια) όλη τη διαθέσιμη πληροφορία για την μετοχή i στη τιμή της μετοχής i? Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι ο ανταγωνισμός μεταξύ ορθολογικών επενδυτών ως προς την ταχύτητα της άντλησης και την ακρίβεια της επεξεργασίας της εκάστοτε πληροφορίας. Κάθε χρονική στιγμή όλοι αυτοί οι επενδυτές αναζητούν πληροφορίες σχετικά με γεγονότα πού έχουν ήδη συμβεί ή σχετικά με γεγονότα τα οποία (οι επενδυτές νομιμοποιούνται να αναμένουν) ότι θα συμβούν. Επιπλέον όλοι αυτοί οι επενδυτές (δηλαδή η αγορά) κατανοούν ακριβώς τις συνέπειες πού έχει αυτή η πληροφορία για τα μελλοντικά κέρδη και μερίσματα της (κάθε) μετοχής. Μεταφορικά, μπορούμε να φανταστούμε την αγορά ως μιά μηχανή με πολλά γρανάζια όπου το κάθε γρανάζι ανταγωνίζεται το κάθε άλλο ως προς την αποτελεσματικότητα στη λειτουργία του. Ως αποτέλεσμα, στο όριο της διαδικασίας, αυτή η μηχανή (στη περίπτωση μας η αγορά) επιτυγχάνει μεγαλύτερη λειτουργική αποτελεσματικότητα από κάθε μεμονωμένο γρανάζι (επενδυτή).

Παράρτημα Ε: Εξισώσεις Διαφορών με Ορθολογικές Προσδοκίες

Στο παρόν παράρτημα θα παραθέσουμε τον τρόπο επίλυσης μιας εξίσωσης διαφορών με ορθολογικές προσδοκίες όπως η εξίσωση (ref: final-eq1) πού συζητήσαμε παραπάνω. Αυτές οι εξισώσεις παρουσιάζουν κάποιες ιδιαιτερότητες οι οποίες οφείλονται στη παρουσία της δεσμευμένης μέσης τιμής $E(y_{t+1} \mid I_t)$ ως προσδιοριστικου παράγοντα της τιμής y_t της μεταβλητής y τη χρονική στιγμή t. Ως συνήθως, το I_t είναι το σύνολο πληροφοριών πού είναι διαθέσιμο στα άτομα κατά τη στιγμή της διαμόρφωσης των προσδοκιών, δηλαδή κατά τη χρονική στιγμή t. Η *υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών* μας λέει ότι οι υποκειμενικές προσδοκίες $\mathcal{E}(y_{t+1} \mid I_t)$ των ατομων ταυτίζονται με την δεσμευμένη μέση τιμή $E(y_{t+1} \mid I_t)$ της τυχαίας μεταβλητής y_{t+1} με δέσμευση το σύνολο πληροφοριών I_t. Δηλαδή,

$$\mathcal{E}(y_{t+1} \mid I_t) = E(y_{t+1} \mid I_t). \qquad \#$$

Αυτή η υπόθεση σημαίνει ότι κατά τη περίοδο t, στην οποία οι τυχαίες μεταβλητές πού βρίσκονται στο I_t έχουν πάρει συγκεκριμένες τιμές, όλοι οι οικονομικοί παράγοντες παρατηρούν τις κοινές γιά όλους διαθέσιμες πληροφορίες καί διαμορφώνουν τις προσδοκίες τους με τον **ίδιο** τρόπο. Αυτός ο τρόπος είναι να "υπολογίσουν" τη δεσμευμένη μέση τιμή $E(y_{t+1} \mid I_t)$. Η υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών μας προσφέρει ένα σημαντικό αναλυτικό πλεονέκτημα. Αντί για τον όρο $\mathcal{E}(y_{t+1} \mid I_t)$ τού οποίου τις μαθηματικές ιδιότητες δεν γνωρίζουμε, έχουμε τον όρο $E(y_{t+1} \mid I_t)$ ο οποίος είναι καλά ορισμένος και έχει γνωστές ιδιότητες, αυτές της δεσμευμένης μέσης τιμής μιάς τυχαίας μεταβλητής. Τις ιδιότητες αυτές μπορούμε να επικαλεστούμε και έτσι να λύσουμε τις εξισώσεις διαφορών με ορθολογικές προσδοκίες.

Στη συνέχεια ας ορίσουμε το "σφάλμα πρόβλεψης". Αυτό είναι η διαφορά μεταξύ της ορθολογικής πρόβλεψης πού διενεργήθηκε την χρονική στιγμή $t-1$ γιά την τιμή της μεταβλητής πού μας ενδιαφέρει στη χρονική στιγμή t και της τιμής πού τελικά επικράτησε τη χρονική στιγμή t :

$$e_t = y_t - E(y_t \mid I_{t-1}). \qquad \#$$

Για τη στοχαστική ακαολουθία $\{e_t\}$ των σφαλμάτων πρόβλεψης ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Proposition *()*

Έστω η ακολουθία $\{e_t\}$ των σφαλμάτων πρόβλεψης όπως αυτά ορίστηκαν στην (ref: forcst-err1). Η $\{e_t\}$ είναι martingale διαφοράς, δηλαδή $E(e_t \mid I_{t-1}) = 0$.

Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι απλή. Συγκεκριμένα έχουμε

$$E(e_t \mid I_{t-1}) = E[(y_t - E(y_t \mid I_{t-1})) \mid I_{t-1}] =$$
$$= E(y_t \mid I_{t-1}) - E(y_t \mid I_{t-1}) = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα

$$E[(y_t \mid I_{t-1}) \mid I_{t-1}] = E(y_t \mid I_{t-1}).$$

Τι σημαίνει γιά την "ποιότητα" των ορθολογικών προσδοκιών το γεγονός ότι η ακολουθία των σφαλμάτων πρόβλεψης είναι martingale διαφοράς? Η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι το λάθος πρόβλεψης e_t πού αντιστοιχεί στη πρόβλεψη $E(y_t \mid I_{t-1})$ είναι "ανεξάρτητο ως προς το δεσμευμένο μέσο" από οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή ανήκει στο I_{t-1}. Αυτό σημαίνει ότι τα σφάλματα πρόβλεψης των ορθολογικών προσδοκιών είναι "ορθογώνια" με οποιαδήποτε πληροφορία ήταν διαθέσιμη στούς οικονομικούς παράγοντες τη στιγμή πού διαμόρφωναν τις προσδοκίες τους. Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να χαρακτηρίζουμε τα σφάλματα πρόβλεψης των ορθολογικών προσδοκιώνως *μη συστηματικά.*

Η εξίσωση διαφορών με ορθολογικές προσδοκίες έχει την ακόλουθη γενική μορφή:

$$y_t = aE(y_{t+1} \mid I_t) + bx_t. \qquad \#$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι η μεταβλητή y_t εξαρτάται με γραμμικό τρόπο από τις ορθολογικές προσδοκίες $E(y_{t+1} \mid I_t)$ και την τιμή της εξωγενούς μεταβλητής x_t. Στο μοντέλο των προεξοφλημένων μερισμάτων, η y_t είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t, η $E(y_{t+1} \mid I_t)$ είναι η ορθολογική προσδοκία των επενδυτών (πού διενεργείται την χρονική στιγμή t) για την τιμή της μετοχής την $t+1$ και η x_t είναι το μέρισμα πού δίνει η μετοχή την χρονική στιγμή t. Μιά κρίσιμη υπόθεση αφορά στις τιμές πού μπορεί να πάρει η παράμετρος a. Σε όλη την ανάλυση πού ακολουθεί θα υποθέσουμε ότι $|a| < 1$, η οποία είναι μιά υπόθεση πού βρίσκει εφαρμογή στα βασικά οικονομικά μοντέλα, όπως το μοντέλο των προεξοφλημένων μερισμάτων πού αναλύσαμε παραπάνω.

Το επόμενο ερώτημα είναι το πώς λύνουμε την εξίσωση (ref: rat-exp-eq1) λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι δεν είναι μιά συνήθης εξίσωση διαφορών αλλά μιά εξίσωση διαφορών με ορθολογικές προσδοκίες. Το πρώτο ερώτημα πού καλούμαστε να απαντήσουμε είναι αν η γενική αρχή πού εφαρμόζουμε για την λύση των απλών εξισώσεων διαφορών, δηλαδή ότι η γενική λύση της εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς συν μιά οποιαδήποτε ειδική λύση της πλήρους εξίσωσης ισχύει στην παρούσα περίπτωση. Η απάντηση σε αυτό το βασικό ερώτημα είναι καταφατική. Κατά συνέπεια θα ξεκινήσουμε την διαδικασία επίλυσης βρίσκοντας μιά ειδική λύση της εξίσωσης (ref: rat-exp-eq1). Στη συνέχεια θα βρούμε τη λύση της ομογενούς.

Μιά Ειδική Λύση της Εξίσωσης Διαφορών με Ορθολογικές Προσδοκίες

Προκειμένου να βρούμε μιά ειδική λύση της (ref: rat-exp-eq1) θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων. Η πρώτη αντικατάσταση αφορά στην αντικατάσταση του όρου $E(y_{t+1} \mid I_t)$ στην (ref: rat-exp-eq1). Γιά να βρούμε με τι θα αντικαταστήσουμε αυτό τον όρο λειτουργούμε ως εξής: Πρώτον, μεταθέτουμε όλους τούς όρους της (ref: rat-exp-eq1) κατά μία χρονική περίοδο μπροστά. Αυτό σημαίνει ότι για την περίοδο $t+1$ έχουμε

$$y_{t+1} = aE(y_{t+2} \mid I_{t+1}) + bx_{t+1}.$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $E(\bullet \mid I_t)$ καί στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας, έχουμε

$$E(y_{t+1} \mid I_t) = aE[E(y_{t+2} \mid I_{t+1}) \mid I_t] + bE(x_{t+1} \mid I_t). \qquad \#$$

Στο σημείο αυτό τίθεται το ερώτημα με τι ισούται ο όρος $E[E(y_{t+2} \mid I_{t+1}) \mid I_t]$. Γιά να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα επικαλεστούμε τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής και συγκεκριμένα την ιδιότητα των διαδοχικών προσδοκιών. Αυτή η ιδιότητα μας λέει ότι αν έχουμε δύο σύνολα πληροφοριών εν προκειμένω τα I_t και I_{t+1}, όπου το ένα είναι υποσύνολο τού άλλου, εν προκειμένω γιά παράδειγμα, $I_t \subset I_{t+1}$, τότε γιά τη τυχαία μεταβλητή X ισχύει ότι

$$E[E(y_{t+2} \mid I_{t+1}) \mid I_t] = E(y_{t+2} \mid I_t). \qquad \#$$

Κατά συνέπεια, η (ref: rep-1) γίνεται

$$E(y_{t+1} \mid I_t) = aE(y_{t+2} \mid I_t) + bE(x_{t+1} \mid I_t). \qquad \#$$

Αντικαθιστώντας την (ref: rep-2) στην (ref: rat-exp-eq1) έχουμε

$$y_t = a[aE(y_{t+2} \mid I_t) + bE(x_{t+1} \mid I_t)] + bx_t$$

η οποία γίνεται

$$y_t = a^2E(y_{t+2} \mid I_t) + abE(x_{t+1} \mid I_t) + bx_t. \qquad \#$$

Να σημειώσουμε ότι φτάσμαε στην έκφραση (ref: rep-3) μετά από μία αντικατάσταση. Στη συνέχεια, θέλουμε να αντικαταστήσουμε τον όρο $E(y_{t+2} \mid I_t)$ στην (ref: rep-3). Ακολουθώντας την λογική πού αναπτύξαμε παραπάνω, έχουμε

$$y_{t+2} = aE(y_{t+3} \mid I_{t+2}) + bx_{t+2}$$

καί άρα

$$E(y_{t+2} \mid I_t) = aE[E(y_{t+3} \mid I_{t+2}) \mid I_t] + bE(x_{t+2} \mid I_t). \qquad \#$$

Εφαρμόζοντας εκ νέου την ιδιότητα των διαδοχικών προσδοκιών για τον όρο $E[E(y_{t+3} \mid I_{t+2}) \mid I_t]$ δηλαδή

$$E[E(y_{t+3} \mid I_{t+2}) \mid I_t] = E(y_{t+3} \mid I_t)$$

έχουμε,

$$E(y_{t+2} \mid I_t) = aE(y_{t+3} \mid I_t) + bE(x_{t+2} \mid I_t). \qquad \#$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την (ref: rep-4) στην (ref: rep-3) έχουμε

$$y_t = a^2[aE(y_{t+3} \mid I_t) + bE(x_{t+2} \mid I_t)] + abE(x_{t+1} \mid I_t) + bx_t \qquad \#$$

η οποία καταλήγει στην

$$y_t = a^3E(y_{t+3} \mid I_t) + a^2bE(x_{t+2} \mid I_t) + abE(x_{t+1} \mid I_t) + bx_t.$$

Στην τελευταία έκφραση μπορούμ να βγάλουμε τον b κοινό παράγοντα και άρα

$$y_t = a^3E(y_{t+3} \mid I_t) + b[a^2E(x_{t+2} \mid I_t) + aE(x_{t+1} \mid I_t) + x_t]. \qquad \#$$

Πόσες αντικαταστάσει κάναμε για να καταλήξουμε στην (ref: rep-5)? Η απάντηση είναι δύο. Άρα αν συνεχίσουμε τις διαδοχικες αντικαταστάσεις, μετά από T τέτοιες αντικαταστάσεις θα καταλήξουμε στην έκφραση

$$y_t = a^{T+1}E(y_{t+T+1} \mid I_t) + b\sum_{i=0}^{T} a^iE(x_{t+i} \mid I_t). \qquad \#$$

Να σημειώσουμε ότι γιά $i = 0$, ο πρώτος όρος τού αθροίσματος $\sum_{i=0}^{T} a^iE(x_{t+i} \mid I_t)$ είναι ο $E(x_t \mid I_t)$ ο οποίος ισούται με x_t..

Μεταφέροντας το άθροισμα αριστερά της ισότητας, η σχέση (ref: sol-rexp) γίνεται

$$y_t - b\sum_{i=0}^{T} a^iE(x_{t+i} \mid I_t) = a^{T+1}E(y_{t+T+1} \mid I_t). \qquad \#$$

Ας εξετάσουμε τον όρο $a^{T+1}E(y_{t+T+1} \mid I_t)$ στο δεξί μέλος της (ref: sol-rexp2). Πρώτα ας αναλογιστούμε τι μαθηματική οντότητα είναι η δεσμευμένη μέση τιμή $E(y_{t+T+1} \mid I_t)$. Ως γνωστόν, η δεσμευμένη μέση τιμή (με δέσμευση μια σ −άλγεβρα) είναι τυχαία μεταβλητή. Κατά συνέπεια μπορούμε να μιλήσουμε για τους όρους της στοχαστικής ακολουθίας $\{a^{T+1}E(y_{t+T+1} \mid I_t)\}$. Στη συνέχεια, αφού αυτό πού αναζητούμε είναι μιά οποιαδήποτε ειδική λύση της (ref: rat-exp-eq1) ανεξαρτήτως τού πόσο περιοριστική είναι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η υποψήφια γιά λύση στοχαστική ακολουθία $\{y_t\}$ είναι τέτοια ώστε να ισχύει

$$a^{T+1}E(y_{t+T+1} \mid I_t) \overset{m.s.}{\rightarrow} 0. \qquad \#$$

Κάτω από την ισχύ της (ref: transver) καί λαμβάνοντας υπόψη την (ref: sol-rexp2) συμπεραίνουμε ότι η στοχαστική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a^iE(x_{t+i} \mid I_t)$ συγκλίνει κατά τετραγωνικό μέσο στην y_t. Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται την ύπαρξη μιάς στοχαστικής ακολουθίας $\{y_t\}$ πού να ικανοποιεί την (ref: rat-exp-eq1) καί η οποία ορίζεται από τη στοχαστική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a^iE(x_{t+i} \mid I_t)$. Συμπεραίνοντας, αυτό πού πετύχαμε είναι να βρούμε μιά ειδική λύση, y_t^F, της (ref: rat-exp-eq1) πού ορίζεται ως

$$y_t = y_t^F = b\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t). \qquad \#$$

Η λύση αυτή είναι η στοχαστική ακολουθία $\{y_t^F\}$ στην οποία κάθε όρος y_t^F ορίζεται ως το "άπειρο άθροισμα" των ορθολογικών προσδοκιών για όλες τις μελλοντικές τιμές των x_{t+i} στο οποίο κάθε μελλοντική προσδοκία i πολλαπλασιάζεται (προεξοφλείται) με τον ντετερμινιστικό όρο a^i. Αφού $|a| < 1$, όσο πιό μακρυνός είναι ο ορίζοντας της πρόβλεψης τόσο μικρότερη θα είναι η τιμή του a^i και άρα τόσο μικρότερη θα είναι η συνεισφορά του αντίστοιχου όρου $E(x_{t+i} \mid I_t)$ στο συνολικό άθροισμα (καί άρα και στην y_t^F).

Έχοντας βρεί μιά ειδική λύση, προχωράμε στο επόμενο στάδιο πού είναι η επίλυση της ομογενούς.

Γενική Λύση της Ομογενούς

Η ομογενής εξίσωση διαφορών πού αντιστοιχεί στην (ref: rat-exp-eq1) είναι η

$$y_t = aE(y_{t+1} \mid I_t). \qquad \#$$

Αυτό πού αναζητούμε έιναι την γενική λύση της (ref: homo-expd). Ως προς αυτό, έχουμε την ακόλουθης πρότασης.

Proposition

Η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών (ref: homo-expd) αποτελείται από το σύνολο των στοχαστικών ακολουθιών $\{y_t^h\}$ πού ικανοποιούν τη σχέση

$$y_t^h = \frac{1}{a^t}\eta_t \qquad \#$$

όπου η στοχαστική ακολουθία $\{\eta_t\}$ είναι martingale, δηλαδή $E(\eta_{t+1} \mid I_t) = \eta_t$.

Πριν προχωρήσουμε ας επαληθεύσουμε ότι όντως η (ref: rel-hom) είναι λύση της (ref: homo-expd). Αν είναι λύση της θα πρέπει να την ικανοποιεί. Αυτό σημαίνει ότι

$$y_t = aE(y_{t+1} \mid I_t) \Rightarrow \frac{1}{a^t}\eta_t = a\left(E\left(\frac{1}{a^{t+1}}\eta_{t+1}\right) \mid I_t\right) = \qquad \#$$

$$= a\frac{1}{a^{t+1}}E(\eta_{t+1} \mid I_t) = \frac{1}{a^t}\eta_t. \qquad \#$$

Κατά συνέπεια δείξαμε ότι η (ref: rel-hom) περιγράφει όντως το σύνολο των λύσεων της (ref: homo-expd). Κάθε στοιχείο αυτού τού συνόλου αντιστοιχεί καί σε μιά διαφορετική ανέλιξη martingale $\{\eta_t\}$. Με δεδομένο ότι $|a| < 1$ καί ότι η $\{\eta_t\}$ είναι οπωσδήποτε martingale μπορούμε να εξάγουμε κάποια επιπλέον συμπεράσματα σχετικά με τη στοχαστική συμπεριφορά των λύσεων $\{y_t^h\}$. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι αφού $|a| < 1$, ο συντελεστής $1/a$ θα είναι κατ'απόλυτη τιμή μεγαλύτερος της μονάδας. Αυτό σημαίνει ότι ο όρος $1/a^t$ θα τείνει στο άπειρο, το οποίο συνεπάγεται ότι κάθε λύση της οικογένειας (ref: rel-hom) θα τείνει στο άπειρο όταν $t \to \infty$.

Τώρα πλέον έχουμε στα χέρια μας όλα όσα χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό της γενικής λύσης της (ref: rat-exp-eq1), δηλαδή μιά ειδική συν τη γενική λύση της ομογενούς. Ως γνωστόν η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης (ref: rat-exp-eq1) είναι το άθροισμα αυτών των δύο λύσεων.

Γενική Λύση της Πλήρους Εξίσωσης Διαφορών με Ορθολογικές Προσδοκίες

Η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης (ref: rat-exp-eq1) θα εκφραστεί ως το άθροισμα της γενικής λύσης (ref: rel-hom) καί της ειδικής λύσης (ref: final-sol-edeq). Συγκεκριμένα,

$$y_t = y_t^h + y_t^F$$

και άρα,

$$y_t = \frac{1}{a^t}\eta_t + b\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t) \qquad \#$$

με την ακολουθία $\{\eta_t\}$ να είναι martingale, δηλαδή $E(\eta_{t+1} \mid I_t) = \eta_t$.

Πόσες στοχαστικές ακολουθίες $\{y_t\}$ ορίζονται από την (ref: gen-sol-expd)? Η απάντηση είναι άπειρες. Κάθε τέτοια ακολουθία $\{y_t\}$ πού αποτελεί λύση της (ref: rat-exp-eq1) αντιστοιχεί καί σε μιά διαφορετική στοχαστική ακολουθία martingale $\{\eta_t\}$.

Μοναδικότητα της Λύσης

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι το εξής: Μπορούμε να βρούμε κάποιες συνθήκες κάτω από τις οποίες η εξίσωση (ref: rat-exp-eq1) έχει ως μοναδική λύση την y_t^F. Αυτό εναλλακτικά σημαίνει ότι κάτω από τις υπο-αναζήτηση συνθήκες, ό όρος $\frac{1}{a^t}\eta_t$ (πού είναι υπέυθυνος για την πολλαπλότητα των λύσεων) στην (ref: gen-sol-expd) εξαφανίζεται. Η αναγκαία καί ικανή συνθήκη γιά την μοναδικότητα της λύσης y_t^F περιγάφεται από την συνθήκη (ref: transver) την οποία έχουμε ήδη συναντήσει και η οποία ονομάζεται *transversality condition*. Η συνθήκη αυτή εκφράζει τούς ελάχιστους περιορισμούς πού πρέπει να ικανοποιεί η $\{y_t\}$ προκειμένου να ορίζεται με μοναδικό τρόπο από την σχέση (ref: final-sol-edeq). Με άλλα λόγια αν μιά ακολουθία $\{y_t\}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (ref: transver) τότε δεν εκφράζεται ως $y_t = y_t^h + y_t^F$ αλλά αποκλειστικά ως $y_t = y_t^F$.

Το επόμενο ερώτημα είναι αν μπορούμε να εντοπίσουμε κάποιες συγκεκριμένες στοχαστικές ακολουθίες των οποίων τις ιδιότητες να γνωρίζουμε και οι οποίες να ικανοποιούν την συνθήκη (ref: transver). Αυτές οι ιδιότητες μπορούν να θεωρηθούν ως ικανές συνθήκες για την μοναδικότητα της λύσης. Η γενική ιδέα είναι να σκεφτούμε τέτοιες ιδιότητες για την $\{y_t\}$ ωστε να καθιστούν την παρουσία τού όρου $\frac{1}{a^t}\eta_t$ ασυμβίβαστη με αυτές τις ιδιότητες. Στη συνέχεια, εξετάζουμε δύο συγκεκριμένες συνθήκες καί αναλύουμε το αν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως *κριτήρια επιλογής* της ειδικής λύσης $\{y_t^F\}$ από το σύνολο των λύσεων $\{y_t\}$ με $y_t = y_t^h + y_t^F$.

Η Ακολουθία των Μέσων $\{E(y_t)\}$ είναι Φραγμένη

Ως πρώτο υποψήφιο κριτήριο επιλογής ας υποθέσουμε ότι ακολουθία $\{y_t\}$ είναι τέτοια ώστε όλοι όι μέσοι $E(y_t)$ να υπάρχουν καί επιπρόσθετα η ακολουθία $\{E(y_t)\}$ των μέσων να είναι φραγμένη. Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι η υπόθεση αυτή δεν θέτει εξαιρετικά ισχυρούς περιορισμούς στην $\{y_t\}$. Το ερώτημα είναι αν η συνθήκη αυτή είναι ικανή γιά να μας δημιουργήσει το "ασυμβίβαστο" με τον όρο $\frac{1}{a^t}\eta_t$ στην (ref: gen-sol-expd). Με άλλα λόγια, θέλουμε να εξετάσουμε το αν αυτή η συνθήκη είναι αρκετή γιά να μας εξασφαλίσει μοναδικότητα της λύσης. Ας εξετάσουμε τούς μέσους $E(y_t^h)$ της γενικής λύσης y_t^h της ομογενούς εξίσωσης.

$$E(y_t^h) = E(\frac{1}{a^t}\eta_t) = \frac{1}{a^t}E(\eta_t). \qquad \#$$

Γνωρίζουμε ότι η ανέλιξη $\{\eta_t\}$ είναι martingale καί άρα στάσιμη πρώτης τάξης αφού

$$E(\eta_{t+1} \mid I_t) = \eta_t \Rightarrow E[E(\eta_{t+1} \mid I_t)] = E(\eta_t) \Rightarrow E(\eta_{t+1}) = E(\eta_t),\ \forall t.$$

Κατά συνέπεια, με δεδομένο ότι οι μέσοι $E(\eta_t)$ είναι ίσοι με μιά σταθερή καί υποθέτοντας επιπλέον ότι αυτή η σταθερή είναι *διάφορη τού μηδενός*, δηλαδή

$$E(\eta_t) = \mu_\eta \neq 0,\ \forall t$$

έχουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} E(y_t^h) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{a^t}E(\eta_t)\right] = \pm\infty.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα φαίνεται εκ πρώτης όψεως να προτείνει ότι η ικανή συνθήκη πού διερευνούμε, δηλαδή η απαίτηση η ακολουθία $\{E(y_t)\}$ να είναι φραγμένη όντως αποκλείει όλες τις λύσεις της πού περιέχουν τον όρο y_t^h. Πλήν όμως με προσεκτικότερη παρατήρηση αντιλαμβανόμαστε ότι κάτι τέτοιο δεν είναι αληθές. Ο λόγος είναι ότι αν $E(\eta_t) = 0$ τότε καί $E(y_t^h) = 0$ καί άρα το κριτήριο επιλογής ικανοποιείται όχι μόνο από την λύση $\{y_t^F\}$ αλλά καί από ακολουθίες της μορφής $y_t = y_t^h + y_t^F$ με $E(y_t^h) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η παρουσία τού όρου y_t^h στη γενική λύση $y_t = y_t^h + y_t^F$ δεν είναι πάντα ασυμβίβαστη με την υπο-εξέταση συνθήκη της φραγμένης ακολουθίας των μέσων.

Η Λύση $\{y_t\}$ Είναι Στάσιμη Δεύτερης Τάξης

Η παραπάνω ανάλυση μας προτείνει να εξετάσουμε ισχυρότερους περιορισμούς εξάρτησης και ετερογένειας οι οποίοι να οδηγούν σε μοναδικότητα της λύσης. Ως προς αυτό, μιά ισχυρότερη συνθήκη πού μπορούμε να επιβάλλουμε στην $\{y_t\}$ είναι η στασιμότητα δεύτερης τάξης. Τι επίδραση έχει η υπόθεση της στασιμότητας δεύτερης τάξης στην ισχύ της συνθήκης (ref: transvers). Να θυμίσουμε ότι η τελευταία εκτός από ικανή είναι καί αναγκαία συνθήκη καί απαιτεί από τη στοχαστική ακολουθία $\{a^{T+1}E(y_{t+T+1} \mid I_t), T \in \mathbb{Z}_0^+\}$ να συγκλίνει κατά τετραγωνικό μέσο στο μηδέν. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της σύγκλισης κατά τετραγωνικό μέσο γιά τη συγκεκριμένη ακολουθία έχουμε

$$\lim_{T\to\infty} E[a^{T+1}E(y_{t+T+1} \mid I_t) - 0]^2 = 0.$$

Αναλύοντας το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\lim_{T\to\infty} E[a^{T+1}E(y_{t+T+1} \mid I_t)]^2 = \lim_{T\to\infty} E[a^{2(T+1)}E(y_{t+T+1} \mid I_t)^2] =$$
$$= \lim_{T\to\infty} a^{2(T+1)}E[E(y_{t+T+1} \mid I_t)^2] =$$
$$= \lim_{T\to\infty} a^{2(T+1)}\left\{Var[E(y_{t+T+1} \mid I_t)] + [E[E(y_{t+T+1} \mid I_t)]]^2\right\} =$$
$$= \lim_{T\to\infty} a^{2(T+1)}\{Var[E(y_{t+T+1} \mid I_t)] + E(y_{t+T+1})^2\}.$$

Στη συνέχεια, η υπόθεση ότι η $\{y_t\}$ είναι στάσιμη δεύτερης τάξης μας επιτρέπει να πούμε ότι $E(y_t)^2 = c_y \ \forall t$ καί ακόμα ότι η $Var[E(y_{t+T+1} \mid I_t)] \leq Var(y_t) = \sigma_y^2 \ \forall t$. Οι τελευταίες δύο παρατηρήσεις μαζί με το ότι $|a| < 1$ εξασφαλίζουν ότι το παραπάνω όριο είναι το μηδέν. Κατά συνέπεια οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η υπο διερεύνηση συνθήκη του να είναι η $\{y_t\}$ είναι στάσιμη δεύτερης τάξης είναι όντως ικανή συνθήκη γιά την ισχύ της (ref: transvers) καί άρα γιά τη μοναδικότητα της λύσης $\{y_t^F\}$.

Υποθέσεις γιά την Στοχαστική Ακολουθία $\{x_t\}$

Μέχρι τώρα είδαμε το πώς φτάνουμε στη γενική λύση της (ref: rat-exp-eq1) και επίσης το πότε αυτή η λύση είναι μοναδική και ίση με την (ref: final-sol-edeq). Στη συνέχεια ερευνήσαμε ικανές συνθήκες για την μοναδικότητα της λύσης σε όρους ιδιοτήτων της στοχαστικής ακολουθίας $\{y_t\}$. Τώρα θα στρέψουμε την προσοσχή μας στην στοχαστική ακολουθία $\{x_t\}$.

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να λύσουμε την εξίσωση διαφορών (ref: rat-exp-eq1) κάτω από την υπόθεση ότι γνωρίζουμε τις στοχαστικές ιδιότητες της ακολουθίας $\{x_t\}$. Πώς αυτή η επιπλέον γνώση (π.χ. έστω ότι η $\{x_t\}$ είναι ένας τυχαίος περίπατος) επηρεάζει την λύση της (ref: rat-exp-eq1)? Το πρώτο πού αξίζει να παρατηρήσουμε είναι ότι όταν γνωρίζουμε το μοντέλο πού περιγράφει την $\{x_t\}$ τότε μπορούμε να ελέγξουμε απευθείας το αν η εξίσωση (ref: rat-exp-eq1) έχει ως ειδική λύση την $\{y_t^F\}$. Πώς το κάνουμε αυτό? Εξετάζοντας αν η συγκεκριμένη $\{x_t\}$ (π.χ. ο τυχαίος περίπατος) επιτρέπει στη σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$ να είναι συγκλίνουσα. Άρα όταν γνωρίζουμε την $\{x_t\}$ μπορούμε να ελέγξουμε (αντί να υποθέσουμε) την ύπαρξη της $\{y_t^F\}$. Αν αποδείξουμε την ύπαρξη της $\{y_t^F\}$ τότε αυτομάτως γνωρίζουμε καί το σύνολο όλων των λύσεων της (ref: rat-exp-eq1) από τη σχέση $y_t = y_t^h + y_t^F$.

Η $\{x_t\}$ Είναι ένας Τυχαίος Περίπατος

Η πρώτη υπόθεση πού θα κάνουμε γιά την $\{x_t\}$ είναι ότι ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο, δηλαδή

$$x_t = x_{t-1} + u_t \qquad \#$$

με

$$u_t \sim iid(0, \sigma_u^2).$$

Κάτω από αυτή την υπόθεση, είναι εύκολο να δείξουμε ότι όλες οι προσδοκίες $E(x_{t+i} \mid I_t),\ i = 0, 1, 2, \ldots$ είναι ίσες με την τρέχουσα τιμή της x_t, δηλαδή

$$E(x_{t+i} \mid I_t) = x_t,\ \forall i. \qquad \#$$

Πράγματι, ας υπολογίσουμε πρώτα την δεσμευμένη μέση τιμή $E(x_{t+1} \mid I_t)$. Η (ref: rw-reh) γράφεται ισοδύναμα ως

$$x_{t+1} = x_t + u_{t+1}.$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $E(\cdot \mid I_t)$ καί στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας, έχουμε

$$E(x_{t+1} \mid I_t) = E(x_t \mid I_t) + E(u_{t+1} \mid I_t).$$

Έχουμε όμως $E(x_t \mid I_t) = x_t$ καί ακόμα $E(u_{t+1} \mid I_t) = 0$ αφού η u_{t+1} είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή περιέχεται στο I_t. Κατά συνέπεια, δείξαμε ότι

$$E(x_{t+1} \mid I_t) = x_t.$$

Με ανάλογο τρόπο, έχουμε ότι

$$x_{t+2} = x_{t+1} + u_{t+2}$$

καί άρα

$$E(x_{t+2} \mid I_t) = E(x_{t+1} \mid I_t) + E(u_{t+2} \mid I_t)$$

απ'όπου τελικά προκύπτει ότι

$$E(x_{t+2} \mid I_t) = E(x_{t+1} \mid I_t) = x_t.$$

Με βάση τα παραπάνω, καταλαβαίνουμε ότι η σχέσης (ref: best-forcst) όντως ισχύει.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αν η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$ συγκλίνει στοχαστικά κάτω από την υπόθεση (ref: best-forcst) δηλαδή κάτω από την υπόθεση ότι η $\{x_t\}$ είναι τυχαίος περίπατος. Προκειμένου η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$ να συγκλίνει στοχαστικά υπό κάποια έννοια στοχαστικής σύγκλισης, θα πρέπει η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_T \equiv \sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$$

να συγκλίνει στοχαστικά (υπό την ίδια έννοια σύγκλισης) σε κάποια τυχαία μεταβλητή S. Επ'αυτού έχουμε

$$\lim_{T\to\infty} S_T = \lim_{T\to\infty} \sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$$

απ' όπου με τη βοήθεια της (ref: best-forcst) έχουμε

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t) = \lim_{T\to\infty}\sum_{i=0}^{T} a^i x_t = \lim_{T\to\infty} x_t \sum_{i=0}^{T} a^i = \lim_{T\to\infty} x_t\left(\frac{1-a^{T+1}}{1-a}\right) =$$

$$= x_t \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1-a^{T+1}}{1-a}\right) = x_t\frac{1}{1-a}\lim_{T\to\infty}(1-a^{T+1}) = x_t\frac{1}{1-a}.$$

Άρα δείξαμε ότι η $\{S_T\}$ συγκλίνει σχεδόν βέβαια στην $x_t\frac{1}{1-a}$. Γιατί "σχεδόν βέβαια"? Η παραπάνω σύγκλιση ισχύει σε κάθε σημείο $\omega \in \Omega$ γιά το οποίο η $x_t(\omega)$ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Σε ένα διευρυμένο ορισμό της τυχαίας μεταβλητής, υπάρχουν $\omega \in \Omega$ τέτοια ώστε $x_t(\omega) = \pm\infty$. Αυτά τα $\omega \in \Omega$ συνθέτουν ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας. Κατά συνέπεια η παραπάνω σύγκλιση θα πρέπει να νοείται ότι αφορά όλα εκείνα τα $\omega \in \Omega$ για τα οποία η $x_t(\omega)$ είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Μπορούμε να δείξουμε ότι η $\{S_T\}$ συγκλίνει στην $x_t\frac{1}{1-a}$ υπό κάποια άλλη έννοια στοχαστικής σύγκλισης όπως κατά τετραγωνικό μέσο? Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική και δίνεται με τη μορφή της ακόλουθης πρότασης.

Proposition

Έστω η εξίσωση διαφορών (ref: rat-exp-eq1) με την στοχαστική ακολουθία $\{x_t\}$ να ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο. Τότε η στοχαστική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$ είναι συγκλίνουσα κατά τετραγωνικό μέσο καί ισούται με την τυχαία μεταβλητή $\frac{1}{1-a}x_t$.

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης είναι σχετικά εύκολη. Η πρόταση αποδεικνύεται με το να δείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_T = \sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$ συγκλίνει κατά τετραγωνικό μέσο στη τυχαία μεταβλητή $\frac{1}{1-a}x_t$. Από τον ορισμό της σύγκλισης κατά τετραγωνικό μέσο γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t) \overset{m.s.}{\to} \frac{1}{1-a}x_t$$

αν καί μόνο αν

$$\lim_{T\to\infty} E\left[\sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t) - \frac{1}{1-a}x_t\right]^2 = 0.$$

Αναλύοντας το όριο στη παραπάνω σχέση έχουμε

$$\lim_{T\to\infty} E\left[\sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t) - \frac{1}{1-a}x_t\right]^2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} E\left[\sum_{i=0}^{T} a^i x_t - \frac{1}{1-a}x_t\right]^2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} E\left[x_t\left(\sum_{i=0}^{T} a^i - \frac{1}{1-a}\right)\right]^2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} E\left[x_t^2\left(\sum_{i=0}^{T} a^i - \frac{1}{1-a}\right)^2\right] =$$

$$= E(x_t^2)\lim_{T\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{T} a^i - \frac{1}{1-a}\right)^2 =$$

$$= E(x_t^2)\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1-a^{T+1}}{1-a} - \frac{1}{1-a}\right)^2 =$$

$$= E(x_t^2)\lim_{T\to\infty}\left(\frac{-a^{T+1}}{1-a}\right)^2 = E(x_t^2)\frac{1}{1-a}\lim_{T\to\infty}(a^{2(T+1)}) = 0.$$

Άρα η $\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$ είναι συγκλίνουσα σειρά με άθροισμα την τυχαία μεταβλητή $\frac{1}{1-a}x_t$ το οποίο τελικά μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ειδική λύση y_t^F υπάρχει καί ισούται με

$$y_t^F = b\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t) = \frac{b}{1-a}x_t. \qquad \#$$

Με άλλα λόγια, η σχέση (ref: rw-sol) περιγράφει μιά ειδική λύση της (ref: rat-exp-eq1) κάτω από την υπόθεση (ref: rw-reh).

Από την τελευταία σχέση καταλαβαίνουμε ότι η στοχαστική συμπεριφορά της ακολουθίας $\{y_t^F\}$ καθορίζεται πλήρως από την αντίστοιχη συμπεριφορά της $\{x_t\}$. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι η στοχαστική ακολουθία $\{y_t^F\}$ είναι και αυτή τυχαίος περίπατος αφού η $\{x_t\}$ είναι τυχαίος περίπατος. Ως εκ τούτου δεν είναι στάσιμη δεύτερης τάξης αφού η διακύμανση ενός τυχαίου περιπάτου αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο. Κατά συνέπεια συμπεραίνουμε ότι αν ξεκινήσουμε από την υπόθεση (ή τη γνώση) ότι η $\{x_t\}$ είναι τυχαίος περίπατος τότε δεν υπάρχει καμμιά στάσιμη ακολουθία $\{y_t\}$ πού να αποτελεί λύση της (ref: rat-exp-eq1).

Η $\{x_t\}$ Είναι ένας Τυχαίος Περίπατος με Τάση

Στην συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η $\{x_t\}$ είναι ένας τυχαίος περίπατος με τάση, δηλαδή

$$x_t = \mu + x_{t-1} + u_t \qquad \#$$

με

$$u_t \sim iid(0, \sigma_u^2).$$

Κάτω από την υπόθεση (ref: rw-dr2) οι ορθολογικές προσδοκίες $E(x_{t+i} \mid I_t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ είναι ίσες με

$$E(x_{t+i} \mid I_t) = i\mu + x_t, \ \forall i. \qquad \#$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται ως εξής: Η (ref: rw-dr2) γράφεται ισοδύναμα ως

$$x_{t+1} = \mu + x_t + u_{t+1}.$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $E(\bullet \mid I_t)$ καί στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας, έχουμε

$$E(x_{t+1} \mid I_t) = \mu + E(x_t \mid I_t) + E(u_{t+1} \mid I_t),$$

με $E(x_t \mid I_t) = x_t$ καί $E(u_{t+1} \mid I_t) = 0.$ Άρα

$$E(x_{t+1} \mid I_t) = \mu + x_t.$$

Με ανάλογο τρόπο, έχουμε ότι

$$x_{t+2} = \mu + x_{t+1} + u_{t+2}$$

καί άρα

$$E(x_{t+2} \mid I_t) = \mu + E(x_{t+1} \mid I_t) + E(u_{t+2} \mid I_t)$$

απ'όπου προκύπτει ότι

$$E(x_{t+2} \mid I_t) = \mu + (\mu + x_t) = 2\mu + x_t.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προκύπτει η σχέση (ref: rw-dr-for) σύμφωνα με την οποία η προσδοκία $E(x_{t+i} \mid I_t)$ είναι γραμμική συνάρτηση του ορίζοντα πρόβλεψης i.

Έχοντας καταλήξει στην έκφραση για την $E(x_{t+i} \mid I_t)$ μπορούμε να προχωρήσουμε στη διερεύνηση του κύριου ερωτήματος πού είναι αν η στοχαστικη σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$ συγκλίνει κάτω από την υπόθεση (ref: rw-dr-for). Γιά να έχουμε σύγκλιση της στοχαστικής σειράς θα πρέπει η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_T \equiv \sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$$

να συγκλίνει υπό καποια έννοια σε μιά τυχαία μεταβλητή $S.$ Συγκεκριμένα έχουμε

$$S_T = \sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$$

απ' όπου με τη χρήση της (ref: rw-dr-for) προκύπτουν τα εξής,

$$\sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t) = \sum_{i=0}^{T} a^i (i\mu + x_t) = \sum_{i=0}^{T} (a^i i\mu + a^i x_t) = \qquad \#$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{T} a^i i\mu + \sum_{i=0}^{T} a^i x_t \right) = \left(\mu \sum_{i=0}^{T} ia^i + x_t \sum_{i=0}^{T} a^i \right).$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{i=0}^{T} ia^i = \frac{1}{(1-a)^2}$$

καί ως γνωστόν

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{i=0}^{T} a^i = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1-a^{T+1}}{1-a} \right) = \frac{1}{1-a}$$

Κάνοντας χρήση των δύο τελευταίων σχέσεων, καί της σχέσης (ref: interm1) το όριο της ακολουθίας $\{S_T\}$ γίνεται

$$\lim_{T\to\infty} S_T = \lim_{T\to\infty} \left(\mu \sum_{i=0}^{T} ia^i + x_t \sum_{i=0}^{T} a^i \right) = \frac{\mu}{1-a^2} + \frac{1}{1-a} x_t = \frac{1}{1-a} \left(\frac{\mu}{1-a} + x_t \right).$$

Άρα δείξαμε ότι η στοχαστική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$ συγκλίνει (σχεδόν βέβαια) στη τυχαία μεταβλητή $\frac{1}{1-a}(\frac{\mu}{1-a} + x_t)$. Κατά συνέπεια, η ειδική λύση y_t^F υπάρχει καί ορίζεται από τη σχέση

$$y_t^F = \frac{1}{1-a} \left(\frac{\mu}{1-a} + x_t \right).$$

Πέρα της σχεδόν βέβαιης σύγκλισης, μπορούμε να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{S_T\}$ συγκλίνει (και) κατά τετραγωνικό μέσο στην τυχαία μεταβλητή $S = \frac{1}{1-a}(\frac{\mu}{1-a} + x_t)$.

Η $\{x_t\}$ Είναι μιά Ευσταθής Στοχαστική Εξίσωση Διαφορών Πρώτης Τάξης

Η τρίτη υπόθεση πού θα κάνουμε σχετικά με τη στοχαστική συμπεριφορά της $\{x_t\}$ είναι η εξής:

$$x_t = \rho x_{t-1} + u_t, \ |\rho| < 1 \qquad \#$$

με

$$u_t \sim iid(0, \sigma_u^2).$$

Επιπλέον, όπως καί πρίν θα υποθέσουμε ότι η u_t είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε μεταβλητή περιλαμβάνεται στο σύνολο πληροφοριών I_{t-1}. Κάτω από την υπόθεση (ref: arn1), οι προσδοκίες $E(x_{t+i} \mid I_t), \ i = 0, 1, 2, \ldots$ δεν είναι ίσες με την τρέχουσα τιμή της x_t, αλλά αντίθετα

$$E(x_{t+i} \mid I_t) = \rho^i x_t. \qquad \#$$

Ο τρόπος με τον οποίο καταλήγουμε στη σχέση (ref: forcst-ar1) είναι ο εξής: Πρώτα υπολογίζουμε την δεσμευμένη μέση τιμή $E(x_{t+1} \mid I_t)$. Η (ref: arn1) γράφεται, με μετατόπιση μιάς χρονικής περιόδου, ως

$$x_{t+1} = \rho x_t + u_{t+1}.$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $E(\bullet \mid I_t)$ καί στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας, έχουμε

$$E(x_{t+1} \mid I_t) = E(\rho x_t \mid I_t) + E(u_{t+1} \mid I_t).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $E(u_{t+1} \mid I_t) = 0$ καταλήγουμε στο ότι

$$E(x_{t+1} \mid I_t) = \rho x_t.$$

Γιά την περίοδο $t + 2$, έχουμε ότι

$$x_{t+2} = \rho x_{t+1} + u_{t+2}$$

καί άρα

$$E(x_{t+2} \mid I_t) = \rho E(x_{t+1} \mid I_t) + E(u_{t+2} \mid I_t)$$

απ'όπου καταλήγουμε στο ότι

$$E(x_{t+2} \mid I_t) = \rho E(x_{t+1} \mid I_t) = \rho^2 x_t.$$

Αυτή η διαδικασία μας οδηγεί με προφανή τρόπο στη σχέση (ref: forcst-ar1). Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την ύπαρξη της ειδικής λύσης $\{y_t^F\}$ κάτω από την υπόθεση (ref: arn1). Η ύπαρξη αυτής της λύσης μεταφράζεται στο αν η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$ συγκλίνει στοχαστικά κάτω από την υπόθεση (ref: forcst-ar1). Όπως είπαμε καί γιά την προηγούμενη περίπτωση, προκειμένου η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$ να συγκλίνει στοχαστικά θα πρέπει η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_T \equiv \sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$$

να συγκλίνει στοχαστικά σε κάποια τυχαία μεταβλητή S. Επ'αυτού έχουμε

$$\lim_{T\to\infty} S_T = \lim_{T\to\infty} \sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$$

απ' όπου με τη βοήθεια της (ref: forcst-ar1) καί με $|\rho| < 1$ έχουμε

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{i=0}^{T} a^i E(x_{t+i} \mid I_t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{i=0}^{T} a^i \rho^i x_t = \lim_{T\to\infty} x_t \sum_{i=0}^{T} (a\rho)^i = \lim_{T\to\infty} x_t \left(\frac{1 - (a\rho)^{T+1}}{1 - a\rho} \right) =$$

$$= x_t \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1 - (a\rho)^{T+1}}{1 - a\rho} \right) = x_t \frac{1}{1 - a\rho} \lim_{T\to\infty} (1 - (a\rho)^{T+1}) = x_t \frac{1}{1 - a\rho}.$$

Άρα η $\sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t)$ είναι συγκλίνουσα σειρά, το οποίο σημαίνει ότι η ειδική λύση $\{y_t^F\}$ υπάρχει καί ισούται με

$$y_t^F = b \sum_{i=0}^{\infty} a^i E(x_{t+i} \mid I_t) = \frac{b}{1 - a\rho} x_t. \qquad \#$$

Η σχέση (ref: ar-sol) περιγράφει μιά ειδική λύση της (ref: rat-exp-eq1) κάτω από την υπόθεση (ref: arn1). Η σχέση (ref: ar-sol) διαφέρει από την (ref: rw-sol) στο ότι η παράμετρος ρ πού καθορίζει τις προσδοκίες γιά τα μελλοντικά επίπεδα της x συμμετέχει ρητά στη διαμόρφωση της y_t.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αντίθετα με τις προηγούμενες περιπτώσεις όπου η $\{x_t\}$ ήταν τυχαίος περίπατος ή τυχαίος περίπατος με τάση, στη παρούσα περίπτωση όπου η $\{x_t\}$ είναι στάσιμη δεύτερη τάξης, υπάρχει μια στάσιμη ακολουθία $\{y_t\}$ η οποία να αποτελεί λύση της (ref: rat-exp-eq1). Αυτή είναι η ακολουθία $\{y_t^F\}$ πού ορίζεται από την (ref: ar-sol). Αυτή είναι και η μοναδική στάσιμη λύση της (ref: rat-exp-eq1). Όποιαδήποτε άλλη λύση (από τις άπειρες δυνατές) της (ref: rat-exp-eq1) είναι μη-στάσιμη εξαιτίας της παρουσίας τού όρου $y_t^h = \frac{1}{a^t}\eta_t.$ στη γενική λύση.

Ερωτήσεις Επανάληψης

1) Να εξηγήσετε διαισθητικά ποιά χαρακτηριστικά των αγορών κεφαλαίου επιχειρεί να αποτυπώσει η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών.

2) Να εξηγήσετε την έννοια υπό την οποία μιά αγορά είναι αποτελεσματική. Πού έγκειται η αποτελεσματικότητα της?

3) Να εξηγήσετε τη διαδικασία μέσω της οποίας η όποια πληροφορία εμφανίζεται σε μιά δεδομένη χρονική στιγμή γιά κάποια μετοχή ενσωματώνεται αυτομάτως στη τιμή αυτής της μετοχής.

4) Ας υποθέσουμε ότι μιά αγορά είναι τέτοια ώστε η πληροφορία πού εμφανίζεται την χρονική στιγμή t για μιά συγκεκριμένη μετοχή ενσωματώνεται σταδιακά στη τιμή στις χρονικές στιγμές, $t,\ t+1$ και $t+2.$ Είναι αυτή η αγορά αποτελεσματική?

5) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: "Σε μιά αποτελεσματική αγορά κανείς μεμονωμένος επενδυτής δεν μπορεί να "νικήσει" την αγορά, υπό την έννοια του να επιτυγχάνει συστηματικά καλύτερες αποδόσεις από αυτές της αγοράς".

6) Στην αγορά πού περιγράφεται στην ερώτηση 4, μπορεί ένας επενδυτής να νικά συστηματικά την αγορά? Να εξηγήσετε την απάντηση σας χρησιμοποιώντας ένα υποθετικό παράδειγμα.

7) Να δώσετε τον αυστηρό ορισμό της αποτελεσματικής αγοράς. Στη συνέχεια να εξηγήσετε πότε μιά αγορά ονομάζεται ασθενώς αποτελεσματική, ημι-ισχυρά αποτελεσματική και ισχυρά αποτελεσματική. Ποιόν από τους τρείς αυτούς ορισμού θεωρείται τον λιγότερο ρεαλιστικό και γιατί?

8) Ποιοί είναι οι περιορισμοί εξάρτησης και ετερογένειας πού επιβάλλει η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών στην στοχαστική ακολουθία των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_{it}\}$? Μπορεί η υπόθεση των αποτελεσματικών αφορών από μόνη της να παράξει αυτούς τους περιορισμούς ή χρειάζεται να συμπληρωθεί από μιά

επιλέον υπόθεση? Αν ναί ποιά είναι η υπόθεση αυτή?

9) Τι σημαίνει η υπόθεση της διαχρονικής σταθερότητας του ασφάλιστρου κινδύνου? Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας χρησιμοποιώντας ένα υποθετικό παράδειγμα.

10) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: "Σε μιά αποτελεσματική αγορά, η τιμή της κάθε μετοχής ισούται πάντα με την αντίστοιχη θεμελιώδη τιμή." Πώς ορίζεται η θεμελιώδης τιμή μιάς μετοχής?

11) Υποθέτοντας ότι η αγορά είναι αποτελεσματική, πώς θα αντιδρούσατε στον ισχυρισμό ενός διαχειριστή χαρτοφυλακίου ότι μέσω της ενεργής διαχείρισης μπορεί να σας προσφέρει υπερ-αποδόσεις? Θα δεχόσασταν να πληρώσετε αυτό τον διαχειριστή αμοιβή διαχείρισης?

12) Τι εννοούμε λέγοντας ότι σε μιά αποτελεσματική αγορά οι τιμές των μετοχών είναι "επαρκείς στατιστικές"?

13) Τι θα συμβεί στην θεμελιώδη τιμή μιάς μετοχής αν αυξηθεί το ασφάλιστρο κινδύνου πού απαιτούν οι επενδυτές για την διακράτησης της μετοχής? Επίσης, τι θα συμβεί στην θεμελιώδη τιμή αν αυξηθεί η απόδοση του (χωρίς ρίσκο) κυβερνητικού ομολόγου.

14) Αν η θεμελιώδης τιμή μιάς μετοχής μειωθεί (λόγω του ότι αυξήθηκε το ασφάλιστρο κινδύνου, ή λόγω τού ότι μειώθηκαν οι προσδοκίες για τα μελλοντικά μερίσματα) τι θα συμβεί στην αγοραία τιμή της μετοχής?

15) Να εξηγήσετε τον λόγο για τον οποίο η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών, στα πρώτα χρόνια της εισαγωγής της στη βιβλιογραφία, θεωρήθηκε ότι συνεπάγεται το μοντέλο του "τυχαίου περίπατου" για τις (λογαριθμικές) τιμές των μετοχών. Στη σύγχρονη βιβλιογραφία συνεχίζει αυτή η σχέση να υφίσταται ή υποκαταστάθηκε από κάποια άλλη?

16) Έστω ότι η στοχαστική ακολουθία των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_{it}\}$ μιάς μετοχής i περιγράφεται από ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτης τάξης. Είναι αυτό αρκετό να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η αγορά στην οποία διαπραγματεύεται η εν λόγω μετοχή είναι μη-αποτελεσματική?

17) Να αναλύσετε την διαφορά μεταξύ του μοντέλου του τυχαίου περίπατου για την στοχατική ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_{it}\}$ και του μοντέλου της martingale διαφοράς για την στοχαστική ανέλιξη των υπερβαλλουσών αποδόσεων $\{\widetilde{R}^e_{it}\}$.

18) Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι επενδυτές στην αγορά είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο, τότε είναι σωστό να πούμε ότι η υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών (από μόνη της) συνεπάγεται το μοντέλο της martingale διαφοράς για την ανέλιξη των υπερβαλλουσών αποδόσεων $\{\widetilde{R}^e_{it}\}$?

19) Να αναλύσετε το αν η παρουσία της δυναμικής ετεροσκεδαστικότητας (πού συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) στην στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων $\{\widetilde{R}_{it}\}$ θεωρείται ως ένδειξη εναντίον της υπόθεσης των αποτελεσματικών αγορών.

20) Έστω ότι σήμερα δημοσιεύεται η είδηση ότι η φαρμακευτική εταιρεία i ανέπτυξε ένα νέο αποτελεσματικό φάρμακο εναντίον της εποχικής γρίππης. Να περιγράψετε αναλυτικά το πώς και πότε αυτή η πληροφορία θα ενσωματωθεί στην τιμή της μετοχής. Έχει νόημα καποιος μεμονωμένος επενδυτής πού θα μάθει αύριο το συγκεκριμένο νέο να προβεί (αύριο) στην αγορά της μετοχής i προσδοκώντας

υπερ-απόδοση?

21) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: "Μιά αγορά πού είναι ασθενώς αποτελεσματική δεν είναι κατ'ανάγκη και ημι-ισχυρά αποτελεσματική". Η αντίστροφη πρόταση ισχύει?

22) Να σχολιάσετε τις ακόλουθες δύο προτάσεις: (α) "Σε μιά αποτελεσματική αγορά όλοι οι επενδυτές έχουν ορθολογικές προσδοκίες". (β) "Αν όλοι οι επενδυτές σε μιά αγορά έχουν ορθολογικές προσδοκίες τότε η αγορά αυτή είναι αποτελεσματική".

23) Να σχολιάσετε το αν σε μιά αποτελεσματική αγορά έχει νόημα η "ενεργητική διαχείριση" επενδύσεων.

24) Σε μία αποτελεσματική αγορά, είναι δυνατόν η θεμελιώδης τιμή της μετοχής *i* να αλλάζει διαχρονικά? Αν ναί ποιοί είναι οι λόγοι πού προκαλούν αυτή την αλλαγή? Επίσης σε περίπτωση πού η θεμελιώδης τιμή αλλάξει τι θα γίνει στην αγοραία τιμή της μετοχής?

25) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: "Εξαιτίας του ότι σε μιά αποτελεσματική αγορά κάθε επενδυτής κάνει σωστά την δουλειά του κανείς επενδυτής δεν μπορεί να παράξει αποδόσεις συστηματικά καλύτερες της αγοράς". Διακρίνετε σε αυτή τη πρόταση στοιχεία αντίφασης?

26) Πώς κρίνεται την εμπειρική επάρκεια της υπόθεσης των αποτελεσματικών αγορών? Την θεωρείτε μια ρεαλιστική υπόθεση? Να προτείνετε ένα στατιστικό έλεγχο προκειμένου να ελέγξετε την εμπειρική ισχύ αυτής της υπόθεσης.

27) Οι επαγγελματίες διαχειριστές επενδύσεων συχνά αναφέρουν τη φράση "Markets know best". Τι εννοούν οι ίδιοι με αυτή τη φράση και πώς ερμηνεύετε αυτή τη φράση υπό το πρίσμα της υπόθεσης των αποτελεσματικών αγορών?

28) Συχνά οι τιμές των μετοχών επιδεικνύουν ακραίες συμπεριφορές οι οποίες αναφέρονται ως "κερδοσκοπικές φούσκες". Κατά τη διάρκεια μιάς τέτοιας φούσκας παρατηρείται συστηματική απόκλιση της αγοραίας τιμής από αυτή πού θεωρείται ως συνεπής με τα θεμελιώδη στοιχεία της μετοχής. Μπορεί μιά κερδοσκοπική φούσκα να ανακύψει σε μιά αποτελεσματική αγορά?

29) Να σχολιάσετε υπό το πρίσμα της υπόθεσης των αποτελεσματικών αγορών το ακόλουθο "ανέκδοτο": Ένας καθηγητής οικονομικών περπατάει στο δρόμο με ένα φοιτητή του. Ο φοιτητής ξαφνικά βλέπει ένα χαρτονόμισμα των 50 ευρώ και λέει στον καθηγητή. "Είμαστε τυχεροί - να ένα χαρτονόμισμα των 50 ευρώ". Ο καθηγητής του απαντάει. "Μην κάνεις το κόπο να το μαζέψεις. Αν το χαρτονόμισμα ήταν αληθινό, κάποιος άλλος θα το είχε μαζέψει ήδη".

30) Να σχολιάσετε την ακόλουθη δικαιολογία πού πρόβαλε ο γνωστός οικονομολόγος Robert Lucas ο 2009, στην κατηγορία πού εκτόξευσε ο Economist σχετικά με την αδυναμία των οικονομολόγων να προβλέψουν την Κρίση του 2008: "Αν ένας οικονομολόγος είχε μιά φόρμουλα πού του επέτρεπε να προβλέπει τις οικονομικές κρίσεις μιά εβδομάδα πρίν, τότε αυτή η φόρμουλα θα γινόταν γρήγορα μέρος της διαθέσιμης πληροφορίας και οι τιμές θα έπεφταν μιά εβδομάδα πρίν."

31) Ενίοτε διαβάζουμε στον οικονομικό τύπο ότι οι επενδυτές μετοχών συχνά ακολουθούν "αγελαία συμπεριφορά". Είναι αυτή η συμπεριφορά συνεπής με την υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών?

Ανατοκισμός και Παρούσα Αξία

Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλύσουμε δύο πολύ σημαντικές έννοιες της Χρηματοοικονομικής, την έννοια του ανατοκισμού και την έννοια της παρούσας αξίας. Στην ενότητα αυτή θα αναλύσουμε τον ανατοκισμό. Ο ανατοκισμός αφορά την περίπτωση κατά την οποία η απόδοση πού αποκτούμε από κάποια επένδυση προστίθεται στο κεφάλαιο και όλο μαζί το νέο κεφάλαιο (αρχικό κεφάλαιο συν απόδοση) επανεπενδύεται και ως εκ τούτου "ανατοκίζεται". Αναλόγως με το αν ο ανατοκισμός λαμβάνει χώρα σε διακριτό χρόνο (π.χ. ανά έτος, τρίμηνο ή μήνα) ή σε συνεχή χρόνο έχουμε τον περιοδικό και συνεχή ανατοκισμό αντίστοιχα. Ο ανατοκισμός οδηγεί σε γρήγορη αύξηση του αρχικού κεφαλαίου, με το χρόνο πού απαιτείται γιά τον διπλασιασμό του αρχικού κεφαλαίου να εξαρτάται από την απόδοση της επένδυσης (ή το επιτόκιο). Είναι χαρακτηριστική η ρήση του Αινστάιν ότι "ο ανατοκισμός είναι το όγδοο θαύμα του κόσμου. Αυτός πού τον κατανοεί τον κερδίζει, αυτός πού δεν τον κατανοεί τον πληρώνει".

Περιοδικός Ανατοκισμός. Διακριτός Χρόνος

Ένας τρόπος να εισάγουμε την έννοια του περιοδικού ανατοκισμού σε διακριτό χρόνο και ταυτοχρόνως να διατηρήσουμε την επαφή μας με τα προηγούμενα κεφάλαια είναι να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στη σχέση (ref: ret1) την οποία ξαναγράφουμε εδώ γιά λόγους ευκολίας (παραλείποντας τον δείκτη i),

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \qquad \#$$

Όπως έχουμε συζητήσει κατ' επανάληψη, αυτή η σχέση αποτελεί τον ορισμό της απόδοσης ενός asset μεταξύ των περιόδων $t-1$ και t. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ως

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

απ'όπου συνεπάγεται ότι

$$P_t = (1 + R_t)P_{t-1}. \qquad \#$$

Παρατήρηση
Μέχρι τώρα το σύμβολο P_t συμβόλιζε την τιμή του asset τη χρονική στιγμή t. Στην συζήτηση πού ακολουθεί, το ίδιο σύμβολο P_t θα αναπαριστά το ύψος του κεφαλαίου μας (σε ευρώ) την χρονική στιγμή t.

Ας υποθέσουμε ότι η απόδοση R_t τού κεφαλάιου μας μεταξύ δύο (οποιονδήποτε) περιόδων $t-1$ και t είναι σταθερή (και γνωστή εκ των προτέρων),

$$R_t = R > 0, \ \forall t.$$

Με βάση την τελευταία υπόθεση, η εξίσωση (ref: ret2n) γίνεται

$$P_t = \varphi P_{t-1} \qquad \#$$

με

$$\varphi = (1+R) > 1.$$

Η εξίσωση (ref: ret3n) είναι μιά γραμμική εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης με σταθερό συντελεστή καί *ομογενής*.

Παρατηρήσεις

(i) Η γενική μορφή μιάς γραμμικής εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης με σταθερό συντελεστή, φ, και σταθερό όρο, δ, είναι

$$P_t = \varphi P_{t-1} + \delta. \qquad \#$$

Στην περίπτωση όπου $\delta = 0$, η αντίστοιχη εξίσωση ονομάζεται ομογενής.

(ii) Στο παρόν πλαίσιο συζήτησης, η απόδοση R_t θεωρήθηκε σταθερή διαχρονικά και γνωστή εκ των προτέρων. Αυτό σημαίνει ότι η απόδοση αυτή αφορά μιά επένδυση πού κάναμε χωρίς κίνδυνο (π.χ. ένας προθεσμιακός λογαριασμός ή αγορά ενός αξιόπισου κρατικού ομολόγου). Αντίθετα, αν η R_t είναι η απόδοση μιά επένδυσης με κίνδυνο (π.χ. όλο το αρχικό μας κεφάλαιο P_0 τοποθετήθηκε σε μετοχές) τότε η R_t ερμηνεύεται ως τυχαία μεταβλητή. Σε αυτή τη περίπτωση, η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών πού προκύπτει δεν είναι ντετερμινιστική (όπως η περίπτωση πού αναλύουμε στο παρόν κεφάλαιο) αλλά στοχαστική.

Τι μας λέει η εξίσωση διαφορών (ref: ret3n)? Ουσιαστικά μας περιγράφει το πώς ένα αρχικό κεφάλαιο P_0 πού επενδύσαμε για πρώτη φορά την χρονική στιγμή $t = 0$ "κινείται στο χρόνο" όταν ανατοκίζεται σε κάθε t με σταθερό επιτόκιο R. (Συνήθως η χρονική περίοδος t είναι το έτος και το αντίστοιχο R είναι το ετήσιο επιτόκιο). Συγκεκριμένα, την χρονική στιγμή $t = 1$ το αρχικό μας κεφάλαιο ύψους P_0 (ευρώ) γίνεται P_1,

$$P_1 = \varphi P_0.$$

Την χρονική στιγμή $t = 2$, το νέο κεφάλαιο P_1 πού αποκτήσαμε την $t = 1$ ανατοκίζεται πάλι με επιτόκιο R και γίνεται P_2,

$$P_2 = \varphi P_1 = \varphi(\varphi P_0) = \varphi^2 P_0.$$

Με ανάλογο τρόπο, την χρονική στιγμή $t = 3$, το αρχικό μας κεφάλαιο P_0 γίνεται,

$$P_3 = \varphi P_2 = \varphi(\varphi^2 P_0) = \varphi^3 P_0.$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία ανατοκισμού, κατανοούμε ότι η σχέση πού διέπει το νέο μας κεφάλαιο σε μιά οποιαδήποτε χρονική στιγμή t με το αρχικό μας κεφάλαιο P_0 είναι

$$P_t = P_0 \varphi^t. \qquad \#$$

Η σχέση (ref: soln) αποτελεί τη λύση της εξίσωσης διαφορών (ref: ret3n) γιά αρχική τιμή ίση με P_0. Τι σημαίνει "λύση μιάς εξίσωσης διαφορών"? Η λύση μιας εξίσωσης διαφορών δεν είναι ένας αριθμός (όπως π.χ. η λύση της εξίσωσης $x + 5 = 0$) αλλά μιά ολόκληρη συνάρτηση $f(t)$ του t, ή πιό σωστά μιά ολόκληρη οικογένεια συναρτήσεων του t. Αν έχουμε ένα μέλος αυτής της οικογένειας λύσεων μιλάμε για μιά συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης διαφορών, ενώ αν αναφερόμαστε σε όλη την οικογένεια των λύσεων μιλάμε για τη γενική λύση της εξίσωσης διαφορών. Επιπλέον αφού η ανεξάρτητη μεταβλητή t παίρνει τιμές μόνο στους ακεραίους (ο χρόνος είναι διακριτός) οι τιμές της κάθε συγκεκριμένης λύσης σχηματίζουν μιά αντίστοιχη ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Παρατηρήσεις

(i) Η σχέση (ref: soln) είναι η συγκεκριμένη *λύση* της εξίσωσης διαφορών (ref: ret3n) γιά αρχική τιμή ίση με P_0. Αν θέλουμε να γενικεύσουμε τη λύση θα πρέπει να εκφράσουμε την (ref: soln) με ένα πιό γενικό τρόπο ο οποίος θα ισχύει όχι μόνο για την συγκεκριμένη P_0 αλλά γιά κάθε P_0. Ο τρόπος πού το κάνουμε είναι με την εισαγωγή μιας αυθαίρετης σταθεράς C. Χρησιμοποιώντας την C, η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης παίρνει τη μορφή,

$$P_t = C\varphi^t. \qquad \#$$

Αυτό σημαίνει ότι η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι μιά συνάρτηση του χρόνου (της μεταβλητής t). Επιπλέον παρατηρούμε ότι το είδος αυτής της συνάρτησης-λύσης είναι "εκθετική". Αφού υποθέσαμε ότι το φ είναι μεγαλύτερο της μονάδας, η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι η μεταβλητή P_t (το κεφάλαιο μας) θα αυξάνει εκθετικά με την πάροδο του χρόνου με ρυθμό αύξησης ίσο με R. Το τελευταίο δείχνεται ως εξής. Η ποσοστιαία μεταβολή του κεφαλαίου μας (ο ρυθμός αύξησης του) μεταξύ των περιόδων $t-1$ και t είναι

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{C\varphi^t - C\varphi^{t-1}}{C\varphi^{t-1}} = \frac{C\varphi^t}{C\varphi^{t-1}} - 1 = \varphi - 1 = R, \qquad \#$$

δηλαδή το επιτόκιο του ανατοκισμού.

(ii) Αφού η σχέση (ref: solng) είναι η (γενική) *λύση* της εξίσωσης διαφορών (ref: ret3n) θα πρέπει να την επαληθεύει. Αυτό φαίνεται αμέσως αντικαθιστώντας την (ref: solng) στην (ref: ret3n),

$$P_t = \varphi P_{t-1} \Rightarrow C\varphi^t = \varphi C\varphi^{t-1} \Rightarrow C\varphi^t = C\varphi^t.$$

(iii) Αν υποθέταμε ότι $-1 < R < 0$ δηλαδή η επένδυση μας είχε σταθερά αρνητική απόδοση (για παράδειγμα όταν η τράπεζα μας χρεώνει αρνητικό επιτόκιο στην κατάθεση μας ως "φύλακτρα") τότε $0 < \varphi < 1.$ Σε αυτή τη περίπτωση

$$\lim_{t\to\infty} C\varphi^t = 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι το αρχικό μας κεφάλαιο μας τείνει να μηδενιστεί με την πάροδο του χρόνου.

(iv) Αφού η P_t είναι εκθετική συνάρτηση του χρόνου, ο λογάριθμός, p_t, της P_t είναι γραμμική συνάρτηση τού χρόνου. Πράγματι, από την (ref: soln) έχουμε,

$$P_t = C\varphi^t \Rightarrow \ln(P_t) = \ln(C\varphi^t) \Rightarrow p_t = \ln(C) + \ln(\varphi^t) \Rightarrow \qquad \#$$
$$\Rightarrow p_t = c + t\ln(\varphi) \Rightarrow p_t = c + \varphi_l t,$$

όπου $\varphi_l = \ln(\varphi)$ και $c = \ln(C).$ Αυτό σημαίνει ότι αν μας δοθεί η γραμμική σχέση μεταξύ του λογαρίθμού, p_t, του κεφαλαίου μας την χρονική στιγμή t και της μεταβλητής t (δηλαδή μας γνωστοποιηθεί η κλίση φ_l της γραμμής), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή φ της εκθετικής συνάρτησης ως

$$\varphi = \exp(\varphi_l)$$

(v) Οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής P_t στην (ref: soln) σχηματίζουν μιά γεωμετρική πρόοδο με κοινό λόγο φ. Πράγματι, ο πρώτος όρος της γεωμετρική προόδου είναι το αρχικό κεφάλαιο P_0. Ο δεύτερος όρος είναι ο $P_1 = \varphi P_0$, ο τρίτος όρος είναι ο $P_2 = \varphi^2 P_0$ και ο t-οστός όρος ο $P_{t-1} = \varphi^{(t-1)} P_0$. Αντίστοιχα, οι τιμές της p_t στην (ref: l_rel) ακολουθούν μια αριθμητική πρόοδο με κοινή διαφορά την

$$p_t - p_{t-1} = (p_0 + \varphi_l t) - (p_0 + \varphi_l (t-1)) = \varphi_l.$$

(vi) Ας εξετάσουμε ένα εμπειρικό παράδειγμα, πού καταδεικνύει τα σχόλια πού κάναμε στην παρατήρηση (v): Έστω ότι έχουμε αρχικό κεφάλαιο $P_0 = 100$ ευρώ το οποίο ανατοκίζουμε κάθε χρόνο με σταθερό επιτόκιο $R = 0.05$ (5%). Αυτό σημαίνει ότι ο συντελεστής φ είναι ίσος με 1.05. Η πορεία του κεφαλαίου μας τα επόμενα δέκα χρόνια δίνεται από τον επόμενο πίνακα (ο οποίος επίσης περιέχει την εξέλιξη του λογαρίθμου του κεφαλαίου μας):

Έτος	Κεφάλαιο: P_t	Λόγος φ: $\frac{P_t}{P_{t-1}}$	Ποσοστιαία Μεταβολή: $\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$	Λογάριθμος Κεφαλαίου: p_t
$t = 0$	100	–	–	4.605
$t = 1$	105	1.05	0.05	4.653
$t = 2$	110.2500	1.05	0.05	4.702
$t = 3$	115.7625	1.05	0.05	4.751
$t = 4$	121.5506	1.05	0.05	4.800
$t = 5$	127.6282	1.05	0.05	4.849
$t = 6$	134.0096	1.05	0.05	4.898
$t = 7$	140.7100	1.05	0.05	4.946
$t = 8$	147.7455	1.05	0.05	4.995
$t = 9$	155.1328	1.05	0.05	5.044
$t = 10$	162.8895	1.05	0.05	5.093

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι όντως η σχέση $\varphi = \exp(\varphi_l)$ ικανοποιείται αφού $1.05 \simeq \exp(0.04879)$. Επίσης παρατηρούμε ότι λόγω του ανατοκισμού το αρχικό μας κεφάλαιο των 100 ευρώ στο τέλος του δέκατου χρόνου θα έχει ανέλθει στο ποσό των 162.8895 ευρώ (μιά πολύ σημαντική αύξηση).

(vii) Το τελευταίο σχόλιο γεννά το ερώτημα, σε πόσες χρονικές περιόδους το αρχικό μας κεφάλαιο διπλασιάζεται. Γιά να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα σκεφτόμαστε ως εξής: Θέλουμε να βρούμε τη χρονική περίοδο t στην οποία το αντίστοιχο κεφάλαιο $P_t = P_0 \varphi^t$ θα είναι διπλάσιο του αρχικού, P_0. Άρα θέλουμε να βρούμε την τιμή του t πού ικανοποιεί την εξίσωση,

$$P_0 \varphi^t = 2P_0.$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι

$$\varphi^t = 2$$

και άρα

$$\ln(\varphi^t) = \ln(2).$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις,

$$t\ln(\varphi) = \ln(2) \Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{\ln(\varphi)} = \frac{0.69}{\ln(\varphi)}.$$

Στο πλαίσιο του παραδείγματος μας, το αρχικό κεφάλαιο των 100 ευρώ με $\varphi = 1.05$ θα διπλασιαστεί την χρονική στιγμή

$$t = \frac{0.69}{\ln(1.05)} = 14.14.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι μιά προσεγγιστική μέθοδος υπολογισμού των χρονικών περιόδων πού απαιτούνται για τον διπλασιασμό του αρχικού κεφαλαίου, ο οποίος ήταν γνωστός από τον δέκατο πέμπτο αιώνα, είναι ο επονομαζόμενος "κανόνας-72". Αυτός ο κανόνας λεει ότι αν το κεφάλαιο ανατοκίζεται με σταθερό επιτόκιο ίσο με a% (π.χ 5%) οι περίοδοι που απαιτούνται για να διπλασιατεί το αρχικό κεφάλαιο είναι κατά προσέγγιση 72/a. Γιά το συγκεκριμένο παράδειγμα, ο κανόνας-72 δίνει

$$t = \frac{72}{5} = 14.4$$

το οποίο είναι όντως πολύ κοντά στην παραγματική τιμή του t (14.14) στην οποία το αρχικό κεφάλαιο θα διπλασιαστεί.

Περιοδικός Ανατοκισμός με Σταθερή Προσθήκη/Αφαίρεση Κεφαλαίου σε κάθε Περίοδο

Η προηγούμενη ανάλυση αφορά την περίπτωση κατά την οποία ξεκινάμε με ένα αρχικό κεφάλαιο P_0 το οποίο ανατοκίζουμε με σταθερό επιτόκιο R σε κάθε περίοδο χωρίς να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε κεφάλαιο στις χρονικές περιόδους πού διαρκεί ο ανατοκισμός. Πολλές φορές όμως, είτε διότι αποταμιεύουμε κάποιο επιπλέον κεφάλαιο σε κάθε περίοδο, είτε γιατί καταναλώνουμε κάποιο ποσοστό του αρχικού μας κεφαλαίου σε κάθε περίοδο, το πρόβλημα της διαχρονικής εξέλιξης του κεφαλαίου μας καθίσται πιό σύνθετο. Στην παρούσα ενότητα θα υποθέσουμε ότι σε κάθε περίοδο είτε προσθέτουμε ένα *σταθερό* ποσό χρημάτων δ στο υφιστάμενο κεφάλαιο ($\delta > 0$) είτε αφαιρούμε ένα σταθερό ποσό χρημάτων δ από το υφιστάμενο κεφάλαιο ($\delta < 0$). Για παράδειγμα, την χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινάμε με αρχικό κεφάλαιο P_0 το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 1$ γίνεται

$$P_1 = (1 + R)P_0 + \delta.$$

Αν $\delta > 0$, τη χρονική στιγμή $t = 1$ το αντίστοιχο κεφάλαιο δεν θα έχει αυξηθεί μόνο κατά RP_0 αλλά και επιπλέον κατά δ. Αντίθετα, αν $\delta < 0$, το αντίστοιχο κεφάλαιο θα έχει αυξηθεί κατά RP_0 αλλά ταυτοχρόνως θα έχει μειωθεί κατά δ.

Από την παραπάνω προκαταρκτική συζήτηση καθίσται σαφές ότι η εξίσωση διαφορών πού περιγράφει τη διαχρονική συμπεριφορά του κεφαλαίου μας δεν είναι η ομογενής εξίσωση (ref: ret3n) αλλά η *πλήρης* εξίσωση (ref: ret3n_f). Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι η διαδικασία της λύση της (ref: ret3n_f) θα πρέπει να λάβει υπόψη της και τον σταθερό όρο δ. Ως προς τη λύση της πλήρους εξίσωσης (ref: ret3n_f) υπάρχει ένα γενικό θεώρημα το οποίο μας λέει ότι η *γενική λύση* της πλήρους εξίσωσης (ref: ret3n_f) μπορεί να εκφραστεί ως το *άθροισμα* της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς (δηλαδή της (ref: ret3n)) συν μια (οποιαδήποτε) *ειδική λύση* της πλήρους εξίσωσης (ref: ret3n_f).

Theorem

Η γενική λύση P_t της πλήρους εξίσωσης (ref: ret3n_f) δίνεται από το άθροισμα της γενικής λύσης, P_t^h της αντίστοιχης ομογενούς (ref: ret3n) καί μιάς οποιασδήποτε ειδικής λύσης $\overline{P}_t$ της (ref: ret3n_f), δηλαδή έχουμε ,

$$P_t = P_t^h + \overline{P}_t.$$

Ως προς τη γενική λύση της ομογενούς, αυτή την έχουμε ήδη. Η λύση (ref: solng) αποτελεί λύση της ομογενούς. Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε μια ειδική λύση της πλήρους εξίσωσης (ref: ret3n_f). Ως ειδική λύση θα θεωρήσουμε οποιαδήποτε συνάρτηση $g(t)$ του t η οποία επαληθεύει την (ref: ret3n_f). Αφού αυτό πού αναζητούμε είναι μιά οποιαδήποτε λύση της (ref: ret3n_f) έχει νόημα να δοκιμάσουμε αρχικά την πιό απλή συνάρτηση του t την οποία μπορούμε να σκεφτούμε. Αυτή είναι, προφανώς η σταθερή συνάρτηση, $g(t) = k,\ \forall t.$ Είναι όμως αυτή η σταθερή συνάρτηση λύση της (ref: ret3n_f)? Ας ελέγξουμε αν την επαληθεύει. Έχουμε λοιπόν

$$P_t = \varphi P_{t-1} + \delta \Rightarrow k = \varphi k + \delta \Rightarrow (1-\varphi)k = \delta$$

και άρα

$$k = \frac{\delta}{1-\varphi}$$

νοουμένου ότι $\varphi \neq 1.$ Κατά συνέπεια η συνάρτηση

$$g(t) = \frac{\delta}{1-\varphi}$$

επαληθεύει την (ref: ret3n_f) όταν $\varphi \neq 1$ και άρα αποτελεί μιά ειδική λύση της (ref: ret3n_f).

Επικαλούμενοι τέλος το παραπάνω θεώρημα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης διαφορών (ref: ret3n_f) για $\varphi \neq 1$ είναι η

$$P_t = C\varphi^t + \frac{\delta}{(1-\varphi)}. \qquad \#$$

Τί γίνεται στη περίπτωση κατά την οποία $\varphi = 1$? Στο πλαίσιο πού εξετάζουμε αυτό είναι ένα καθαρά θεωρητικό ερώτημα, αφού η περίπτωση $\varphi = 1$ αντιστοιχεί στη περίπτωση $R = 0,$ το οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι το κεφάλαιο δεν τοκίζεται. Γιά λόγους όμως πληρότητας των αποτελεσμάτων ας εξετάσουμε και αυτή τη περίπτωση. Το πρώτο πού παρατηρούμε είναι ότι για την περίπτωση $\varphi = 1,$ η δοκιμαστική συνάρτηση $g(t) = k$ δεν είναι η κατάλληλη. Αρα θα πρέπει να δοκιμάσουμε κάποια άλλη συνάρτηση τού $t.$ Ποιά είναι αυτή? Ας δοκιμάσουμε την αμέσως επόμενη "πιό σύνθετη" συνάρτηση από την σταθερή, πού δεν είναι άλλη από τη γραμμική.

$$g(t) = kt.$$

Ως συνήθως, γιά να είναι η συγκεκριμένη $g(t)$ μιά ειδική λύση της (ref: ret3n_f) θα πρέπει να την επαληθεύει. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} kt - \varphi k(t-1) &= \delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow k = \frac{\delta}{t + \varphi - \varphi t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow k = \frac{\delta}{t + 1 - t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow k = \delta. \end{aligned}$$

Άρα στη περίπτωση όπου $\varphi = 1$ μιά ειδική λύση της (ref: ret3n_f) είναι η

$$\overline{P}_t = \delta t.$$

Κατά συνέπεια, γιά $\varphi = 1,$ η γενική λύση της (ref: ret3n_f) είναι η (το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς συν την ειδική λύση),

$$P_t = C\varphi^t + \delta t = C1^t + \delta t = C + \delta t. \qquad \#$$

Συνοψίζοντας, η γενική λύση της (ref: ret3n_f) γιά όλες τις δυνατές τιμές της φ δίνεται από την παρακάτω οικογένεια συναρτήσεων

$$P_t = \begin{bmatrix} C\varphi^t + \frac{\delta}{(1-\varphi)} & \alpha\nu \quad \varphi \neq 1 \\ C + \delta t & \alpha\nu \quad \varphi = 1 \end{bmatrix}, t = 0, 1, 2, \ldots \qquad \#$$

όπου η C είναι μιά αυθαίρετη σταθερή.

Παρατηρήσεις

(i) Από την παραπάνω λύση καθίσταται σαφές ότι ο "υπεύθυνος" για την εκθετική συμπεριφορά του κεφαλαίου μας είναι το μη-μηδενικό επιτόκιο R το οποίο καθορίζει ότι η παράμετρος φ είναι διάφορη της μονάδος. Αν το επιτόκιο ήταν μηδέν, τότε $\varphi = 1$ και η διαχρονική συμπεριφορά του κεφαλαίου μας καθίσταται γραμμική και όχι εκθετική.

(ii) Όταν η συνάρτηση του χρόνου είναι γραμμική, όπως στη περίπτωση $\varphi = 1,$ τότε η ποσοστιαία μεταβολή μεταξύ δύο περιόδων γίνεται,

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{C + \delta t - C - \delta(t-1)}{C + \delta(t-1)} = \frac{\delta}{C + \delta t - \delta} \qquad \#$$

η οποία είναι φθίνουσα συνάρτηση του t. Άρα ενώ σε μιά εκθετική αύξηση των τιμών της P_t, η ποσοστιαία μεταβολή παραμένει σταθερή για οποιεσδήποτε τιμές του t όπως είδαμε στη σχέση (ref: exp_r), στη περίπτωση της γραμμικής αύξησης η ποσοστιαία μεταβολή μειώνεται όσο περνάει ο χρόνος.

Αρχική Συνθήκη και Συγκεκριμένη Λύση

Η παραπάνω οικογένεια συναρτήσεων μας δίνει την οικογένεια των λύσεων γιά την εξίσωση διαφορών (ref: ret3n_f) όταν δεν γνωρίζουμε κάτι γιά το "σημείο εκκίνησης" του φαινομένου, εν προκειμένω γιά το αρχικό μας κεφάλαιο P_0. Με άλλα λόγια η γενικότητα της λύσης (ref: sol2gg) έγκειται στο ότι γιά οποιοδήποτε αρχικό κεφάλαιο P_0 και αν έχουμε η διαχρονική του πορεία θα περιγράφεται από την (ref: sol2gg). Τώρα, αν γνωρίζουμε ποιό είναι το αρχικό μας κεφάλαιο (όπως π.χ. στο παράδειγμα μας $P_0 = 100$) τότε μπορούμε να αξιοποιήσουμε αυτή την πληροφορία και να πάρουμε μιά "συγκεκριμένη" λύση από την οικογένεια (ref: sol2gg), η οποία να αντιστοιχεί σε αυτό το συγκεκριμένο αρχικό κεφάλαιο. Η πληροφορία αυτή ονομάζεται *αρχική συνθήκη*. Ο τρόπος πού χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη προκειμένου να υπολογίσουμε την αντίστοιχη συγκεκριμένη λύση είναι ο εξής: Κατ'αρχήν το πρώτο πού κάνουμε είναι να εκφράσουμε την (ref: sol2gg) αποκλειστικά γιά τη χρονική στιγμή $t = 0$ καί στη συνέχεια, να λύσουμε ως προς C θεωρώντας την P_0 γνωστή. Η σχέση (ref: sol2gg) γιά $t = 0$, γίνεται

$$P_0 = \begin{bmatrix} C\varphi^0 + \frac{\delta}{(1-\varphi)} & \alpha\nu \quad \varphi \neq 1 \\ C + \delta \cdot 0 & \alpha\nu \quad \varphi = 1 \end{bmatrix}, \qquad \#$$

δηλαδή

$$xP_0 = \begin{bmatrix} C + \frac{\delta}{(1-\varphi)} & \alpha\nu \quad \varphi \neq 1 \\ C & \alpha\nu \quad \varphi = 1 \end{bmatrix}. \qquad \#$$

Λύνοντας ως προς την άγνωστη σταθερή C έχουμε

$$C = \begin{bmatrix} P_0 - \frac{\delta}{(1-\varphi)} & \alpha\nu \quad \varphi \neq 1 \\ P_0 & \alpha\nu \quad \varphi = 1 \end{bmatrix}. \qquad \#$$

Οι παραπάνω σχέσεις εκφράζουν τη σταθερή C ως συνάρτηση της γνωστής τιμής P_0. Αυτό μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε την C στη γενική λύση (ref: sol2gg) με την έκφραση της C από την (ref: const) καί να αποκτήσουμε την συγκεκριμένη λύση πού αντιστοιχεί στη δεδομένη P_0:

$$P_t = \begin{bmatrix} \left[P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi}\right]\varphi^t + \frac{\delta}{1-\varphi} & \alpha\nu \quad \varphi \neq 1 \\ P_0 + \delta t & \alpha\nu \quad \varphi = 1 \end{bmatrix}, t = 0, 1, 2, \ldots \qquad \#$$

Η μορφή της συγκεκριμένης λύσης (ref: def-sol) προέκυψε από (i) τη γενική λύση της πλήρους εξίσωσης και (ii) την αρχική συνθήκη P_0. Για $\varphi \neq 1$ η λύση είναι εκθετική συνάρτηση του χρόνου ενώ για $\varphi = 1$ η λύση είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου. Είναι ενδιαφέρον να τονίσουμε ότι αυτή η λύση ανακύπτει αν ακολουθήσουμε την επονομαζόμενη *μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων* (πού είδαμε σε προηγούμενη ενότητα) θεωρώντας ως αρχική συνθήκη την P_0.

Μέθοδος Διαδοχικών Αντικαταστάσεων

Ας δούμε τον τρόπο με τον οποίο θα επιλύσουμε την εξίσωση διαφορών (ref: ret3n_f) εφαρμόζοντας την μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων με αρχική συνθήκη (εν προκειμένω αρχικό κεφάλαιο) P_0. Την χρονική στιγμή $t = 1$, το κεφάλαιο μας θα είναι

$$P_1 = \varphi P_0 + \delta.$$

Με ανάλογο τρόπο την επόμενη χρονική στιγμή, $t = 2$, το κεφάλαιο μας P_2 θα γίνει

$$P_2 = \varphi P_1 + \delta = \varphi(\varphi P_0 + \delta) + \delta = \varphi^2 P_0 + \varphi\delta + \delta = \varphi^2 P_0 + \delta(1 + \varphi).$$

Αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή $t = 3$ θα έχουμε,

$$P_3 = \varphi P_2 + \delta = \varphi[\varphi^2 P_0 + \delta(1+\varphi)] + \delta = \varphi^3 P_0 + \delta(1+\varphi+\varphi^2).$$

Οι παραπάνω σχέσεις, πού προκύπτουν από *διαδοχικές αντικαταστάσεις*, φαίνονται να αναδεικνύουν την εξής σχέση για οποιαδήποτε χρονική περίοδο t,

$$P_t = \varphi^t P_0 + \delta(1+\varphi+\varphi^2 + \ldots + \varphi^{t-1}). \qquad \#$$

Τι είναι το άθροισμα $(1+\varphi+\varphi^2+\ldots+\varphi^{t-1})$? Αυτό είναι το άθροισμα t όρων μιάς γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το 1 καί κοινό λόγο φ. Γιά ένα τέτοιο άθροισμα, γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$1+\varphi+\varphi^2+\ldots+\varphi^{t-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1-\varphi^t}{1-\varphi} & \alpha\nu & \varphi \neq 1 \\ t & \alpha\nu & \varphi = 1 \end{array}\right]. \qquad \#$$

Αντικαθιστώντας την (ref: deq42) στην (ref: deq41) καταλήγουμε στη σχέση,

$$P_t = \left[\begin{array}{ccc} \varphi^t P_0 + \delta\frac{1-\varphi^t}{1-\varphi} & \alpha\nu & \varphi \neq 1 \\ P_0 + \delta t & \alpha\nu & \varphi = 1 \end{array}\right], t = 0,1,2,\ldots. \qquad \#$$

Είναι η συγκεκριμένη λύση (ref: sol1) πού προέκυψε με την μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων ίδια (ταυτίζεται) με την σχέση (ref: def-sol) πού προέκυψε από τον γενικό τρόπο επίλυσης της (ref: ret3n_f)? Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική. Πράγματι, συγκρίνοντας τις (ref: sol1) και (ref: def-sol) παρτηρούμε ότι οι δύο αυτές σχέσεις ταυτίζονται αν ο όρος

$$\left[P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi}\right]\varphi^t + \frac{\delta}{1-\varphi}$$

στην (ref: def-sol) είναι ίσος με τον όρο

$$\varphi^t P_0 + \delta\frac{1-\varphi^t}{1-\varphi}$$

στην (ref: sol1). Ξεκινώντας από τον τελευταίο όρο έχουμε,

$$\begin{aligned} \varphi^t P_0 + \delta\frac{1-\varphi^t}{1-\varphi} &= \varphi^t P_0 + \frac{\delta}{1-\varphi} - \frac{\delta}{1-\varphi}\varphi^t = \\ &= \left[P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi}\right]\varphi^t + \frac{\delta}{1-\varphi} \end{aligned}$$

και άρα δείξαμε την ισότητα των δύο όρων και την συνεπακόλουθη ταύτιση των δύο λύσεων.

Η Ασυμπτωτική Συμπεριφορά της Λύσης

Με τον όρο "ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης" εννοούμε το πώς συμπεριφέρεται η ακολουθία των τιμών της P_t όταν το t "τείνει" στο άπειρο. Στην συζήτηση πού θα ακολουθήσει θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην συγκεκριμένη λύση (ref: def-sol) προκειμένου στην ανάλυση να συμπεριλάβουμε και την επίδραση της αρχικής συνθήκης P_0. Θα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις (οι οποίες είναι οι πιό σχετικές για το βασικό οικονομικό πρόβλημα πού εξετάζουμε):

Περίπτωση Ι: **Θετικό Επιτόκιο**, $R > 0 \Rightarrow \varphi > 1$

Στη περίπτωση αυτή το επιτόκιο είναι θετικό και άρα ο συντελεστής φ στην εξίσωση διαφορών (ref: ret3n_f) είναι μεγαλύτερος της μονάδος. Αυτό αμέσως υποδεικνύει ότι ο όρος φ^t στην λύση (ref: def-sol) θα "τείνει" στο άπειρο (δηλαδή θα αποκλίνει) για $t \to \infty$. Αυτό όμως δεν είναι το τέλος της ανάλυσης. Αφού ο όρος φ^t είναι πολλαπλασιασμένος με τον όρο $(P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi})$, το γινόμενο

$$\left(P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi}\right)\varphi^t$$

θα "τείνει" στο $+\infty$ αν $(P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi}) > 0$ και στο $-\infty$ αν $(P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi}) < 0$. Ας δούμε δύο αριθμητικά παραδείγματα προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα την δυναμική συμπεριφορά της P_t σε κάθε περίπτωση.

(a) Έστω $R = 0.05$ (άρα $\varphi = 1.05$), $P_0 = 100$, $\delta = 6$. Σε αυτή τη περίπτωση ο συντελεστής $(P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi})$ του φ^t παίρνει την τιμη,

$$P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi} = 100 - \frac{6}{1-1.05} = 100 - \frac{6}{-0.05} = 100 + 120 = 220.$$

Είναι προφανές ότι σε αυτή τη περίπτωση η ακολουθία των τιμών της P_t "τείνει" στο $+\infty$. Αυτό είναι εύκολο να εξηγηθεί με οικονομικούς όρους ως εξής: Στο αρχικό μας κεφάλαιο των 100 ευρώ, ενεργούν δύο δυνάμεις σε κάθε περίοδο. Η πρώτη είναι ο ανατοκισμός με θετικό επιτόκιο και η δεύτερη είναι η προσθήκη του σταθερού ποσού των έξι ευρώ σε κάθε περίοδο. Και οι δύο αυτές δυνάμεις λειτουργούν προς την ίδια κατεύθυνση, της διαρκούς αύξησης του αρχικού μας κεφαλαίου.

(b) Έστω $R = 0.05$ (άρα $\varphi = 1.05$), $P_0 = 100$, $\delta = -6$. Σε αυτή τη περίπτωση ο συντελεστής $(P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi})$ του φ^t γίνεται

$$P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi} = 100 - \frac{-6}{1-1.05} = 100 - \frac{-6}{-0.05} = 100 - 120 = -20$$

Ας δούμε την συμπεριφορά της ακολουθίας των τιμών της P_t σε αυτή τη περίπτωση. Ο πρώτος όρος είναι

$$P_1 = \left[P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi}\right]\varphi^1 + \frac{\delta}{1-\varphi} = -20 \times 1.05 + \frac{-6}{1-1.05} = -21 + \frac{-6}{-0.05} = -21 + 120 = 99.$$

Ο δεύτερος όρος γίνεται,

$$P_2 = \left[P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi}\right]\varphi^2 + \frac{\delta}{1-\varphi} = -20 \times 1.05^2 + \frac{-6}{1-1.05} = -22.5 + \frac{-6}{-0.05} = -22.5 + 120 = 97$$

Ο ακόλουθος πίνακας περιέχει ενδεικτικά κάποιους από τους πενήντα πρώτους όρους της ακολουθία των τιμών της P_t :

$$\begin{bmatrix} t=1 & \varphi^1 = 1.05 & P_1 = 99 \\ t=2 & \varphi^2 = 1.102 & P_2 = 97.5 \\ t=3 & \varphi^3 = 1.157 & P_3 = 96.84 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t=34 & \varphi^{34} = 5.253 & P_{34} = 14.933 \\ t=35 & \varphi^{35} = 5.516 & P_{35} = 9.6796 \\ t=36 & \varphi^{36} = 5.792 & P_{36} = 4.1636 \\ t=37 & \varphi^{37} = 6.081 & P_{37} = -1.6281 \\ t=38 & \varphi^{38} = 6.385 & P_{38} = -7.7095 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t=50 & \varphi^{50} = 11.467 & P_{50} = -109.348 \end{bmatrix}$$

Αυτό πού παρατηρούμε είναι ότι στο αρχικό μας κεφάλαιο ενεργούν δύο δυνάμεις. Η μία είναι η αυξητική δύναμη του ανατοκισμού και η άλλη είναι η αρνητική δύναμη της αφαίρεσης 6 ευρώ σε κάθε περίοδο. Γιά παράδειγμα, στη πρώτη περίοδο το αρχικό μας κεφάλαιο αυξήθηκε κατά 5 ευρώ λόγω του επιτοκίου και ταυτόχρονα μειώθηκε κατά 6 ευρώ λόγω της αφαίρεσης των 6 ευρώ πού διενεργήσαμε. Άρα το κεφάλαιο με το οποίο μπαίνουμε στη δεύτερη περίοδο δεν είναι 100 ευρώ αλλά 99 ευρώ. Επί του νέου αυτού κεφαλαίου αρχίζει ξανά η όλη διαδικασία. Επειδή το επιτόκιο δεν είναι αρκετό να αντισταθμίσει την αφαίρεση κεφαλαίου που διενεργείται σε κάθε περίοδο τελικά το κεφάλαιο μας θα μειωθεί, εντός 36-37 περιόδων θα φτάσει στο μηδέν, και αν η διαδικασία συνεχιστεί το κεφάλαιο θα γίνει αρνητικό (υπό την έννοια τού ότι πλέον δεν θα δανείζουμε αλλά θα δανειζόμαστε πληρώνοντας επιτόκιο R). Σε αυτή τη περίπτωση το αρχικό μας κεφάλαιο "τείνει" στο $-\infty$.

Από τα παραπάνω καθίσταται σαφές ότι αν το επιτόκιο δεν ήταν 5% αλλά 7% (ή έστω και 6.01% - αρκεί να ήταν μεγαλύτερο από το ποσό των 6 ευρώ πού αφαιρούμε κάθε περίοδο) τότε η δυναμική συμπεριφορά του κεφαλαίου μας θα ήταν ανάλογη με την περίπτωση (a). Πράγματι με $R = 0.07$, ο συντελεστής $(P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi})$ γίνεται

$$P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi} = 100 - \frac{-6}{1-1.07} = 100 - \frac{-6}{-0.07} = 100 - 85.71 = 14.29 > 0$$

και άρα είναι θετικός οπότε και το πρόβλημα (παρότι το δ είναι αρνητικό) εντάσσεται στην περίπτωση (a).

Από τα παραπάνω παραδείγματα γίνεται σαφές ότι το αν το όριο της ακολουθίας των τιμών της P_t είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$ εξαρτάται από τις τιμές των τριών παραμέτρων P_0, δ και φ και συγκεκριμένα από το αν ο όρος $(P_0 - \frac{\delta}{1-\varphi})$ είναι θετικός ή αρνητικός.

Περίπτωση ΙΙ: **Αρνητικό Επιτόκιο**, $-1 < R < 0 \Rightarrow 0 < \varphi < 1$

Στη περίπτωση αυτή το επιτόκιο είναι αρνητικό και παίρνει τιμές μεταξύ του -1 και του μηδενός. Όπως είπαμε η περίπτωση του αρνητικού επιτοκίου μπορεί να προκύψει στη πράξη σε ένα καθεστώς εξαιρετικά χαμηλών επιτοκίων στο οποίο η Κεντρική Τράπεζα της χώρας (ή της νομισματικής ένωσης) θέτει το παρεμβατικό επιτόκιο σε αρνητικά επίπεδα. Ως αποτέλεσμα αυτής της νομισματικής πολιτικής είναι δυνατόν οι εμπορικές τράπεζες να χρεώνουν αρνητικό επιτόκιο στις καταθέσεις. Μιά άλλη περίπτωση αρνητικού επιτοκίου είναι όταν μιλάμε όχι για ονομαστικό αλλά για πραγματικό επιτόκιο. Με άλλα λόγια αν αυτό πού μας ενδιαφέρει δεν είναι η ονομαστική πορεία του κεφαλαίου μας στο χρόνο αλλά η πραγματική του πορεία, δηλαδή η ονομαστική πορεία διορθωμένη για τον πληθωρισμό. Σε αυτή τη περίπτωση το R θεωρούμε ότι είναι το πραγματικό επιτόκιο, το οποίο δίνεται ως η διαφορά μεταξύ του ονομαστικού επιτοκίου i και του πληθωρισμού π. Αν ο πληθωρισμός είναι μεγαλύτερος του ονομαστικού επιτοκίου τότε το πραγματικό επιτόκιο R είναι αρνητικό, το οποίο μας φέρνει στο πλαίσιο της υπο-εξέταση περίπτωσης.

Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty}\varphi^t = 0. \qquad \#$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{t\to\infty}P_t = \frac{\delta}{1-\varphi} \equiv P^*. \qquad \#$$

Δηλαδή, γιά φ αρνητικό και κατ'απόλυτη τιμή μικρότερο της μονάδας το όριο της ακολουθίας των τιμών της P_t είναι το $\frac{\delta}{1-\varphi}$.

Παρατηρήσεις.

(i) Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι οι τιμές της P_t συγκλίνουν στην P με μονοτονικό τρόπο. Επιπλέον, αυτή η σύγκλιση λαμβάνει χώρα για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη P_0.

(ii) Αφού η ακολουθία των τιμών $\{P_t\}$ είναι μονότονη, αυτό σημαίνει ότι θα είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αν η αρχική συνθήκη P_0 είναι μικρότερη του ορίου P^* τότε η $\{P_t\}$ είναι αύξουσα. Αντίθετα, αν η P_0 είναι μεγαλύτερη του P^* τότε η ακολουθία $\{P_t\}$ είναι φθίνουσα.

(iii) Η οριακή τιμή P^* του κεφαλαίου μας θα είναι είτε θετική αν $\delta > 0$ και αρνητική αν $\delta < 0$. Αυτό σημαίνει ότι πόσο τελικά κεφάλαιο θα έχουμε στο όριο εξαρτάται από το αν προσθέτουμε νέο κεφάλαιο σε κάθε περίοδο ($\delta > 0$) ή αφαιρούμε κεφάλαιο σε κάθε περίοδο ($\delta < 0$).

(iv) Επιπρόσθετα, η οριακή τιμή P^* του κεφαλαίου μας εξαρτάται από την παράμετρο φ η οποία με τη σειρά της καθορίζεται από το επιτόκιο R. Όσο πλησιέστερα είναι το R στο μηδέν (δηλαδή όσο "λιγώτερο αρνητικό" είναι) τόσο πλησιέστερα είναι το φ στη μονάδα, και τόσο μικρότερος είναι ο παρανομαστής $\frac{\delta}{1-\varphi}$ του P^*. Αυτό τελικά σημαίνει ότι όσο μικρότερο κατ'απόλυτη τιμή είναι το αρνητικό επιτόκιο τόσο μεγαλύτερο θα είναι το τελικό μας κεφάλαιο.

Περίπτωση III: **Μηδενικό Επιτόκιο**, $R = 0 \Rightarrow \varphi = 1$

Όταν η τιμή της παραμέτρου φ ισούται με τη μονάδα, τότε η ακολουθία των τιμών της P_t πού ικανοποιεί την πλήρη εξίσωση διαφορών (ref: ret3n_f) δίνεται από τη σχέση $P_t = P_0 + \delta t$ όπως υποδηλώνει η λύση (ref: def-sol). Παρατηρούμε ότι στη γενική περίπτωση, όπου $\delta \neq 0$, η ακολουθία $\{P_t\}$ αποκλίνει. Πιό συγκεκριμένα,

$$\lim_{t\to\infty} P_t = \begin{bmatrix} \infty & \alpha\nu & \delta > 0 \\ -\infty & \alpha\nu & \delta < 0 \end{bmatrix}.$$

Το συμπέρασμα αυτό είναι διαισθητικά προφανές. Αν το κεφάλαιο μας δεν τοκίζεται αλλά κάθε χρόνο προσθέτουμε ένα σταθερό ποσό δ το συνολικό κεφάλαιο πού συσσωρεύεται θα αυξάνεται σταθερά με το χρόνο. Στην αντίθετη περίπτωση όπου καταναλώνουμε σε κάθε t ένα σταθερό ποσό δ το κεφάλαιο θα τείνει να μειώνεται χωρίς όριο.

Συνεχής Ανατοκισμός. Συνεχής Χρόνος

Σε όλη την προηγούμενη ενότητα υποθέσαμε ότι ο χρόνος είναι διακριτός. Αυτό σημαίνει ότι η χρονική μεταβλητή t παίρνει τιμές στο σύνολο των ακεραίων (ή των θετικών ακεραίων). Η υπόθεση του διακριτού χρόνου συνεπάγεται ότι ο ανατοκισμός είναι περιοδικός υπό την έννοια ότι λαμβάνει χώρα μεταξύ διακριτών χρονικών περιόδων. Τι γίνεται όμως στη περίπτωση κατά την οποία ο ανατοκισμός είναι συνεχής? Για να φανταστούμε την έννοια του συνεχούς ανατοκισμού είναι χρήσιμο να σκεφτούμε την όλη διαδικασία ως το όριο του περιοδικού ανατοκισμού όταν το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών ανατοκισμών γίνεται ολοένα και μικρότερο, τείνοντας στο μηδέν. Ας ξεκινήσουμε περιγράφοντας το περιβάλλον πού θα κινηθούμε. Έστω και πάλι ο χρόνος να είναι διακριτός και η διαφορά μεταξύ δύο γειτονικών χρονικών περιόδων να είναι,

$$Dt = t - (t-1) = 1. \qquad \#$$

Σε αυτή τη μονάδα του χρόνου (π.χ. το έτος) το επιτόκιο είναι R (π.χ. 6% ανά έτος). Στη συνέχεια, ας επιχειρήσουμε να μοιράσουμε την μία αυτή χρονική μονάδα (το έτος) σε n τον αριθμό μικρότερες μονάδες μεγέθους Δt. Για παράδειγμα αν μοιράσουμε το έτος σε μήνες τότε $n = 12$ και $\Delta t =$ μήνας. Αυτό σημαίνει ότι,

$$Dt = n\Delta t$$

ή ισοδύναμα

$$1 = n\Delta t.$$

Παρατήρηση.

Ο λόγος πού χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό Dt γιά να περιγράψουμε τη διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών περιόδων στην (ref: tim1) αντί του συνήθους Δt είναι γιατί χρειαζόμαστε τον συμβολισμό Δt προκειμένου να περιγράψουμε το μέγεθος του "μικρού" χρονικού διαστήματος εντός της (μεγάλης) χρονικής περιόδου Dt.

Έστω ότι στην αρχή μιάς περιόδου t (π.χ. Ιανουάριος 2000) το κεφάλαιο μας είναι $P(t)$. Το ερώτημα είναι πόσο θα είναι το κεφάλαιο μας στο τέλος της περιόδου $t + \Delta t$ (π.χ. στο τέλος Ιανουαρίου 2000). Μας ενδιαφέρει με άλλα λόγια η τιμή της $P(t + \Delta t)$. Η τιμή αυτή θα είναι η $P(t)$ (με την οποία ξεκινήσαμε) συν ο τόκος πού αποκτήσαμε στο διάστημα Δt. Ποιός είναι αυτός ο τόκος? Έχουμε υποθέσει ότι το επιτόκιο είναι R ανά Dt ή R ανά έτος. Αυτό σημαίνει ότι στον πρώτο μήνα δεν θα έχουμε κερδίσει $RP(t)$ (αυτό θα είναι ο τόκος στο τέλος του έτους) αλλά $R\Delta tP(t)$.

Πράγματι, το γινόμενο $R\Delta t$ εκφράζει τον τόκο πού θα προστεθεί στο κεφάλαιο μας λόγω του χρόνου Δt (π.χ. μήνας) για τον οποίο το κεφάλαιο μας τοκίζεται. Επιπλέον ισχύει,

$$R\Delta t = R\frac{1}{n}.$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 6% ή 0.06 τότε το μηνιαίο επιτόκιο θα είναι 0.06/12. Άρα έχουμε καταλήξει στη σχέση

$$P(t+\Delta t) = P(t) + R\Delta t P(t).$$

Αν επιπλέον στη μονάδα του χρόνου Dt προσθέτουμε ή καταναλώνουμε ποσό δ (π.χ δ ευρώ ανά έτος) τότε στη μονάδα του χρόνου Δt θα έχουμε προσθέσει ή καταναλώσει ποσό $\delta\Delta t$. Για παράδειγμα, αν Δt είναι ο μήνας, τότε στο τέλος του μήνα θα έχουμε προσθέσει ή καταναλώσει ποσό $\delta/12$. Με αυτή την υπόθεση το συνολικό ποσό του κεφαλαίου μας τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ θα είναι

$$P(t+\Delta t) = P(t) + R\Delta t P(t) + \delta\Delta t.$$

Μεταφέροντας τον όρο $P(t)$ στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης έχουμε,

$$P(t+\Delta t) - P(t) = R\Delta t P(t) + \delta\Delta t.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με Δt έχουμε

$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = RP(t) + \delta.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $\Delta t \to 0$ (δηλαδή θεωρώντας ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών ανατοκισμών μειώνεται συνεχώς),

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = RP(t) + \delta.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι το όριο στο αριστερό μέλος της τελευταίας εξίσωσης δεν είναι άλλο παρά η παράγωγος, $\frac{dP}{dt}$ της $P(t)$ ως προς t. Κατά συνέπεια καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση,

$$\frac{dP}{dt} = RP(t) + \delta. \qquad \#$$

Ας φέρουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση στην λεγόμενη τυπική της μορφή, η οποία είναι η ακόλουθη

$$\frac{dP}{dt} - RP(t) = \delta. \qquad \#$$

Παρατηρήσεις.

(i) Η εξίσωση (ref: lin-difal) ονομάζεται γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερό συντελεστή (τον R) και σταθερό όρο (τον δ). Αυτή η εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως το ισοδύναμο σε συνεχή χρόνο της εξίσωσης διαφορών (ref: ret3n_f) σε διακριτό χρόνο. Μιά διαφορά μεταξύ των (ref: lin-difal) και (ref: ret3n_f) είναι ότι στην πρώτη ο σταθερός συντελεστής είναι το επιτόκιο R ενώ στη δεύτερη ο σταθερός συντελεστής είναι το $\varphi = 1 + R$.

(ii) Στη γενική περίπτωση όπου $\delta \neq 0$, η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση ονομάζεται *πλήρης*. Αν $\delta = 0$ τότε η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση ονομάζεται *ομογενής*.

Γενική Λύση της Διαφορικής Εξίσωσης

Τι εννοούμε λέγοντας "λύση της διαφορικής εξίσωσης (ref: lin-difal)"? Ας θυμηθούμε ότι στη περίπτωση της αντίστοιχης εξίσωσης διαφορών (ref: ret3n_f), η κάθε λύση της ήταν μιά ακολουθία $\{P_t\}$, δηλαδή μιά συνάρτηση με πεδίο ορισμού τούς μη-αρνητικούς ακεραίους η οποία ικανοποιούσε την εξίσωση διαφορών. Αυτό πού έχει αλλάξει στο παρόν πλαίσιο είναι ότι τώρα το πεδίο ορισμού της $P(t)$ δεν είναι οι ακέραιοι αλλά οι πραγματικοί (ή κάποιο υποσύνολο τους). Αυτό σημαίνει ότι η γενική λύση της (ref: lin-difal) θα είναι μιά οικογένεια συναρτήσεων πού ορίζονται στους πραγματικούς και όλες ικανοποιούν την (ref: lin-difal). Είναι προφανές ότι αφού έχουμε ήδη υποθέσει ότι η παράγωγος $\frac{dP}{dt}$ υπάρχει, όλες η συναρτήσεις $P(t)$ πού ανήκουν στην οικογένεια της λύσης είναι παραγωγίσιμες.

Η γενική μέθοδος επίλυσης της (ref: lin-difal) θα πρέπει να οδηγεί στην εύρεση **όλων** εκείνων των συναρτήσεων $P(t)$ πού ικανοποιούν την (ref: lin-difal). Κατ'αναλογία με τη μέθοδο επίλυσης της αντίστοιχης εξίσωσης διαφορών, η γενική λύση της (ref: lin-difal) δίνεται από το άθροισμα της γενικής λύσης, $P^h(t)$, της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dP}{dt} - RP(t) = 0 \qquad \#$$

καί μιάς οποιασδήποτε ειδικής λύσης, $\overline{P}(t)$, της πλήρους εξίσωσης (ref: lin-difal).

Η Γενική Λύση της Ομογενούς

Ας επιχειρήσουμε την λύση της ομογενούς. τελεταία μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = R$$

όπου ο όρος P δεν είναι άλλος από τον $P(t)$ σε σημειογραφική οικονομία. Ολοκληρώνοντας καί τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\int \frac{1}{P}\frac{dP}{dt}dt = \int Rdt$$

ή

$$\int \frac{1}{P}dP = \int Rdt. \qquad \#$$

Ας εξετάσουμε τα δύο ολοκληρώματα πού εμφανίζονται στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης χωριστά. Πρώτα το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος. Από τούς κανόνες ολοκλήρωσης γνωρίζουμε ότι

$$\int \frac{1}{P}dP = \ln|P| + c_1,$$

όπου c_1 είναι η σταθερή ολοκλήρωσης. (εάν η P παίρνει καί θετικές καί αρνητικές τιμές). Για το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (ref: int1) γνωρίζουμε ότι

$$\int Rdt = Rt + c_2$$

όπου c_2 είναι η σταθερή ολοκλήρωσης. Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις στην (ref: int1) έχουμε,

$$\ln|P| + c_1 = Rt + c_2, \qquad \#$$

ή

$$\ln|P| = Rt + c \qquad \#$$

με $c = c_2 - c_1$. Η λύση της (ref: int2) ως προς την άγνωστη συνάρτηση $P = P(t)$, θα δοθεί παίρνοντας τον αντι-λογάριθμο της $\ln|P|$. Παίρνοντας το $e^{()}$ και στα δύο μέλη της (ref: int2) έχουμε,

$$P(t) = \pm e^{Rt+c} = \pm e^{Rt}e^{c}$$

Θέτοντας $C = \pm e^{c}$, καταλήγουμε ότι η λύση, $P^h(t)$, της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (ref: homo-difal) είναι,

$$P^h(t) = Ce^{Rt}. \qquad \#$$

Παρατήρηση.

Είναι χρήσιμο να συγκρίνουμε τη λύση (ref: homo-sol) της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με την λύση (ref: solng) της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης διαφορών πού αναλύσαμε στη προηγούμενη ενότητα. Κατ'αρχήν και οι δύο λύσεις είναι εκθετικές συναρτήσεις του χρόνου t. Στην περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης, ο συντελεστής R (δηλαδή το ετήσιο επιτόκιο) πολλαπλασιασμένος επί t εμφανίζεται ως εκθέτης τού αριθμού e. Αντίθετα, στη περίπτωση της εξίσωσης διαφορών, ο αντίστοιχος συντελεστής $\varphi = 1 + R$ εμφανίζεται υψομένος στη δύναμη t.

Μιά Ειδική Λύση.

Στη συνέχεια, οδεύοντας προς τη γενική λύση της πλήρους διαφορικής εξίσωσης (ref: lin-difal) θα πρέπει να βρούμε μιά ειδική λύση της (ref: lin-difal). Αυτό πού χρειαζόμαστε είναι μιά οποιαδήποτε συνάρτηση τού t πού να ικανοποιεί την (ref: lin-difal). Ας δοκιμάσουμε την σταθερή συνάρτηση, $\overline{P}(t) = k$. Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε ότι $\frac{dP}{dt} = 0$. Αντικαθιστώντας στην(ref: lin-difal),

$$0 - Rk = \delta$$

απ'όπου προκύπτει ότι

$$k = -\frac{\delta}{R}$$

Άρα έχουμε βρεί μιά ειδική λύση της (ref: lin-difal2) την

$$\overline{P}(t) = \overline{P} = -\frac{\delta}{R}, \qquad \#$$

νοουμένου ότι $R \neq 0$.

Γιά την περίπτωση $R = 0$, η δοκιμαστική συνάρτηση $\overline{P}(t) = k$ δεν μας δίνει μιά ειδική λύση της (ref: lin-difal). Αρα, κατ'αναλογία με την περίπτωση $\varphi = 1$ στην αντίστοιχη εξίσωση διαφορών, θα δοκιμάσουμε μιά μη σταθερή συνάρτηση τού t, συγκεκριμένα την

$$\overline{P}(t) = kt.$$

Όπως πάντα, εάν αυτή η συνάρτηση είναι μιά ειδική λύση της (ref: lin-difal), θα πρέπει να την επαληθεύει. Με δεδομένο ότι σε αυτή τη περίπτωση $\frac{dP}{dt} = k,$ καί $R = 0,$ η διαφορική εξίσωση (ref: lin-difal) γίνεται

$$k = \delta.$$

Άρα στη περίπτωση όπου $R = 0$ μιά ειδική λύση της (ref: lin-difal) είναι η

$$\overline{P}(t) = \delta t, \qquad \#$$

Η Γενική Λύση της Πλήρους Διαφορικής Εξίσωσης

Είμαστε πλέον έτοιμοι να υπολογίσουμε την γενική λύση της πλήρους διαφορικής εξίσωσης (ref: lin-difal). Το γενικό θεώρημα πού μας λέει ότι η γενική λύση της πλήρους δίνεται από το άθροισμα της γενικής λύσης (ref: homo-sol) της ομογενούς και μιάς (οποιασδήποτε) ειδικής λύσης εν προκειμένω της (ref: part-difal) γιά $R \neq 0$ και (ref: part_difal2) γιά $R = 0,$ εφαρμόζεται και στη περίπτωση πού αναλύουμε. Κατά συνέπεια η γενική λύση της πλήρους εξίσωσης ορίζεται ως

$$P(t) = P^h(t) + \overline{P}(t)$$

και με βάση τις $P^h(t)$ και $\overline{P}(t)$ πού υπολογίσαμε παραπάνω, η γενική λύση της (ref: lin-difal) δίνεται από την παρακάτω οικογένεια συναρτήσεων

$$P(t) = \left[\begin{array}{cc} Ce^{Rt} - \frac{\delta}{R} & \alpha\nu \quad R \neq 0 \\ C + \delta t & \alpha\nu \quad R = 0 \end{array} \right] \qquad \#$$

όπου η C είναι μιά αυθαίρετη σταθερή.

Αρχική Συνθήκη καί Συγκεκριμένη Λύση

Η γενική λύση (ref: sol2gg-difal) της (ref: lin-difal) ορίζει μιά οικογένεια συναρτήσεων τού $t,$ όπου κάθε μέλος αυτής της οικογένειας είναι μιά συγκεκριμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης καί αντιστοιχεί σε μιά δεδομένη τιμή της σταθερής C. Αν μας δοθεί επιπλέον πληροφορία τότε μπορούμε να ξεχωρίσουμε ένα συγκεκριμένο μέλος αυτής της οικογένειας ως συγκεκριμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης. Αυτή η πληροφορία συνήθως παίρνει την μορφή μιάς αρχικής συνθήκης, δηλαδή της τιμής $P(0)$ στη χρονική στιγμή $t = 0.$ Συγκεκριμένα, γιά $t = 0,$ η σχέση (ref: sol2gg-difal) γίνεται

$$P(0) = \left[\begin{array}{cc} C - \frac{\delta}{R} & \alpha\nu \quad R \neq 0 \\ C & \alpha\nu \quad R = 0 \end{array} \right], \qquad \#$$

Λύνοντας ως προς την άγνωστη σταθερή C έχουμε

$$C = \left[\begin{array}{cc} P(0) + \frac{\delta}{R} & \alpha\nu \quad R \neq 0 \\ P(0) & \alpha\nu \quad R = 0 \end{array} \right]. \qquad \#$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στη γενική λύση (ref: sol2gg-difal) την C από τη σχέση (ref: const-difal) παίρνουμε τη συγκεκριμένη λύση πού αντιστοιχεί στη δεδομένη αρχική συνθήκη:

$$P(t) = \left[\begin{array}{cc} [P(0) + \frac{\delta}{R}]e^{Rt} - \frac{\delta}{R} & \alpha\nu \quad R \neq 0 \\ P(0) + \delta t & \alpha\nu \quad R = 0 \end{array} \right]. \qquad \#$$

Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε την λύση (ref: def-sol-difal) της διαφορικής εξίσωσης (ref: lin-difal) με την αντίστοιχη λύση (ref: def-sol) της εξίσωσης διαφορών (ref: ret3n_f). Συγκεκριμένα, το ερώτημα πού θα θέσουμε είναι το εξής: Έστω ότι το ετήσιο επιτόκιο είναι θετικό, π.χ. $R = 0.05$, ο σταθερός όρος δ είναι επίσης θετικός, π.χ. $\delta = 6$ και το αρχικό μας κεφάλαιο είναι $P_0 = 100$. Με ποιά διαδικασία ανατοκισμού, τον περιοδικό ή τον συνεχή, το κεφάλαιο μας θα αυξάνεται ταχύτερα? Ο επόμενος πίνακας δείχνει την εξέλιξη του αρχικού μας κεφαλαίου $P(t)$ και P_t γιά την περίπτωση του συνεχούς και περιοδικού ανατοκισμού αντίστοιχα με βάση τις εξισώσεις (ref: def-sol-difal) και (ref: def-sol) αντίστοιχα.

$P_0 = 100, R = 0.05, \delta = 6$		
t	$P(t)$	P_t
1	111.2796	111.0000
2	123.1376	122.5500
3	135.6035	134.6775
4	148.7086	147.4114
5	162.4856	160.7819
6	176.9689	174.8210
7	192.1949	189.5621
8	208.2014	205.0402
9	225.0287	221.2922
10	242.7187	238.3568

Παρατηρούμε ότι ήδη από την πρώτη περίοδο ο συνεχής ανατοκισμός αυξάνει το κεφάλαιο μας περισσότερο από ότι ο αντίστοιχος περιοδικός ανατοκισμός. Η διαφορά στην αύξηση του κεφαλαίου μας μεταξύ των δύο τύπων ανατοκισμού αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου. Για παράδειγμα, στον δέκατο χρόνο ο συνεχής ανατοκισμός να μας έχει αυξήσει το κεφάλαιο μας κατά 4.36 ευρώ περισσότερο από τον περιοδικό ανατοκισμό.

Ο Συνεχής Ανατοκισμός ως το Όριο του Περιοδικού Ανατοκισμού

Στη παρούσα ενότητα θα δούμε πώς μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση (ref: def-sol-difal) ακολουθώντας μιά διαφορετική πλην όμως ισοδύναμη διαδικασία. Συγκεκριμένα, θα αναλύσουμε το πώς ο συνεχής ανατοκισμός μπορεί να προκύψει ως το όριο του περιοδικού ανατοκισμού όταν οι περίοδοι στον τελευταίο τείνουν στο άπειρο. Για απλούστευση της ανάλυσης θα υποθέσουμε ότι $\delta = 0$, δηλαδή δεν προσθέτουμε ούτε αφαιρούμε κεφάλαιο σε κάθε περίοδο.

Έστω λοιπόν ότι το αρχικό μας κεφάλαιο είναι P_0. Έστω επίσης ότι το ετήσιο επιτόκιο είναι R. Η βασική μας χρονική μονάδα (π.χ το έτος) χωρίζεται σε n μικρότερες χρονικές μονάδες (π.χ. δώδεκα μήνες). Σε κάθε μία από αυτές τις μικρότερες χρονικές μονάδες το αρχικό μας κεφάλαιο ανατοκίζεται. Αυτό σημαίνει ότι την χρονική στιγμή t το κεφάλαιο μας θα έχει ανατοκιστεί nt φορές. Το επιτόκιο ανατοκισμού όμως ανά μήνα δεν θα είναι R αλλά R/n. Με βάση τα παραπάνω το κεφάλαιο μας P_t τη χρονική στιγμή t θα είναι

$$P_t = P_0\left(1 + \frac{R}{n}\right)^{nt}. \qquad \#$$

Τι θα συμβεί στην παραπάνω έκφραση όταν επιτρέψουμε στο n να τείνει στο άπειρο? Κατ'αρχήν όταν $n \to \infty$ μεταβαίνουμε από διακριτά χρονικά διαστήματα ανατοκισμού σε ανατοκισμό σε συνεχή χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να αλλάξουμε τη σημειογραφία από P_t σε $P(t)$. Έχουμε λοιπόν,

$$\lim_{n\to\infty} P_t = P(t) = \lim_{n\to\infty}\left[P_0\left(1 + \frac{R}{n}\right)^{nt}\right].$$

Βγάζοντας την σταθερή ποσότητα P_0 εκτός τού ορίου έχουμε,

$$P(t) = P_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{R}{n}\right)^{nt}\right]. \qquad \#$$

Στη συνέχεια, ας ορίσουμε την μεταβλητή z να είναι

$$z \equiv \frac{1}{\frac{R}{n}} = \frac{n}{R}.$$

Σε όρους της νέας μεταβλητής z, η (ref: cc1) γίνεται,

$$P(t) = P_0 \lim_{z\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{zRt}\right].$$

Χρησιμοποιώντας γνωστή ιδιότητα των ορίων, η τελευταία έκφραση γίνεται,

$$P(t) = P_0\left[\lim_{z\to\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{Rt}. \qquad \#$$

Τώρα πρέπει να εστιάσουμε την προσοχή μας στο όριο εντός της αγγύλης. Είναι γνωστό ότι το συγκεκριμένο όριο είναι η βάση $e \approx 2.71828$ των φυσικών λογαρίθμων. Δηλαδή,

$$\lim_{z\to\infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z} = e. \qquad \#$$

Αντικαθιστώντας την (ref: cc3) στην (ref: cc2) καταλήγουμε στη σχέση,

$$P(t) = P_0 e^{Rt}. \qquad \#$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (ref: cc4) ταυτίζεται με την λύση (ref: def-sol-difal) γιά $R \neq 0$ και $\delta = 0$.

Η Έννοια της Παρούσας Αξίας

Στην παρούσα ενότητα θα συζητήσουμε μιά πολύ σημαντική έννοια της

Χρηματοοικονομικής, η οποία εμπλέκεται συχνά όταν κάποιος αξιολογεί εναλλακτικά επενδυτικά σχέδια. Η έννοια αυτή είναι η "παρούσα αξία". Τι είναι η παρούσα αξία? Ας υποθέσουμε ότι σε ένα χρόνο από σήμερα πρόκειται να λάβουμε το ποσό των εκατό ευρώ. Αυτό το ποσό είναι μελλοντικό αφού πρόκειται να το λάβουμε σε ένα χρόνο από σήμερα. Ποιό ποσό σήμερα είναι το ισοδύναμο των εκατό ευρώ σε ένα χρόνο από σήμερα? Μήπως είναι επίσης εκατό ευρώ? Η απάντηση είναι αρνητική. Αν είχαμε εκατό ευρώ σήμερα, σε ένα χρόνο από σήμερα τα εκατό ευρώ θα αξιζαν εκατό συν τον τόκο πού θα μας απέφεραν. Κατά συνέπεια τα εκατό ευρώ ένα χρόνο από σήμερα αξίζουν σήμερα λιγότερο από εκατό ευρώ. Ποιό είναι το ακριβές ποσό πού τα εκατό ευρώ ένα χρόνο από σήμερα αξίζουν σήμερα? Αυτό το ακριβές ποσό εξαρτάται από το επιτόκιο.

Διακριτός Χρόνος

Αρχικά θα υιοθετήσουμε το αναλυτικό πλαίσιο του διακριτού χρόνου. Έστω λοιπόν P_1 να είναι το χρηματικό ποσό πού θα λάβουμε την χρονική περίοδο $t = 1$. Έστω επίσης το ετήσιο επιτόκιο να είναι R. Το ερώτημα είναι ποιά είναι η παρούσα αξία P_0, την χρονική στιγμή $t = 0$, τού ποσού P_1? Ανατρέχοντας στη σχέση (ref: def-sol) με $\delta = 0$ και $\varphi \neq 1$ έχουμε

$$P_1 = P_0\varphi^1$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι

$$P_0 = \frac{P_1}{\varphi} = \frac{P_1}{1+R}.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι η παρούσα αξία P_0 του μελλοντικού ποσού P_1 είναι το ποσό P_1 διαιρεμένο με τον συντελεστή $1 + R$. Από την σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το επιτόκιο τόσο μικρότερη θα είναι η παρούσα αξία P_0.

Με την ίδια λογική μπορούμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία ενός μελλοντικού ποσού, P_n, στην οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t = n$, $n \geq 1$. Και πάλι από την (ref: def-sol) με $\delta = 0$ και $\varphi \neq 1$ έχουμε

$$P_n = P_0\varphi^n$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι

$$P_0 = \frac{P_n}{\varphi^n} = \frac{P_n}{(1+R)^n}. \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Ο όρος $(1+R)^n$ στην (ref: pv1) ονομάζεται *συντελεστής προεξόφλησης*.

(ii) Ας θεωρήσουμε ένα πρακτικό παράδειγμα. Έστω ότι αναμένετε σε δύο χρόνια από σήμερα να κληρονομήσετε 100000 ευρώ. Ποιά είναι η παρούσα αξία αυτής της κληρονομιάς όταν το ετήσιο επιτόκιο είναι 2%? Τα δεδομένα του προβλήματος μεταφράζονται στους γενικούς όρους πού έχουμε εισάγει ως εξής: $n = 2$, $P_2 = 100000$, $R = 0.02$. Αυτό σημαίνει ότι

$$P_0 = \frac{P_2}{(1+R)^2} = \frac{100000}{(1+0.02)^2} = 96116.87$$

Ο συντελεστής προεξόφλησης γιά το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι

$$\frac{1}{(1+R)^2} = \frac{1}{(1+0.02)^2} = 0.961.$$

Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε την περίπτωση κατά την οποία το μελλοντικό ποσό δεν αναφέρεται μόνο σε μία μελλοντική χρονική περίοδο αλλά αντίθετα έχουμε πολλά μελλοντικά ποσά σε αντίστοιχες μελλοντικές χρονικές περιόδους. Με άλλα λόγια έχουμε μιά "χρηματοροή". Συγκεκριμένα, έστω ότι την παρούσα χρονική στιγμή $t = 0$ η χρηματοροή ξεκινά με ποσό P_0, την πρώτη μελλοντική στιγμή $t = 1$ το αντίστοιχο μελλοντικό ποσό είναι P_1, την μελλοντική στιγμή $t = 2$ το αντίστοιχο μελλοντικό ποσό είναι P_2, και ούτω κάθε εξής έως και την μελλοντική στιγμή $t = n$ στην οποία το αντίστοιχο μελλοντικό ποσό είναι P_n. Το ερώτημα είναι ποιά είναι η παρούσα αξία, PV, της ροής $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$?

Παρατήρηση

Στο σημείο αυτό μετακινούμαστε από την έννοια της παρούσας αξίας ενός μεμονωμένου χρηματικού ποσού σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον. στην έννοια της παρούσας αξίας μιάς ροής πολλών χρηματικών ποσών σε αντίστοιχες πολλές χρονικές στιγμές στο μέλλον.

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι ότι η PV δίνεται από το άθροισμα των προεξοφλημένων μελλοντικών ποσών των περιόδων $1, 2, \ldots, n$ συν το αρχικό ποσό P_0 :

$$PV = P_0 + \frac{P_1}{(1+R)^1} + \frac{P_2}{(1+R)^2} + \ldots + \frac{P_n}{(1+R)^n} = \sum_{t=0}^{n} \frac{P_t}{(1+R)^t}. \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Τα μελλοντικά ποσά $P_1, P_2, \ldots, P_n$ στην (ref: pv2) μπορούν να αναφέρονται είτε σε έσοδα, B_t, είτε σε κόστη, C_t. Κατά συνέπεια μπορούμε να έχουμε την παρούσα αξία, $PV(B)$, της ροής των μελλοντικών εσόδων να είναι (συμπεριλαμβανομένου και του εσόδου της αρχικής περιόδου $t = 0$)

$$PV(B) = B_0 + \frac{B_1}{(1+R)^1} + \frac{B_2}{(1+R)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(1+R)^n} = \sum_{t=0}^{n} \frac{B_t}{(1+R)^t}. \qquad \#$$

καθώς και την παρούσα αξία της ροής των μελλοντικών στοιχείων κόστους, $PV(C)$, να είναι

$$PV(C) = C_0 + \frac{C_1}{(1+R)^1} + \frac{C_2}{(1+R)^2} + \ldots + \frac{C_n}{(1+R)^n} = \sum_{t=0}^{n} \frac{C_t}{(1+R)^t}. \qquad \#$$

(ii) Η παραπάνω διάκριση μεταξύ εσόδων και κόστους μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια της *καθαρής παρούσας αξίας* (net present value). Η καθαρή παρούσα αξία, NPV_0, είναι το άθροισμα της παρούσας αξίας των εσόδων και της παρούσας αξίας των στοιχείων του κόστους, δηλαδή

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{B_t}{(1+R)^t} - \sum_{t=0}^{n} \frac{C_t}{(1+R)^t} = \sum_{t=0}^{n} \frac{(B_t - C_t)}{(1+R)^t}. \qquad \#$$

Η έννοια της καθαρής παρούσας αξίας χρησιμοποιείται κυρίως στην αξιολόγηση επενδυτικών σχεδίων. Επενδυτικά σχέδια για τα οποία η καθαρή παρούσα αξία είναι θετική, κρίνονται ως βιώσιμα.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι μιά επιχείρηση προσπαθεί να αποφασίσει αν θα αναλάβει ένα συγκεκριμένο επενδυτικό σχέδιο X. Το κόστος της επένδυσης θα επιμεριστεί ως εξής. Το αρχικό κόστος την χρονική στιγμή $t = 0$ θα είναι το μεγαλύτερο και ανέρχεται στο 1000000 ευρώ. Τον πρώτο χρόνο η επιχείρηση θα υποστεί επιπλέον κόστος 100000, τον δεύτερο χρόνο επίσης 100000 και τον τρίτο χρόνο 50000. Τα αντίστοιχα έσοδα είναι τα εξής. Την χρονική στιγμή $t = 0$ η επιχείρηση δεν θα έχει κανένα έσοδο. Την χρονική στιγμή $t = 1,$ το έσοδο θα είναι 120000 ευρώ, την $t = 2,$ το έσοδο θα είναι 500000 ευρώ, την χρονική στιγμή $t = 3$ θα είναι 600000 ευρώ και τέλος τις χρονικές στιγμές $t = 4$ και $t = 5,$ το έσοδο θα είναι 60000 ευρώ. Ποιά είναι η καθαρή παρούσα αξία της επένδυσης όταν το ετήσιο επιτόκιο για τα επόμενα πέντε χρόνια είναι σταθερό και ίσο με 3%? Τα δεδομένα του προβλήματος παρουσιάζονται συνοπτικά στον ακόλουθο πίνακα:

$$\begin{bmatrix} t & B_t & C_t \\ 0 & 0 & 1000000 \\ 1 & 120000 & 100000 \\ 2 & 500000 & 100000 \\ 3 & 600000 & 50000 \\ 4 & 60000 & 0 \\ 5 & 60000 & 0 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα στον τύπο (ref: npv1) έχουμε,

$$\begin{aligned} NPV &= \sum_{t=0}^{n} \frac{B_t}{(1+R)^t} - \sum_{t=0}^{n} \frac{C_t}{(1+R)^t} = \\ &= \sum_{t=0}^{5} \frac{B_t}{(1+0.03)^t} - \sum_{t=0}^{5} \frac{C_t}{(1+0.03)^t} = \\ &= 0 + \frac{120000}{(1+0.03)} + \frac{500000}{(1+0.03)^2} + \frac{600000}{(1+0.03)^3} + \frac{60000}{(1+0.03)^4} + \frac{60000}{(1+0.03)^5} - \\ &\quad - 1000000 - \frac{100000}{(1+0.03)} - \frac{100000}{(1+0.03)^2} - \frac{50000}{(1+0.03)^3}. \end{aligned}$$

Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε στο ότι

$$NPV = 1241954 - 1237104 = 4849.502.$$

Κατά συνέπεια το επενδυτικό σχέδιο X έχει θετική καθαρή παρούσα αξία και ίση με 4849.5 ευρώ.

Συνεχής Χρόνος

Στη συνέχεια θα αλλάξουμε το χρονικό πλαίσιο μέσα στο οποίο κινούμαστε από διακριτό σε συνεχές. Πιό συγκεκριμένα, η μεταβλητή *t* πλέον δεν θα παίρνει διακριτές τιμές αλλά τιμές εντός ενός υποδιαστήματος των πραγματικών αριθμών,

$t \in [0, T]$. Οι βασικές έννοιες πού διέπουν τον ορισμό της παρούσας αξίας παραμένουν αναλοίωτες και στο παρόν πλαίσιο του συνεχούς χρόνου. Αυτό πού αλλάζει είναι ο τρόπος με τον οποίο θα διενεργούμε την προεξόφληση των μελλοντικών ροών. Συγκεκριμένα, το πρώτο πράγμα πού πρέπει να κάνουμε είναι να θυμηθούμε τη σχέση (ref: def-sol-difal) (τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (ref: lin-difal)) η οποία γιά $\delta = 0$, και $R > 0$ γίνεται,

$$P(t) = P(0)e^{Rt}.$$

Από αυτή τη σχέση, η οποία συνδέει την τιμή του κεφαλαίου μας την χρονική στιγμή t (μελλοντική τιμή) με την τιμή του κεφαλαίου μας την χρονική στιγμή $t = 0$ (παρούσα τιμή), συνεπάγεται αμέσως ότι,

$$P(0) = \frac{1}{e^{Rt}}P(t) = P(t)e^{-Rt} \qquad \#$$

όπου R είναι το ετήσιο επιτόκιο. Το ερώτημα πού θα θέσουμε στη παρούσα ενότητα είναι το εξής: Ας υποθέσουμε ότι αντιμετωπίζουμε μιά "συνεχή χρηματοροή" για τα επόμενα T χρόνια η οποία "ρέει" με ρυθμό $P(t)$ ευρώ ανά έτος και επι της οποίας εφαρμόζεται συνεχής ανατοκισμός με ετήσιο επιτόκιο R. Ποιά είναι η παρούσα αξία αυτής της χρηματοροής?

Παρατήρηση

Ο όρος πού χρησιμοποιήσαμε παραπάνω σχετικά με την "συνεχή χρηματοροή πού ρέει με ρυθμό $P(t)$ ευρώ ανά έτος" ουσιαστικά σημαίνει ότι η χρηματοροή, ως μαθηματική οντότητα, είναι μιά πραγματική συνάρτηση $P : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα δίνεται αν και πάλι σκεφτούμε αρχικά σε όρους διακριτού χρόνου και στη συνέχεια επιτρέψουμε στα χρονικά διαστήματα να γίνονται ολοένα και μικρότερα προσεγγίζοντας ολοένα και περισσότερο τον συνεχή χρόνο. Σε αυτή τη περίπτωση το "άθροισμα" γίνεται "ολοκλήρωμα" (γι'αυτό απαιτήσαμε η συνάρτηση πού εκφράζει την χρηματοροή να είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann) και η παρούσα αξία της χρηματοροής δίνεται από τη σχέση

$$PV = \int_0^T P(t)e^{-Rt}dt. \qquad \#$$

Παράδειγμα

Έστω μιά συνεχής χρηματοροή της οποίας ο ρυθμός το έτος t είναι $P(t) = 10$ ευρώ ανά έτος. Το ετήσιο επιτόκιο είναι $R = 0.05$ και η χρηματοροή υφίσταται συνεχή ανατοκισμό γιά δέκα χρόνια. Ποιά είναι η παρούσα αξία αυτής της χρηματοροής? Έφαρμόζοντας τη σχέση (ref: pv_ct2), έχουμε

$$PV = \int_0^T P(t)e^{-Rt}dt = \int_0^{10} 10e^{-0.05t}dt = 10(-\frac{1}{0.05})e^{-0.05t} \Big|_{t=0}^{t=10} = -200(e^{-0.05\times 10} - e^0) =$$
$$= -200(e^{-0.5} - 1) = -200e^{-0.5} + 200 = -121.30 + 200 = 78.7.$$

Συνεπώς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η παρούσα αξία της συγκεκριμένης χρηματοροής είναι 78.7 ευρώ.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η χρηματοροή δεν έχει σταθερό ρυθμό $P(t) = 10$ ευρώ ανά έτος αλλά αντίθετα ο ρυθμός της καθορίζεται από τη σχέση

$$P(t) = 10 - 2t.$$

Σε αυτή τη περίπτωση, η παρούσα αξία της νέας αυτής χρηματοροής υπολογίζεται και πάλι με εφαρμογή της σχέση (ref: pv_ct2):

$$PV = \int_0^T P(t)e^{-Rt}dt = \int_0^{10} (10 - 2t)e^{-0.05t}dt. \qquad \#$$

Εκτελώντας πράξεις,

$$\int_0^{10} (10 - 2t)e^{-0.05t}dt = \int_0^{10} (10e^{-0.05t} - 2te^{-0.05t})dt =$$
$$= 10\int_0^{10} e^{-0.05t}dt - 2\int_0^{10} te^{-0.05t}dt.$$

Η συνέχεια εμπλέκει στοιχειώδεις πράξεις ολοκληρωμάτων (το δεύτερο ολοκλήρωμα απαιτεί ολοκλήρωση κατά μέλη) και αφήνεται στον αναγνώστη ως άσκηση.

Παρούσα Αξία σε Στοχαστικό Περιβάλλον

Η ανάλυση πού προηγήθηκε διέπεται από την υπόθεση ότι κινούμαστε σε ντετερμινιστικό και όχι σε στοχαστικό περιβάλλον. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι χρηματοροές με τις οποίες ασχοληθήκαμε (είτε σε διακριτό είτε σε συνεχή χρόνο) είναι γνωστές εκ των προτέρων (ήδη από την χρονική στιγμή $t = 0$). Με άλλα λόγια, τόσο η ροή των μελλοντικών εσόδων όσο κι η ροή του μελλοντικού κόστους είναι πλήρως γνωστά στον ενδιαφερόμενο (επιχείρηση, επενδυτή κλπ) ήδη από "σήμερα" δηλαδή από την $t = 0$.

Το ερώτημα πού θα θέσουμε σε αυτή την ενότητα είναι το εξής: Πώς υπολογίζεται η παρούσα αξία μιάς χρηματοροής η οποία ενέχει στοιχεία αβεβαιότητας? Με άλλα λόγια πώς υπολογίζουμε την παρούσα αξία μιάς χρηματοροής όταν κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ δεν γνωρίζουμε με απόλυτη ακρίβεια τη ροή των μελλοντικών εσόδων και/ή τη ροή του μελλοντικού κόστους? Ο προσεκτικός αναγνώστης θα διαπιστώσει σε αυτό το σημείο ότι το ερώτημα αυτό έχει ήδη απαντηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο όταν αναλύσαμε την θεμελιώδη τιμή μιάς μετοχής. Να θυμίσουμε ότι η σχέση πού εκφράζει την θεμελιώδη τιμή της μετοχής, ως συνάρτηση των αναμενόμενων μελλοντικών μερισμάτων είναι η (ref: final-sol1) την οποία ξαναγράφουμε εδώ γιά λόγους ευκολίας,

$$P_t = P_t^F = \sum_{i=0}^{\infty} a^{i+1}E(d_{t+i} \mid I_t). \qquad \#$$

Αμέσως παρατηρούμε ότι "δομικά" η παραπάνω σχέση μοιάζει πολύ με την σχέση (ref: pv3) η οποία εκφράζει την παρούσα αξία μιάς χρηματοροής μελλοντικών εσόδων. Η ομοιότητα αυτή μπορεί να γίνει ακόμα πιό εμφανής αν εκφράσουμε την παραπάνω σχέση για $t = 0$ και αλλάξουμε τον δείκτη i σε t :

$$P_0^F = \sum_{t=0}^{\infty} a^{t+1}E(d_t \mid I_0). \qquad \#$$

Επιπλέον, η παράμετρος a έχει οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο να είναι,

$$a = \frac{1}{1 + r} \qquad \#$$

με

$$r = R_f + \rho.$$

Αντικαθιστώντας το a στην (ref: pv6) με το ίσο του από την (ref: pv7) έχουμε

$$P_0^F = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{r^{t+1}} E(d_t \mid I_0). \qquad \#$$

Τώρα πλέον η σχέση αυτή επιδεικνύει ακόμα μεγαλύτερη δομική ομοιότητα με τη σχέση

$$PV(B) = \sum_{t=0}^{n} \frac{B_t}{(1 + R)^t}. \qquad \#$$

Πέραν της ομοιότητας μεταξύ των δύο σχέσεων υπάρχουν και αρκετές διαφορές. Οι πιό σημαντικές είναι οι εξής δύο: a) Στη σχέση (ref: pv8) δεν εμφανίζονται τα ίδια τα μελλοντικά μερίσματα, d_t, αλλά οι αναμενόμενες τιμές (δεσμευμένες μέσες τιμές) των μελλοντικών μερισμάτων. Αυτό οφείλεται στο ότι κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ η μελλοντική χρηματοροή των μερισμάτων δεν είναι γνωστή με απόλυτη ακρίβεια και ως εκ τούτου αντιμετωπίζεται ως μιά ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. b) Το προεξοφλητικό επιτόκιο r στη σχέση (ref: pv8) δεν είναι μόνο το επιτόκιο R_f αλλά περιλαμβάνει και το ασφάλιστρο κινδύνου ρ. Ο λόγος πού απαιτείται (από τους επενδυτές) ένα ασφάλιστρο κινδύνου, δηλαδή μιά επιπλέον απόδοση πέρα της R_f, είναι ακριβώς η αβεβαιότητα πού χαρακτηρίζει την συγκεκριμένη χρηματοροή. Με άλλα λόγια οι επενδυτές απαιτούν από την μετοχή να τους δώσει μιά επιπλέον απόδοση, πέρα από την σίγουρη, προκειμένου να αναλάβουν το ρίσκο της αγοράς και διακράτησης της μετοχής.

Η προηγούμενη συζήτηση καθιστά εμφανές ότι η θεμελιώδης τιμή μιάς μετοχής δεν είναι τίποτε άλλο παρά η παρούσα αξία των αναμενόμενων μελλοντικών μερισμάτων, προεξοφλημένων με ένα συντελεστή προεξόφλησης ο οποίος είναι το άθροισμα του επιτοκίου συν το ασφάλιστρο κινδύνου. Είναι εμφανές ότι όσο αυξάνεται το ασφάλιστρο κινδύνου πού απαιτούν οι επενδυτές για τη διακράτηση της μετοχής, τόσο αυξάνεται ο όρος $r = R_f + \rho$ και τόσο μειώνεται η παρούσα αξία των αναμενόμενων μερισμάτων. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι μειώνεται και η θεμελιώδης τιμή της μετοχής. Σε μιά αποτελεσματική αγορά (στην οποία οι θεμελιώδεις τιμές των μετοχών είναι πάντα ίσες με τις αντίστοιχες τρέχουσες τιμές της αγοράς) αυτό συνεπάγεται τη μείωση της αγοραίας τιμής της μετοχής. Πράγματι, ένας τρόπος να κατανοήσουμε γιατί η αύξηση στο ασφάλιστρο κινδύνου συνεπάγεται την μείωση στη τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι ο εξής: Τι σημαίνει αύξηση στο απαιτούμενο ασφάλιστρο κινδύνου? Ας θυμηθούμε ότι το ασφάλιστρο κινδύνου μιας λοταρίας Z, εν προκειμένω μιάς μετοχής, είναι σύμφωνα με τη σχέση (ref: rp1) στο πρώτο τμήμα του βιβλίου,

$$\rho(Z) = E(Z) - z_0 \qquad \#$$

όπου z_0 είναι το βέβαιο ισοδύναμο. Στη περίπτωση κατά την οποία η λοταρία είναι μιά μετοχή, το βέβαιο ισοδύναμο είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου R_f. Αυτό το επιτόκιο ο κάθε μεμονωμένος επενδυτής το θεωρεί δεδομένο και δεν μπορεί να το αλλάξει. Κατά συνέπεια η μόνη περίπτωση για να αυξηθεί το $\rho(Z)$ είναι να αυξηθεί το $E(Z)$ δηλαδή η αναμενόμενη τιμή της λοταρίας. Ποιά είναι η $E(Z)$ στη περίπτωση της μετοχής? Είναι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής. Γιά να αυξηθεί η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής θα πρέπει η τρέχουσα τιμή να μειωθεί έτσι ώστε "το περιθώριο ανόδου" της τιμής της μετοχής στο μέλλον να καταστεί μεγαλύτερο.

Ας αναλύσουμε πιό διεξοδικά την διαδικασία προσαρμογής των αγοραίων τιμών σε μιά μεταβολή του ασφάλιστρου κινδύνου πού απαιτούν οι επενδυτές για τη διακράτηση μιας μετοχής i. Αρχικά ας εξετάσουμε σε τι αντιστοιχούν οι οντότητες $\rho(Z)$, $E(Z)$ και z_0 οι οποίες αφορούν μιά γενική λοταρία στη περίπτωση κατά την οποία η λοταρία Z είναι η μετοχή i. Αντί για $\rho(Z)$ θα έχουμε ρ_t, αντί για $E(Z)$ θα έχουμε $E(R_{t+1} \mid I_t)$ με

$$E(R_{t+1} \mid I_t) = E\left(\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \mid I_t \right) = \frac{1}{P_t} E(P_{t+1} \mid I_t) - 1 \qquad \#$$

και αντί για z_0 θα έχουμε R_{ft}. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση (ref: rp1) γίνεται

$$\rho_t = E(R_{t+1} \mid I_t) - R_{ft} \qquad \#$$

Ας υποθέσουμε ότι λόγω μιάς αλλαγής των οικονομικών συνθηκών, οι επενδυτές αποφασίζουν να απαιτήσουν ένα υψηλότερο ασφάλιστρο κινδύνου, ρ_t, προκειμένου να διακρατήσουν την μετοχή i. Με άλλα λόγια ο βαθμός αποστροφής του κινδύνου των επενδυτών σε σχέση με την μετοχή i αυξήθηκε. Ας υποθέσουμε ότι το βέβαιο ισοδύναμο R_{ft} παρέμεινε σταθερό. Τότε για να αυξηθεί το ρ_{it} (όπως υποθέσαμε) θα πρέπει αναγκαστικά να αυξηθεί η αναμενόμενη απόδοση $E(R_{t+1} \mid I_t)$. Αν υποθέσουμε ότι οι προσδοκίες για την μελλοντική τιμή $E(P_{t+1} \mid I_t)$ παραμένουν σταθερές, τότε από την σχέση (ref: er0) καταλαβαίνουμε ότι για να αυξηθεί η $E(R_{t+1} \mid I_t)$ θα πρέπει η τρέχουσα τιμή P_t να μειωθεί. Πόσο θα μειωθεί? Θα μειωθεί έως το σημείο στο οποίο η διαφορά μεταξύ $E(R_{t+1} \mid I_t)$ και R_{ft} να γίνει ίση με το αυξημένο ασφάλιστρο κινδύνου πού θέλουν οι επενδυτές για να διακρατήσουν τη μετοχή i. Ακόμα πιό συγκεκριμένα, η νέα τιμή της μετοχής θα είναι η παρούσα αξία των μελλοντικών αναμενόμενων μερισμάτων, με τα τελευταία να έχουν πλέον προεξοφληθεί με ένα υψηλότερο συντελεστή $r = R_{ft} + \rho_t$ απο αυτόν πού ίσχυε πριν την αλλαγή στον βαθμό αποστροφής του κινδύνου των επενδυτών. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι η νέα θεμελιώδης τιμή της μετοχής θα είναι μικρότερη.

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι ο βαθμός αποστροφής του κινδύνου των επενδυτών παραμένει σταθερός αλλά το επιτόκιο R_{ft} αυξάνεται. Τι θα συμβεί στην τρέχουσα τιμή της μετοχής? Αφού ο βαθμός αποστροφής του κινδύνου παραμένει σταθερός, και το ασφάλιστρο κινδύνου ρ_t θα είναι σταθερό. Έστω ότι το ρ_t είναι 4% και αρχικά το επιτόκιο είναι $R_{ft} = 3\%$. Από τη σχέση (ref: rp1i) καταλαβαίνουμε αμέσως ότι $E(R_{t+1} \mid I_t) = 7\%$. Έστω ότι το επιτόκιο αυξάνεται από 3% σε 5%.Αν η αναμενόμενη απόδοση παραμείνει σταθερή στο 7% τότε το ασφάλιστρο κινδύνου θα πέσει στο 2% το οποίο είναι μικρότερο από το 4% πού απαιτούν οι επενδυτές ως αποζημίωση του κινδύνου της μετοχής. Σε αυτή τη περίπτωση θα πουλήσουν τις μετοχές τους το οποίο θα επιφέρει μείωση στη τιμή της μετοχής. Μέχρι ποιού σημείου θα μειωθεί η τιμή της μετοχής? Μέχρι του σημείου στο οποίο η αναμενόμενη απόδοση φτάσει το 9% εις τρόπον ώστε το ασφάλιστρο κινδύνου να διαμορφωθεί και πάλι στο 4% το οποίο κρίνεται από τους επενδυτές ως ικανοποιητικό για την διακράτηση της μετοχής i. Όπως καταλαβαίνουμε, η ακριβώς αντίθετη διαδικασία θα ακολουθηθεί αν έχουμε μιά μείωση του επιτοκίου R_{ft}. Ως γενικό συμπέρασμα μπορούμε να πούμε ότι η αύξηση των επιτοκίων είναι αρνητική εξέλιξη για τις τιμές των μετοχών και αντιστρόφως η μείωση των επιτοκίων ασκεί θετική επίδραση στις τιμές των μετοχών (νοουμένου ότι όλες οι άλλες μεταβλητές πού επηρεάζουν τις τιμές των μετοχών παραμένουν σταθερές).

Ας εξετάσουμε τώρα μερικά εμπειρικά παραδείγματα. Πριν προχωρήσουμε να θυμίσουμε ότι αν η στοχαστική ακολουθία των μερισμάτων ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο, τότε η θεμελιώδης τιμή της μετοχής δίνεται από τη σχέση (ref: fair-pri) πού αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και την οποία ξαναγράφουμε εδώ γιά λόγους ευκολίας.

$$P_t = \frac{1}{r} d_t. \qquad \#$$

Ας υποθέσουμε ότι το τρέχον μέρισμα πού δίνει η εταιρεία i είναι 1.6% το χρόνο. Έστω ότι η τρέχουσα τιμή της μετοχής i είναι 290 δολλάρια, πού σημαίνει ότι το τρέχον μέρισμα (d_t) είναι ίσο με 4.64 δολλάρια ανά μετοχή. Έστω ότι το $R_f = 0.5\%$ ή 0.005. Αν υποθέσουμε ότι η αγορά είναι αποτελεσματική και άρα σε κάθε χρονική στιγμή η τρέχουσα τιμή ισούται με την θεμελιώδη τιμή, μπορούμε να θέσουμε το ερώτημα του πόσο είναι το ασφάλιστρο κινδύνου ρ_t πού οι επενδυτές απαιτούν για τη διακράτηση της μετοχής i. Από την παραπάνω σχέση έχουμε,

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{1}{r} d_t = \frac{1}{R_{ft} + \rho_t} d_t \Rightarrow \\ 290 &= \frac{1}{0.005 + \rho_t} 4.64 \Rightarrow \rho_t = 0.011. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η επιπλέον απόδοση (πέραν της $R_f = 0.5\%$) πού απαιτουν οι επενδυτές για τη διακράτηση της μετοχής i είναι ίση με 1.1%.

Ας θέσουμε τώρα το αντίθετο ερώτημα. Τι θα συμβεί στην τιμή της μετοχής αν το μέρισμα παραμείνει σταθερό στα 4.64 δολλάρια ανά μετοχή, το R_f επίσης παραμείνει σταθερό στο 0.5%, αλλά το ασφάλιστρο κινδύνου αυξηθεί από 1.1% στο 2.2% (δηλαδή διπλασιαστεί). Με βάση τα νέα δεδομένα θα έχουμε,

$$P_t = \frac{1}{r} d_t = \frac{1}{R_{ft} + \rho_t} d_t = \frac{1}{0.005 + 0.022} 4.64 = 171.85. \qquad \#$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η αύξηση στο ασφάλιστρο κινδύνου προκάλεσε μιά σημαντική πτώση στη τιμή της μετοχής ακόμα και όταν το μέρισμα παρέμεινε σταθερό.

Παρούσα Αξία και Τιμολόγηση Ομολόγων

Στην παρούσα ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες πού αναλύσαμε παραπάνω προκειμένου να δούμε πώς τιμολογούμε ένα ομόλογο. Κατ’αρχήν τι είναι ένα ομόλογο? Ένα ομόλογο είναι ένα χρεώγραφο το οποίο εκδίδουν είτε κυβερνήσεις είτε εταιρείες προκειμένου να δανειστούν από την αγορά (δηλαδή τους επενδυτές). Το χρεώγραφο αυτό υποχρεώνει τον εκδότη (τον δανειζόμενο) να προβεί σε συγκεκριμένες πληρωμές προς τον αγοραστή/κάτοχο του χρεωγράφου (τον δανειστή) σε συγκεκριμένες και προκαθορισμένες χρονικές στιγμές. Αυτές οι πληρωμές είναι δύο ειδών: Τα λεγόμενα "κουπόνια" (coupon payments) πού ουσιαστικά αποτελούν τις καταβολές του τόκου πού ο δανειζόμενος πληρώνει στον δανειστή και την ονομαστική αξία (face value) του ομολόγου πού πληρώνει ο δανειζόμενος στο δανειστή στη λήξη του ομολόγου. Τα κουπόνια συνήθως εκφράζονται ως ποσοστά επί της ονομαστικής αξίας του ομολόγου. π.χ. 5%. Τα κουπόνια καθορίζουν την συγκεκριμένη (και θεωρητικά σίγουρη) χρηματοροή πού το ομόλογο θα προσφέρει σε αυτόν πού το διακρατεί. Κάθε ομόλογο έχει μιά ορισμένη λήξη πού είναι η χρονική στιγμή στην οποία ο δανειζόμενος θα πληρώσει στον δανειστή την ονομαστική αξία του ομολόγου. Όταν το ομόλογο λήξει και η ονομαστική αξία πληρωθεί σταματούν και οι πληρωμές των κουπονιών.

Όπως κάθε χρηματοροή έτσι και η χρηματοροή του ομολόγου έχει μιά παρούσα αξία. Η παρούσα αξία ενός ομολόγου, B, δίνεται από τη σχέση

$$PV(B) = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C+FV}{(1+r)^T}, \qquad \#$$

όπου C είναι το κουπόνι του ομολόγου ανά έτος, FV είναι η ονομαστική αξία του ομολόγου, T είναι τα χρόνια πού μεσολαβούν από την έκδοση ως την λήξη του ομολόγου, και r είναι ο συντελεστής προεξόφλησης. Ο συντελεστής προεξόφλησης είναι η απαιτούμενη απόδοση από τους επενδυτές (required rate of return) προκειμένου να διακρατήσουν το ομόλογο.

Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα ομόλογο B_A το οποίο έχει ονομαστική αξία 1000 ευρώ, λήγει σε 2 χρόνια, έχει κουπόνι 5% επί της ονομαστικής αξίας (δηλαδή πληρώνει 50 ευρώ ανά έτος) και συντελεστή προεξόφλησης 5%. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα υποθέτουμε ότι το κουπόνι ως ποσοστό της ονομαστικής αξίας είναι ίσο με τον συντελεστή προεξόφλησης. Αυτή την υπόθεση θα την άρουμε στη συνέχεια. Προς το παρόν με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, η παρούσα αξία (και άρα η θεμελιώδης τιμή του ομολόγου) είναι,

$$PV(B_A) = \frac{50}{(1+0.05)} + \frac{50+1000}{(1+0.05)^2} = 1000.$$

Αυτό πού παρατηρούμε είναι ότι όταν το κουπόνι ως ποσοστό της ονομαστικής αξίας είναι ίσο με τον συντελεστή προεξόφλησης τότε η παρούσα αξία του ομολόγου (και άρα και η θεμελιώδης τιμή του ομολόγου) είναι ίση με την ονομαστική του αξία.

Ας θεωρήσουμε ένα άλλο ομόλογο, B_B για το οποίο T=4, και κουπόνι 3% με ονομαστική αξία 1000 ευρώ. Ας ελέγξουμε την παραπάνω διαπίστωση, ότι δηλαδή για $r = 0.03$ η παρούσα αξία ταυτίζεται με την ονομαστική αξία του ομολόγου:

$$PV(B_B) = \frac{30}{(1+0.03)} + \frac{30}{(1+0.03)^2} + \frac{30}{(1+0.03)^3} \frac{30+1000}{(1+0.03)^4} = 1000.$$

Αυτό μας φέρνει στο επόμενο ερώτημα το οποίο είναι τι συμβαίνει στην παρούσα αξία του ομολόγου και άρα και στην θεμελιώδη τιμή του αν το προεξοφλητικό επιτόκιο διαφέρει από το κουπόνι του ομολόγου (ως ποσοστό της ονομαστικής αξίας). Γιατί το προεξοφλητικό επιτόκιο να διαφέρει από το κουπόνι? Ας υποθέσουμε ότι αμέσως μετά την έκδοση του ομολόγου οι συνθήκες στην Οικονομία αλλάζουν εις τρόπον ώστε τα επιτόκια να μειωθούν. Αυτό σημαίνει ότι πλέον οι επενδυτές είναι διατεθειμένοι να δεχθούν μιά χαμηλότερη απόδοση προκειμένου να δανείσουν τις κυβερνήσεις και τις εταιρείες απ'οτι πριν αλλάξουν οι οικονομικές συνθήκες. Έστω λοιπόν ότι το r από 0.05 μειώνεται στο 0.04. Ποιά είναι η παρούσα αξία του B_A γιά $r = 0.04$? Εφαρμόζοντας τη γενική σχέση (ref: pvb1) στα δεδομένα του προβλήματος έχουμε,

$$PV(B_A) = \frac{50}{(1+0.04)} + \frac{50+1000}{(1+0.04)^2} = 1018.86.$$

Αν το r μειωθεί ακόμα περισσότερο, π.χ. για $r = 0.03$, η παρούσα αξία του ομολόγου γίνεται,

$$PV(B_A) = \frac{50}{(1+0.03)} + \frac{50+1000}{(1+0.03)^2} = 1038.27.$$

Αυτό πού παρατηρούμε είναι ότι όσο η απαιτούμενη απόδοση μειώνεται τόσο η παρούσα αξία (και άρα και η θεμελιώδης τιμή) του ομολόγου αυξάνεται. Αυτή η διαπίστωση γενικεύεται εις τρόπον ώστε να περιγράψει μια εξαιρετικά σημαντική σχέση μεταξύ της απαιτούμενης απόδοσης του ομολόγου και της θεμελιώδους τιμής του: "Υπάρχει μιά αρνητική σχέση μεταξύ της απαιτούμενης απόδοσης του ομολόγου και της θεμελιώδους τιμής του". Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι όταν το επίπεδο των επιτοκίων σε μιά Οικονομία μειώνεται (ίσως λόγω της ασκούμενης νομισματικής πολιτικής) τότε, γενικά οι τιμές των ομολόγων που διαπραγματεύονται στη δευτερογενη αγορά, αυξάνονται και αντιστρόφως.

Παρατήρηση

Η δευτερογενής αγορά ομολόγων είναι μιά αγορά στην οποία συναλλάσονται επενδυτές οι οποίοι κατέχουν ομόλογα τα οποία έχουν ήδη εκδοθεί στην πρωτογενή αγορά. Για παράδειγμα, ένας επενδυτής πού έχει στην κατοχή του ένα δεκαετές ομόλογο του Αμερικανικού Δημοσίου το οποίο έχει ακόμα 8 χρόνια για να λήξει, μπορεί να το πουλήσει σε ένα άλλο επενδυτή στη δευτερογενή αγορά. Η τιμή πού διαμορφώνεται στην δευτερογενή αγορά είναι συνήθως διαφορετική της ονομαστικής αξίας του ομολόγου. Αν η αγοραία τιμή του ομολόγου είναι μεγαλύτερη της ονομαστικής του αξίας τότε λέμε ότι το ομόλογο διαπραγματεύεται σε premium. Αντίθετα, αν η τιμή του ομολόγου είναι μικρότερη της ονομαστικής του αξίας τότε το ομόλογο διαπραγματεύεται σε discount.

Ένα επίσης σημαντικό στοιχείο πού πρέπει να τονίσουμε είναι ότι η "ένταση" της αρνητικής σχέσης μεταξύ απόδοσης και τιμής ενός ομολόγου αυξάνεται με τα χρόνια T πού απαιτούνται για τη λήξη του ομολόγου. Για παράδειγμα, έστω το ομόλογο B_C το οποίο έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με το ομόλογο B_A εκτός του ότι η περίοδος T είναι αντί για δύο τέσσερα χρόνια. Με $r = 0.04$ η παρούσα αξία του B_C είναι,

$$PV(B_C) = \frac{50}{(1+0.04)} + \frac{50}{(1+0.04)^2} + \frac{50}{(1+0.04)^3} + \frac{50+1000}{(1+0.04)^4} = 1036.29$$

ενώ για $r = 0.03$ η παρούσα αξία γίνεται,

$$PV(B_C) = \frac{50}{(1+0.03)} + \frac{50}{(1+0.03)^2} + \frac{50}{(1+0.03)^3} + \frac{50+1000}{(1+0.03)^4} = 1074.34.$$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι όταν το $T = 2$, η διαφορά μεταξύ της παρούσας αξίας για $r = 0.04$ και $r = 0.03$ είναι

$$1038.27 - 1018.86 = 19.41$$

ενώ όταν το $T = 4$, η αντίστοιχη διαφορά γίνεται

$$1074.34 - 1036.29 = 38.05.$$

Από αυτό φαίνεται ότι η ευαισθησία της τιμής του ομολόγου στις διακυμάνσεις του r είναι μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερο είναι το διάστημα πού απομένει για την λήξη του ομολόγου.

Αυτό πού είναι σημαντικό να κρατήσουμε από την συζήτηση πού προηγήθηκε είναι ότι τόσο η τιμολόγηση των μετοχών όσο και η τιμολόγηση των ομολόγων (δηλαδή οι δύο βασικότερες μορφές περιουσιακών στοιχείων) γίνεται σε όρους παρούσας αξίας. Η θεμελιώδης τιμή μιάς μετοχής είναι η παρούσα αξία των αναμενόμενων μελλοντικών μερισμάτων προεξοφλημένων με ένα συντελεστή προεξόφλησης ο οποίος περιλαμβάνει και το ασφάλιστρο κινδύνου της συγκεκριμένης μετοχής. Η θεμελιώδης τιμή ενός ομολόγου είναι η παρούσα αξία των μελλοντικών κουπονιών. Η τιμολόγηση των μετοχών γίνεται σε στοχαστικό περιβάλλον ενώ η τιμολόγηση των ομολόγων γίνεται σε ντετερμινιστικό περιβάλλον.

Τέλος, ας δούμε το πώς οι κινήσεις στις τιμές των ομολόγων σχετίζονται με τις αντίστοιχες κινήσεις στις τιμές των μετοχών, όταν η διάθεση των επενδυτών γιά ανάληψη κινδύνου μειώνεται. Στη γλώσσα της αγοράς, η περίπτωση αυτή αναφέρεται ως στροφή από "risk on" σε "risk off" επενδυτική διάθεση. Όπως είδαμε παραπάνω όταν η διάθεση για ανάληψη κινδύνου μειώνεται, το ασφάλιστρο κινδύνου για διακράτηση μετοχών αυξάνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι επενδυτές να βρίσκουν τις τρέχουσες τιμές των μετοχών ως μη-συμφέρουσες και ως εκ τούτου να προβαίνουν σε πώληση των μετοχών. Αυτό με τη σειρά του προκαλεί μείωση των τιμών των μετοχών. Τα χρήματα πού οι επενδυτές ελευθέρωσαν πουλώντας τις μετοχές τους τα διοχετεύουν στην αγορά αξιόπιστων κρατικών ομολόγων (τα οποία δεν παρουσιάζουν κίνδυνο χρωκοπίας) τα οποία συνήθως αποκαλούνται "ασφαλή καταφύγια" (safe havens). Η αύξηση στη ζήτηση των ομολόγων προκαλεί αύξηση της τιμής τους (και μείωση της απόδοσης τους). Κατά συνεπεια, παρατηρούμε ότι σε ένα διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο, το οποίο περιέχει ένα μετοχικό και ένα ομολογιακό τμήμα, η πτώση στη τιμή των μετοχών μπορεί να αντισταθμιστεί (μερικώς) από την άνοδο της τιμής των ομολόγων.

Ερωτήσεις Επανάληψης

1) Να εξηγήσετε διαισθητικά την έννοια του ανατοκισμού. Σε τι διαφέρει από τον απλό τοκισμό?

2) Τι σημαίνει λύση μιάς εξίσωσης διαφορών? Σε τι διαφέρει από τη λύση μιάς συνηθεσμένης εξίσωσης, π.χ. της $x + 5 = 0$?

3) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: Στα πλαίσια του περιοδικού ανατοκισμού, το κεφάλαιο μας είναι εκθετική συνάρτηση του χρόνου.

4) Πότε μια γραμμική εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης με σταθερό συντελεστή λέγεται ομογενής? Ποιά είναι η μορφή της λύσης της?

5) Αν το αρχικό σας κεφάλαιο υφίσταται περιδοκό ανατοκισμό με επιτόκιο R σε πόσες περιόδους το κεφάλαιο σας θα διπλασιαστεί? Να εξηγήσετε αναλυτικά την απάντηση σας.

6) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: Αν πέρα του περιοδικού ανατοκισμού, σε κάθε περίοδο προσθέτετε ή αφαιρείτε νέο κεφάλαιο, τότε η πορεία του συνολικού σας κεφαλαίου περιγράφεται από μιά γραμμική εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης με σταθερό συντελεστή και σταθερό όρο.

7) Ποιά είναι η διαδικασία εύρεσης της γενικής λύσης μιάς γραμμικής εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης με σταθερό συντελεστή και σταθερό όρο?

8) Σε τι χρησιμεύει η αρχική συνθήκη όσον αφορά τη λύση μιάς γραμμικής εξίσωσης διαφορών?

9) Να αναλύσετε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης μιάς γραμμικής εξίσωσης διαφορών πρώτης τάξης με σταθερό συντελεστή και σταθερό όρο για διαφορετικές τιμές του επιτοκίου R και διαφορετικές αρχικές συνθήκες P_0.

10) Να αναλύσετε την διαδικασία μετάβασης από τον περιοδικό στο συνεχή ανατοκισμό και την αντίστοιχη μετάβαση από το πλαίσιο των εξισώσεων διαφορών σε αυτό των διαφορικών εξισώσεων.

11) Τι εννοούμε λέγοντας γενική λύση μιάς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης με σταθερό συντελεστή και σταθερό όρο. Σε τι διαφέρει από την λύση της αντίστοιχης εξίσωσης διαφορών?

12) Έστω ότι έχετε ένα αρχικό κεφάλαιο P_0. Σας δίνετε η δυνατότητα να το ανατοκίσετε επιλέγοντας είτε περιοδικό είτε συνεχή ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 5%. Ποιά μορφή ανατοκισμού θα επιλέξετε και γιατί?

13) Να αναλύσετε τον τρόπο με τον οποίο ο συνεχής ανατοκισμός προκύπτει ως όριο του περιοδικού ανατοκισμού.

14) Να εξηγήσετε διαισθητικά τι σημαίνει η παρούσα αξία ενός μελλοντικού ποσού. Να συγκρίνετε την παρούσα αξία ενός μελλοντικού ποσού με την παρούσα αξία μιας μελλοντικής χρηματοροής.

15) Τι εννοούμε λέγοντας καθαρή παρούσα αξία και γιατί αυτή η έννοια είναι σημαντική στην αξιολόγηση εναλλακτικών επενδυτικών σχεδίων?

16) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: Η θεμελιώδης τιμή μιάς μετοχής είναι η παρούσα αξία των αναμενόμενων μελλοντικών μερισμάτων. Ποιός είναι ο συντελεστής προεξόφλησης σε αυτή τη περίπτωση?

17) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: Η θεμελιώδης τιμή ενός ομολόγου είναι η παρούσα αξία των μελλοντικών κουπονιών. Ποιός είναι ο συντελεστής προεξόφλησης σε αυτή τη περίπτωση? Σε τι διαφέρει από τονα αντίστοιχο συντελεστή προεξόφλησης των αναμενόμενων μερισμάτων?

18) Να περιγράψετε το τι συμβαίνει στην τρέχουσα αγοραία τιμή μιάς μετοχής αν το ασφάλιστρο κινδύνου για την μετοχή αυξηθεί. Να εξηγήσετε αν στην απάντηση σας χρειάστηκε να επιακλεστείτε την υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών.

19) Να εξηγήσετε τη σχέση μεταξύ της τρέχουσας τιμής ενός ομολόγου στη δευτερογενή αγορά και της απόδοσης του ομολόγου.

20) Έστω ότι η Κεντρική Τράπεζα των Ηνωμένων Πολιτειών προβαίνει σε μείωση του παρεμβατικού της επιτοκίου από 1.25% σε 1%. Να αναλύσετε την επίδραση πού θα έχει αυτή η μείωση στις τιμές των κρατικών ομολόγων πού διαπραγματεύονται στην δευτερογενή αγορά.

Αριστοποίηση Χαρτοφυλακίου κατά Markowitz (Αποτελεσματικά

Χαρτοφυλάκια)

Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλύσουμε ένα από τα σημαντικότερα θέματα στη Θεωρία Χαρτοφυλακίου το οποίο είναι το πώς κατασκευάζουμε ένα "άριστο χαρτοφυλάκιο". Το πρώτο ερώτημα πού τίθεται ήδη από την αρχή της συζήτησης είναι το τι εννοούμε λέγοντας "άριστο χαρτοφυλάκιο". Υπό ποιά έννοια το υπό κατασκευή χαρτοφυλάκιο θα είναι άριστο? Επίσης ποιά είναι η αρχική δεξαμένη περιουσιακών στοιχείων από τα οποία (με κάποιο τρόπο) θα επιλέξουμε εκείνα τα οποία θα αποτελέσουν το άριστο χαρτοφυλάκιο? Η δεύτερη ερώτηση είναι εύκολο να απαντηθεί. Αρχικά θα υποθέσουμε ότι η αρχική δεξαμενή περιουσιακών στοιχείων αποτελείται από n τον αριθμό περιουσιακά στοιχεία (assets) με κινδυνο. Σε δεύτερο στάδιο θα διευρύνουμε την δεξαμενή των περιουσιακών στοιχείων από n σε $n+1$ όπου το $n+1$ στοιχείο θα είναι ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο. Θα δούμε ότι η προσθήκη του $n+1$ περιουσιακού στοιχείου έχει σημαντικές επιπτώσεις στα αποτελέσματα της ανάλυσης μας.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε n περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο (π.χ. μετοχές) με τις αποδόσεις αυτών των assets μεταξύ των χρονικών περιόδων $t = 0$ και $t = 1$ να συμβολίζονται με $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Θα υποθέσουμε ότι κατά τη στιγμή της λήψης της απόφασης μας (για την κατασκευή του άριστου χαρτοφυλακίου) ευρισκόμαστε στη χρονική στιγμή $t = 0$, το οποίο σημαίνει ότι οι αποδόσεις των n περιουσιακών στοιχείων είναι για μας τυχαίες μεταβλητές. Κατά συνέπεια κεντρικό ρόλο στην ανάλυση πού θα ακολουθήσει θα παίξει το τυχαίο διάνυσμα,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_n \end{bmatrix}.$$

Η από-κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $R_1, R_2, \ldots, R_n$ θα συμβολίζεται ως $f_{R_1,R_2,\ldots,R_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta)$ και θα εκφράζει (στη συνήθη περίπτωση πού οι αποδόσεις θεωρούνται συνεχείς τυχαίες μεταβλητές) την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{R}$). Το διάνυσμα των μέσων των $R_1, R_2, \ldots, R_n$ θα συμβολίζεται ως $\boldsymbol{\mu}$ και ορίζεται ως

$$\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E(R_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_n \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ του **R** είναι ο ακόλουθος,

$$\Sigma = Cov(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

Το πρόβλημα της επιλογής του άριστου χαρτοφυλακίου έγκειται στην επιλογή των σταθμών (ποσοστών) $w_1, w_2, \ldots, w_n$ με τις οποίες κάθε ένα απο τα n περιουσιακά στοιχεία εισέρχονται στο χαρτοφυλάκιο p. Ένα χαρτοφυλάκιο p περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο θα θεωρείται ένας συγκεκριμένος συνδυασμός $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ με απόδοση

$$R_p = w_1R_1 + w_2R_2 + \ldots + w_nR_n.$$

Η απόδοση R_p του χαρτοφυλακίου μας θα καθορίσει και το επίπεδο του πλούτου πού θα έχουμε την περίοδο $t = 1$. Συγκεκριμένα, αν κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο αρχικός μας πλούτος είναι W_0, τότε την χρονική στιγμή $t = 1$, ο τελικός μας πλούτος W_1 θα είναι

$$W_1 = (1 + R_p)W_0. \qquad \#$$

Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι και η μεταβλητή W_1 όπως και η μεταβλητή R_p θα είναι τυχαίες μεταβλητές ως συναρτήσεις των τυχαίων μεταβλητών $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Επίσης ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις,

$$E(W_1) = W_0 + W_0E(R_p)$$

και

$$Var(W_1) = W_0^2 Var(R_p).$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις περιγράφουν τη σχέση μεταξύ της αναμενόμενης τιμής $E(W_1)$ του τελικού πλούτου και της αναμενόμενης τιμής της απόδοσης $E(R_p)$ του χαρτοφυλακίου καθώς και τη σχέση μεταξύ της διακύμανσης (ρίσκου) $Var(W_1)$ του τελικού πλούτου και της διακύμανσης $Var(R_p)$ της απόδοσης του χαρτοφυλακίου.

Παρατήρηση

Η συζήτηση πού προηγήθηκε σκιαγραφεί "το πρόβλημα του επενδυτή" με το οποίο θα ασχοληθούμε στην επόμενη ενότητα. Συγκεκριμένα, ο επενδυτής καλείται να επιλέξει μεταξύ εναλλακτικών χαρτοφυλακίων υιοθετώντας κάποιο κριτήριο επιλογής. Ποιό είναι αυτό το κριτήριο? Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, το κριτήριο επιλογής θα το αναζητήσουμε μέσα στο αναλυτικό πλαίσιο πού αναπτύξαμε στο πρώτο τμήμα του βιβλίου, πού είναι η λήψη αποφάσεων σε καθεστώς ρίσκου. Με άλλα λόγια, αν θεωρήσουμε τα εναλλακτικά χαρτοφυλάκια ως εναλλακτικές λοταρίες τότε μεταφερόμαστε εντός του θεωρητικού πλαισίου των Von Neuman - Morgenstern, στα πλαίσια του οποίου το κριτήριο επιλογής είναι η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας.

Το Πρόβλημα του Επενδυτή

Όπως είπαμε ήδη, το πρόβλημα της κατασκευής τού άριστου χαρτοφυλακίου κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ένα πρόβλημα λήψης αποφάσεως σε καθεστώς ρίσκου. Κατά συνέπεια το πρόβλημα αυτό θα πρέπει να διέπεται από την γενική αρχή η οποία υιοθετείται στην οποιαδήποτε λήψη αποφάσεων σε καθεστώς ρίσκου. Ποιά είναι αυτή η αρχή? Όπως συζητήσαμε εκτενώς στο πρώτο τμήμα του βιβλίου, η αρχή αυτή είναι η μεγιστοποίησης της αναμενόμενης χρησιμότητας (του λήπτη της απόφασης). Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να κάνουμε κάποια υπόθεση για το είδος της συνάρτησης χρησιμότητας πού έχει ο λήπτης της συγκεκριμένης απόφασης (ο οποίος την χρονική στιγμή $t = 0$ επιχειρεί να αποφασίσει για το άριστο χαρτοφυλάκιο). Εφεξής θα αναφερόμαστε στον λήπτη της συγκεκριμένης απόφασης ως ο "επενδυτής". Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι τετραγωνική. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση χρησιμότητας U του επενδυτή έχει την μορφή (ref: q1) πού είδαμε στο πρώτο τμήμα του βιβλίου και την οποία ξαναγράφουμε ως συνάρτηση του τελικού πλούτου W_1,

$$U(W_1) = bW_1 - \gamma W_1^2, \qquad \#$$

όπου η σταθερή a παραλήφθηκε χωρίς βλάβη της γενικότητας. Επίσης να θυμίσουμε ότι υποθέτουμε πάντα την ισχύ του παραμετρικού περιορισμού $W_1 \leq b/2\gamma$. Αντικαθιστώντας την σχέση (ref: fin_w1) στην (ref: q1a) παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση της χρησιμότητας του επενδυτή ως συνάρτηση της απόδοσης R_p του χαρτοφυλακίου p,

$$\begin{aligned}
U(R_p) &= b[(1+R_p)W_0] - \gamma[(1+R_p)W_0]^2 = \qquad \# \\
&= bW_0 + bW_0R_p - \gamma W_0^2(1+R_p)^2 = \\
&= bW_0 + bW_0R_p - \gamma W_0^2(1+R_p^2+2R_p) = \\
&= bW_0 + bW_0R_p - \gamma W_0^2 - \gamma W_0^2R_p^2 - 2\gamma W_0^2R_p = \\
&= (bW_0 - \gamma W_0^2) + (bW_0 - 2\gamma W_0^2)R_p - \gamma W_0^2R_p^2 = \\
&= \delta_0 + \delta_1R_p - \delta_2R_p^2, \qquad \#
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= bW_0 - \gamma W_0^2 \\
\delta_1 &= bW_0 - 2\gamma W_0^2 \\
\delta_2 &= \gamma W_0^2.
\end{aligned}$$

Από τη σχέση (ref: q2a) συμπεραίνουμε ότι όταν η χρησιμότητα του επενδυτή είναι τετραγωνική συνάρτηση του τελικού του πλούτου, W_1 (όπως δείχνει η σχέση (ref: q1a)), τότε θα είναι και τετραγωνική συνάρτηση της απόδοσης R_p τού χαρτοφυλακίου p (από την οποία εξαρτάται ο τελικός πλούτος).

Ποιό είναι το μεγάλο όφελος από την υπόθεση ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι τετραγωνική συνάρτηση του πλούτου και άρα και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου R_p? Όπως αναλύσαμε στο πρώτο τμήμα του βιβλίου, αν η συνάρτηση χρησιμότητας είναι τετραγωνική συνάρτηση της R_p τότε η αναμενόμενη χρησιμότητα τού επενδυτή είναι συνάρτηση *μόνο* του μέσου $E(R_p)$ και της διακύμανσης $Var(R_p)$ της R_p. Στη παραπάνω πρόταση η έμφαση είναι στο "μόνο". Πράγματι, αν η αναμενόμενη χρησιμότητα είναι συνάρτηση μόνο των δύο πρώτων ροπών της τυχαίας μεταβλητής R_p τότε αυτές οι δύο ροπές είναι τα μόνα πιθανοτικά χαρακτηριστικά της R_p πού υπεισέρχονται στο πρόβλημα του επενδυτή. Με άλλα λόγια, ο επενδυτής στη προσπάθεια του να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη χρησιμότητα του, στα μόνα κατανομικά χαρακτηριστικά της R_p πού δίνει σημασία είναι ο $E(R_p)$ και η $Var(R_p)$. Αυτό σημαίνει ότι δεν ενδιαφέρεται για τη γενικότερη κατανομή της R_p, γιά παράδειγμα δεν ενδιαφέρεται για την ασυμμετρία ή την κύρτωση πού επιδεικνύει η R_p.

Ας θυμηθούμε γιατί κάτω από την υπόθεση της τετραγωνικής χρησιμότητας (ref: q2a) η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή είναι συνάρτηση μόνο των $E(R_p)$ και η $Var(R_p)$. Εφαρμόζοντας τον τελεστή $E(\cdot)$ και στα δύο μέλη της (ref: q2a) έχουμε

$$E(U(R_p)) \ = E(\delta_0 + \delta_1 R_p - \delta_2 R_p^2) = \delta_0 + \delta_1 E(R_p) - \delta_2 E(R_p^2).$$

Ως γνωστό,

$$Var(R_p) = E(R_p^2) - [E(R_p)]^2, \qquad \#$$

απ' όπου τελικά συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} E(U(R_p)) \ &= \delta_0 + \delta_1 E(R_p) - \delta_2 \Big[Var(R_p) + [E(R_p)]^2 \Big] = \qquad \# \\ &= \delta_0 + \delta_1 \mu_{R_p} - \delta_2 (\sigma_{R_p}^2 + \mu_{R_p}^2). \end{aligned}$$

Ας αναλύσουμε λίγο περισσότερο τις συνέπειες της σχέσης (ref: ex_utq1) για το πρόβλημα του επενδυτή. Έστω ότι ο επενδυτής (ο οποίος έχει τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας) σκέφτεται να επιλέξει μεταξύ δύο χαρτοφυλακίων, των p και q. Έστω ότι η απόδοση R_p έχει κατανομή πιθανότητας f_{R_p} και η απόδοση R_q έχει κατανομή πιθανότητας f_{R_q}. Η κατανομή f_{R_p} είναι διαφορτική από την κατανομή f_{R_q}. Παρότι οι δύο τυχαίες μεταβλητές R_p και R_q δεν είναι ταυτόνομες, εντούτοις ας υποθέσουμε ότι έχουν τον ίδιο μέσο και την ίδια διακύμανση, δηλαδή

$$\mu_{R_p} = \mu_{R_q}$$

και

$$\sigma_{R_p}^2 = \sigma_{R_q}^2.$$

Το ερώτημα είναι ποιά είναι η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή από την επένδυση στο χαρτοφυλάκιο p και ποιά είναι η αναμενόμενη χρησιμότητα του από την επένδυση στο χαρτοφυλάκιο q. Από την σχέση (ref: ex_utq1) καταλαβαίνουμε αμέσως ότι οι δύο παραπάνω ισότητες συνεπάγονται την ισότητα

$$E(U(R_p)) \ = E(U(R_q)),$$

δηλαδή και τα δύο χαρτοφυλάκια οδηγούν στο ίδιο επίπεδο αναμενόμενης χρησιμότητας. Άρα ο επενδυτής είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο χαρτοφυλακίων (παρότι τα δύο χαρτοφυλάκια έχουν διαφορετικά γενικά πιθανοτικά χαρακτηριστικά - πέρα του μέσου και της διακύμανσης).

Από την σχέση (ref: ex_utq1) καταλαβαίνουμε αμέσως ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή εξαρτάται θετικά από την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου και αρνητικά απο την διακύμανση της απόδοση του χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα, η μερική παράγωγος της $E(U(R_p))$ ως πρός μ_{R_p} είναι

$$\frac{\partial E(U(R_p))}{\partial \mu_{R_p}} = \delta_1 - 2\delta_2\mu_{R_p}.$$

Όπως έχουμε δείξει στο πρώτο τμήμα του βιβλίου, κάτω από τον συνήθη παραμετρικό περιορισμό πού συνοδεύει την τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας, έχουμε

$$\frac{\partial E(U(R_p))}{\partial \mu_{R_p}} > 0.$$

Επίσης, η μερική παράγωγος της $E(U(R_p))$ ως πρός $\sigma^2_{R_p}$ είναι

$$\frac{\partial E(U(R_p))}{\partial \sigma^2_{R_p}} = -2\delta_2\sigma^2_{R_p} < 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή είναι αρνητική συνάρτηση της διακύμανσης των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

Το γεγονός ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή είναι συνάρτηση αποκλειστικά και μόνο τού μέσου μ_{R_p} και της διακύμανσης $\sigma^2_{R_p}$ (ή της τυπικής απόκλισης σ_{R_p}) των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου p (στη περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης χρησιμότητας) μας επιτρέπει να εξάγουμε τις καμπύλες αδιαφορίας του επενδυτή στο χώρο $(\mu_{R_p}, \sigma^2_{R_p})$ ή ισοδύναμα στον $(\mu_{R_p}, \sigma_{R_p})$. Ως γνωστόν μιά καμπύλη αδιαφορίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (σε κάποιο χώρο) για τα οποία η αναμενόμενη χρησιμότητα παραμένει σταθερή. Στη προκειμένη περίπτωση, ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής επιλέγει το επίπεδο αναμενόμενης χρησιμότητας $E(U(R_p)) = \overline{U}$. Από την (ref: ex_utq1) προκύπτει αμέσως ότι

$$\overline{U} = \delta_0 + \delta_1\mu_{R_p} - \delta_2(\sigma^2_{R_p} + \mu^2_{R_p}).$$

Λύνοντας ως προς $\sigma^2_{R_p}$,

$$\begin{aligned} \delta_2\sigma^2_{R_p} &= -\overline{U} - \delta_0 + \delta_1\mu_{R_p} - \delta_2\mu^2_{R_p} \Rightarrow \\ \sigma^2_{R_p} &= \frac{-\overline{U} - \delta_0}{\delta_2} + \frac{\delta_1}{\delta_2}\mu_{R_p} - \mu^2_{R_p}. \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει την καμπύλη αδιαφορίας του επενδυτή για επίπεδο αναμενόμενης χρησιμότητας ίσο με $\overline{U}$. Η σχέση αυτή είναι τετραγωνική στο χώρο $(\mu_{R_p}, \sigma_{R_p})$. Μεταβάλλοντας το $\overline{U}$ παίρνουμε μιά νέα καμπύλη αδιαφορίας. Το σύνολο όλων των δυνατών καμπυλών αδιαφορίας συνθέτει το λεγόμενο χάρτη αδιαφορίας του επενδυτή. Η κλίση των καμπυλών αδιαφορίας στο χώρο $(\mu_{R_p}, \sigma_{R_p})$ δίνεται από την παράγωγο $\frac{d\mu_{R_p}}{d\sigma_{R_p}}$, στην παραπάνω σχέση η οποία είναι (κάτω από τους περιορισμούς πού έχουμε υποθέσει γιά τις παραμέτρους της συνάρτησης χρησιμότητας) θετική. Επιπλέον μπορεί να δειχθεί ότι η δεύτερη παράγωγος $\frac{d^2\mu_{R_p}}{d\sigma^2_{R_p}}$ είναι επίσης θετική, το οποίο σημαίνει ότι οι καμπύλες αδιαφορίας είναι αύξουσες και κυρτές συναρτήσεις στο χώρο $(\mu_{R_p}, \sigma_{R_p})$. Η ακριβής μορφή τους καθορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων δ_1 και δ_2 (οι οποίες διαφέρουν από επενδυτή σε επενδυτή) στην συνάρτηση χρησιμότητας (ref: q2a). Το Διάγραμμα 1 δείχνει μιά τυπική καμπύλη αδιαφορίας ενός επενδυτή με τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας.

Διάγραμμα 1
Καμπύλες Αδιαφορίας - Τετραγωνική Συνάρτηση Χρησιμότητας

Πώς ερμηνεύουμε το παραπάνω μαθηματικό αποτέλεσμα ότι δηλαδή οι καμπύλες αδιαφορίας έχουν θετική κλίση στο χώρο (μ_{R_p},σ_{R_p})? Η ερμηνεία είναι η εξής: Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής επιλέγει ένα αρχικό σημείο ισορροπίας $(\mu_{R_p,A},\sigma_{R_p,A})$ πάνω σε μιά καμπύλη αδιαφορίας η οποία αντιστοιχεί σε ένα δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης χρησιμότητας $E(U(R_p)) \ = \overline{U}_1$. Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής μεταβαίνει ένα νέο σημείο στο οποίο το ρίσκο είναι υψηλότερο, $\sigma_{R_p,B} > \sigma_{R_p,A}$. Τι θα πρέπει να συμβεί στην αναμενόμενη απόδοση $\mu_{R_p,B}$ έτσι ώστε η αναμενόμενη χρησιμότητα να μείνει σταθερή στο επίπεδο $\overline{U}_1$? Από την σχέση (ref: ex_utq1) καταλαβαίνουμε αμέσως ότι αφού η αύξηση της διακύμανσης προκαλεί μείωση του επιπέδου αναμενόμενης χρησιμότητας, αυτό πού χρειάζεται να κάνει η αναμενόμενη απόδοση προκειμένου να παραμείνει η αναμενόμενη χρησιμότητα στο επίπεδο $\overline{U}_1$ είναι να αυξηθεί (από $\mu_{R_p,A}$ σε $\mu_{R_p,B}$). Με άλλα λόγια αν αυξηθεί το ρίσκο του χαρτοφυλακίου ο επενδυτής απαιτεί και αύξηση της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου, ως αντιστάθμισμα, προκειμένου η αναμενόμενη χρησιμότητα από την επένδυση του να παραμείνει σταθερή.

Η παραπάνω συζήτηση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αν ο επενδυτής έχει να επιλέξει μεταξύ εναλλακτικών χαρτοφυλακίων ίδιου ρίσκου θα επιλέξει το χαρτοφυλάκιο με την μέγιστη αναμενόμενη απόδοση. Εναλλακτικά, αν έχει να επιλέξει μεταξύ χαρτοφυλακίων με την ίδια αναμενόμενη απόδοση θα επιλέξει το χαρτοφυλάκιο με το μικρότερο ρίσκο (δηλαδή το χαρτοφυλάκιο του οποίου οι αποδόσεις έχουν τη μικρότερη τυπική απόκλιση). Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει από την υπόθεση πού κάναμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι τετραγωνική. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτή η επιλογή του επενδυτή ορίζει και το πρόβλημα αριστοποίησης κατά Markowitz. Συγκεκριμένα, ο επενδυτής καλείται να ελαχιστοποιήσει το ρίσκο του χαρτοφυλακίου για ένα δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης, ή να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου για ένα δεδομένο επίπεδο ρίσκου.

Η Υπόθεση της Κανονικής Κατανομής ως Εναλλακτική της Υπόθεσης της Τετραγωνικής Χρησιμότητας

Πριν εξετάσουμε αναλυτικά το πρόβλημα της αριστοποίησης κατά Markowitz, ας μείνουμε λίγο στην υπόθεση της τετραγωνικής χρησιμότητας (βάση της οποίας το πρόβλημα αριστοποίησης κατά Markowitz είναι αυτό πού μόλις περιγράψαμε) και ας εξετάσουμε το πόσο περιοριστική είναι. Όπως έχουμε ήδη αναλύσει στο πρώτο τμήμα του βιβλίου, η υπόθεση της τετραγωνικής συνάρτησης χρησιμότητας παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα. Ένα μειονέκτημα είναι ότι η τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας είναι (αυστηρά) αύξουσα μόνο για τιμές πλούτου $W_1 \leq b/2\gamma$. Ένα δεύτερο σοβαρό μειονέκτημα είναι ότι ο επενδυτής πού έχει τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας επιδεικνύει αυξανόμενη (και όχι φθίνουσα) αποστροφή στο κίνδυνο όσο ο πλούτος του αυξάνεται. Αυτό σημαίνει ότι όσο πιό πλούσιος γίνεται ένας επενδυτής τόσο θα μειώνεται η διάθεση του για ανάληψη ρίσκου, κάτι το οποίο δεν είναι εμπειρικά πιθανό. Αυτά τα προβλήματα γεννούν το ακόλουθο ερώτημα: Είναι δυνατόν να έχουμε την επιθυμητή ιδιότητα του να είναι η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή συνάρτηση αποκλειστικά και μόνο του μέσου και της διακύμανσης των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου, χωρίς να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι τετραγωνική?

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι καταφατική. Η υπόθεση της τετραγωνικής χρησιμότητας μπορεί να υποκατασταθεί από την υπόθεση της Κανονικότητας των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου R_p. Πράγματι, αν η τυχαία μεταβλητή R_p ακολουθεί την Κανονική κατανομή, τότε η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή γίνεται,

$$E(U(R_p)) = \int_{-\infty}^{\infty} U(R_p) f_{R_p}(R_p) dR_p$$

όπου

$$f_{R_p}(R_p) = \frac{1}{\sigma_{R_p}\sqrt{2\,\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{R_p - \mu_{R_p}}{\sigma_{R_p}}\right)^2\right\}.$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις καθίσταται σαφές ότι όταν δύο χαρτοφυλάκια p και q διαφέρουν μεταξύ τους ως πρός την αναμενόμενη χρησιμότητα πού προσφέρουν στον επενδυτή, δηλαδή αν

$$E(U(R_p)) \neq E(U(R_q))$$

τότε ο λόγος για αυτή την ανισότητα στις αναμενόμενες χρησιμότητες θα είναι η διαφορά στην πιθανοτική (κατανομική) συμπεριφορά των τυχαίων μεταβλητών R_p και R_q. Κάτω από την υπόθεση της Κανονικότητας αυτή η διαφορά στην πιθανοτική συμπεριφορά οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στο ότι οι R_p και R_q διαφέρουν ως προς τους μέσους τους και/ή στις διακυμάνσεις τους. Κατά συνέπεια, η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή θα είναι αποκλειστική συνάρτηση του μέσου και της διακύμανσης των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου για οποιαδήποτε συνάρτηση χρησιμότητας $U(R_p)$.

Συμπερασματικά, καταλήγουμε στα εξής: (i) αν η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι τετραγωνική, τότε η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή είναι αποκλειστική συνάρτηση του μ_{R_p} και $\sigma^2_{R_p}$ γιά οποιαδήποτε κατανομή των αποδόσεων R_p. (ii) Αν η κατανομή των αποδόσεων είναι Κανονική τότε η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή είναι αποκλειστική συνάρτηση του μ_{R_p} και $\sigma^2_{R_p}$ γιά οποιαδήποτε συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή.

Είναι η υπόθεση της Κανονικότητας των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου R_p μιά ρεαλιστική υπόθεση? Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι κατανομές των αποδόσεων των επιμέρους μετοχών $R_1, R_2, \ldots, R_n$ παρουσιάζουν σημαντικές αποκλίσεις από την Κανονικότητα ιδίως όταν εξετάζουμε δεδομένα με υψηλή συχνότητα παρατήρησης (π.χ. ημερήσιες ή εβδομαδιαίες αποδόσεις). Κατά συνέπεια το ερώτημα πού τίθεται είναι το εξής: Αφού οι $R_1, R_2, \ldots, R_n$ δεν είναι Κανονικές τυχαίες μεταβλητές (π.χ. επιδεικνύουν λεπτοκύρτωση), τότε και ο γραμμικός τους συνδυασμός

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \ldots + w_n R_n.$$

δεν θα είναι μιά μη-Κανονική τυχαία μεταβλητή? Η απάντηση είναι όχι απαραίτητα. Πράγματι, αν ο αριθμός n των μετοχών πού συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο p είναι αρκετά μεγάλος, τότε λόγω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος η τυχαία μεταβλητή R_p θα προσεγγίζει την Κανονική κατανομή. Βεβαίως η επίκληση του ΚΟΘ προυποθέτει ότι οι τυχαίες μεταβλητές $R_1, R_2, \ldots, R_n$ έχουν όλες πεπερασμένη διακύμανση. Αυτή η υπόθεση, όπως έχουμε αναλύσει σε προηγούμενο κεφάλαιο, είναι αμφισβητήσιμη.

Άριστα (Αποτελεσματικά) Χαρτοφυλάκια

Η ανάλυση της προηγούμενης ενότητας κατέδειξε ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή είναι θετική συνάρτηση της αναμενομενης απόδοσης μ_{R_p} του χαρτοφυλακίου και αρνητική συνάρτηση της διακύμανσης $\sigma^2_{R_p}$ αυτού. Επιπλέον, δείξαμε ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα είναι συνάρτηση αποκλειστικά και μόνο των μ_{R_p} και $\sigma^2_{R_p}$ κάτω από κάποια υπόθεση για τα "γούστα" τού επενδυτή (τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας) ή για τις πιθανοτικές πεποιθήσεις του επενδυτή (Κανονική κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου). Αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει ότι προκειμένου ο επενδυτής να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη χρησιμότητα του θα πρέπει να "ελαχιστοποιήσει" τον κίνδυνο $\sigma^2_{R_p}$ του χαρτοφυλακίου και να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση μ_{R_p} αυτού. Κατά συνέπεια το πρόβλημα του επενδυτή (κάτω από την υπόθεση της τετραγωνικής συνάρτησης χρησιμότητας και/ή της Κανονικής κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου) παίρνει μία από τις ακόλουθες δύο ισοδύναμες μορφές:

$$\left[\begin{array}{ccc} \text{Ελαχιστοποίηση του Ρίσκου του Χαρτοφυλακίου} & \text{γιά} & \text{Δεδομένο Επίπεδο Αναμενόμενης Απ} \\ & \text{ή} & \\ \text{Μεγιστοποίηση της Αναμενόμενης Απόδοσης} & \text{γιά} & \text{Δεδομένο Επίπεδο Ρίσκου} \end{array}\right.$$

Η μαθηματική διατύπωση των παραπάνω δύο μορφών του προβλήματος του επενδυτή είναι,

$$\left[\begin{array}{c} \min_{\mathbf{w}} \sigma^2_{R_p} \\ s.t. \\ E(R_p) = \mu_{R_p} \end{array}\right]$$

και

$$\left[\begin{array}{c} \max_{\mathbf{w}} \mu_{R_p} \\ s.t. \\ Var(R_p) = \sigma^2_{R_p} \end{array}\right].$$

Παρατηρήσεις

(i) Η παρούσα εκδοχή του προβλήματος του επενδυτή αναλύθηκε για πρώτη φορά από τον Αμερικανό οικονομολόγο Harry Markowitz το 1952 στο άρθρο του "Portfolio Selection" πού δημοσιεύτηκε στο Journal of Finance. Εξαιτίας αυτού τού λόγου συχνά η διαδικασία πού θα περιγράψουμε στη συνέχεια ονομάζεται αριστοποίηση κατά Markowitz.

(ii) Η παρουσία του δείκτη $\mathbf{w}$ στο $\min_{\mathbf{w}} \sigma_{R_p}^2$ υποδηλώνει ότι θα ελαχιστοποιήσουμε την διακύμανση $\sigma_{R_p}^2$ ως προς τα σταθμά $w_1, w_2, \ldots, w_n$ το οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι θα θεωρήσουμε την $\sigma_{R_p}^2$ ως συνάρτηση των $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (μεταβλητές) ενώ τα σ_{ij} πού επίσης εμφανίζονται στην $\sigma_{R_p}^2$ θα αντιμετωπιστούν ως σταθερές.

Στη συνέχεια θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην πρώτη εκδοχή του προβλήματος πού είναι η ελαχιστοποίηση της διακύμανσης των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου για δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης. Το πρόβλημα στην μαθηματική του διάσταση είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιά αντικειμενικής συνάρτησης κάτω από κάποιο περιορισμό. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η $\sigma_{R_p}^2$ την οποία θεωρούμε ως συνάρτηση των μεταβλητών $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Αυτό σημαίνει ότι αναζητούμε το διάνυσμα τιμών $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ για το οποίο η συνάρτηση $\sigma_{R_p}^2$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της και την ίδια στιγμή ικανοποιεί τον περιορισμό $E(R_p) = \mu_{R_p}$. Πριν προχωρήσουμε ας δούμε την αναλυτική έκφραση της $\sigma_{R_p}^2$ ως συνάρτηση των σταθμίσεων $w_1, w_2, \ldots, w_n$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{R_p}^2 &= Var(R_p) = Var(w_1 R_1 + w_2 R_2 + \ldots + w_n R_n) = \qquad \# \\
&= w_1^2 Var(R_1) + w_2^2 Var(R_2) + \ldots + w_n^2 Var(R_n) + \\
&\quad + w_1 w_2 Cov(R_1, R_2) + \ldots + w_1 w_n Cov(R_1, R_n) + \\
&\quad + w_2 w_1 Cov(R_2, R_1) + \ldots + w_2 w_n Cov(R_2, R_n) + \\
&\quad \ldots \\
&\quad + w_n w_1 Cov(R_n, R_1) + \ldots + w_n w_{n-1} Cov(R_n, R_{n-1}).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας πιό οικονομική σημειογραφία, η παραπάνω έκφραση γίνεται,

$$\sigma_{R_p}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}. \qquad \#$$

όπου

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = Var(R_i).$$

Παρατηρήσεις

(i) Από τις παραπάνω εκφράσεις για την διακύμανση του χαρτοφυλακίου, καταλαβαίνουμε ότι η $\sigma_{R_p}^2$ είναι συνάρτηση των n διακυμάνσεων των αποδόσεων των n περιουσιακών στοιχείων (μετοχών) και των $n(n-1)$ συνδιακυμάνσεων αυτών των αποδόσεων. Όπως είπαμε παραπάνω στην διαδικασία αριστοποίησης τόσο οι διακυμάνσεις όσο και οι συνδιακυμάνσεις θα θεωρούνται σταθερές.

(ii) Λόγω της γνωστής ιδιότητας $Cov(R_i, R_j) = Cov(R_j, R_i)$ ο αριθμός των παραμέτρων πού υπεισέρχονται στον ορισμό της $\sigma_{R_p}^2$ είναι n διακυμάνσεις και $n(n-1)/2$ συνδιακυμάνσεις. Για παράδειγμα, αν $n = 3$ τότε η αντίστοιχη $\sigma_{R_p}^2$ είναι συνάρτηση τριών διακυμάνσεων και τριών συνδιακυμάνσεων, δηλαδή συνολικά έξι παραμέτρων.

Στη συνέχεια ας εξετάσουμε λίγο αναλυτικότερα και τον περιορισμό $E(R_p) = \mu_{R_p}$. Αυτή η έκφραση γίνεται,

$$E(R_p) = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + \ldots + w_n\mu_n = \mu_{R_p}$$

όπου $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ είναι οι αναμενόμενες αποδόσεις των n μετοχών και μ_{R_p} είναι ένα προ-επιλεγμένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης για ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο p.

Έχοντας διατυπώσει το πρόβλημα του επενδυτή ως ένα πρόβλημα αριστοποίησης μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη λύση του. Πριν εξετάσουμε την μέθοδο επίλυσης του προβλήματος αυτού ας ξεκαθαρίσουμε για μιά ακόμα φορά ποιές είναι οι "μεταβλητές" του προβλήματος, δηλαδή οι ποσότητες ως προς τις οποίες θα αναζητήσουμε τη λύση και ποιές είναι οι παράμετροι του προβλήματος οι οποίες θα θεωρηθούν γνωστές (και ως συνάρτηση των οποίων θα εκφραστεί η λύση). Οι μεταβλητές είναι οι n σταθμίσεις $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Αυτό σημαίνει ότι αυτό πού αναζητούμε είναι οι "άριστες" τιμές των $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Όπως έχουμε πεί, κάθε σύνολο τιμών $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ ορίζει και ένα χαρτοφυλάκιο p. Κατά συνέπεια μιά άριστη λύση $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ θα ορίζει και ένα άριστο χαρτοφυλάκιο. Οι παράμετροι του προβλήματος πού θεωρούνται γνωστές είναι οι n διακυμάνσεις, οι $n(n-1)/2$ συνδιακυμάνσεις και οι n αναμενόμενες αποδόσεις των n μετοχών. Πώς ο επενδυτής μαθαίνει τις τιμές αυτών των παραμέτρων? Δυστυχώς οι πραγματικές τιμές αυτών των παραμέτρων είναι άγνωστες στον επενδυτή. Το καλύτερο πού μπορεί να κάνει είναι να τις εκτιμήσει από τα διαθέσιμα στατιστικά στοιχεία για τις αποδόσεις των n μετοχών. Κατά συνέπεια στο πρακτικό επίπεδο, ο βαθμός στον οποίο η λύση του προβλήματος θα μας οδηγήσει στην κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου το οποίο να είναι πράγματι άριστο εξαρτάται από το αν οι εκτιμήσεις των αναγκαίων παραμέτρων είναι ακριβείς εκτιμήσεις (π.χ αμερόληπτες και συνεπείς) των πραγματικών πλην όμως άγνωστων παραμέτρων.

Τέλος χρειάζεται να κάνουμε ακόμα μιά παρατήρηση πριν προχωρήσουμε στη λύση του προβλήματος αριστοποίησης πού διατυπώσαμε παραπάνω. Αυτή η παρατήρηση αφορά τα σταθμά $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Τι ακριβώς εκφράζουν αυτά τα σταθμά? Αυτό πού εκφράζουν είναι ποσοστά επί του συνολικού κεφαλαίου επένδυσης πού επενδύονται σε καθένα από τα n περιουσιακά στοιχεία. Το άθροισμα αυτών των ποσοστών ισούται πάντα με την μονάδα,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \qquad \#$$

Επίσης κάποια από αυτά τα σταθμά μπορεί να είναι αρνητικά. Για παράδειγμα, έστω ότι $n = 2$ και $w_1 = 150\%$ και $w_2 = -50\%$ ή ισοδύναμα, $w_1 = 1.5$ και $w_2 = -0.5$. Τι σημαίνει αρνητική στάθμιση? Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής έχει αρχικό κεφάλαιο πρός επένδυση ίσο με 1000 ευρώ. Πλην όμως επιθυμεί να επενδύσει στη μετοχή 1 ποσό ίσο με 1500 ευρώ. Πώς θα βρεί τα 500 ευρώ πού τού λείπουν? Θα πουλήσει μετοχές αξίας 500 ευρώ από την μετοχή 2. Σε αυτή τη περίπτωση $w_1 = 1.5$, $w_2 = -0.5$ και $w_1 + w_2 = 1$.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να λύσουμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίσης του ρίσκου του χαρτοφυλακίου, $\min_{\mathbf{w}} \sigma^2_{R_p}$, κάτω από τους περιορισμούς $E(R_p) = \mu_{R_p}$ και $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Συγκεκριμένα καλούμαστε να λύσουμε το πρόβλημα

$$\left[\begin{array}{c} \min_{\mathbf{w}} \sigma^2_{R_p} \\ s.t. \\ E(R_p) = \mu_{R_p} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \end{array}\right]$$

Πιό αναλυτικά,

$$\left[\begin{array}{c} \min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\ s.t. \\ \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = \mu_{R_p} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \end{array}\right]$$

Από τη στιγμή πού έχουμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιάς συνάρτησης κάτω από δύο περιορισμούς, θα καταφύγουμε στην μέθοδο του Lagrange. Συγκεκριμένα, θα ορίσουμε πρώτα την Λαγκρανζιανή αντικειμενική συνάρτηση, L,

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda_1\left(\mu_{R_p} - \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i\right) + \lambda_2\left(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\right). \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Ο πολλαπλασιασμός της προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση με το 1/2 γίνεται καθαρά για λόγους αναλυτικής ευκολίας. Ως γνωστόν αυτός ο πολλαπλασιασμός δεν επιφέρει καμμιά αλλαγή στην λύση πού θα ακολουθήσει.

(ii) Οι παράμετροι λ_1 και λ_2 στην (ref: lagr1) είναι οι γνωστοί *πολλαπλασιαστές του Lagrange*.

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης του δεδομένου προβλήματος ελαχιστοποίησης. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους $\partial L/\partial w_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ καθώς και τις $\partial L/\partial \lambda_1$ και $\partial L/\partial \lambda_2$ και κατόπιν να τις θέσουμε ίσες με το μηδέν. Με αυτό το τρόπο θα προκύψει ένα σύστημα $n+2$ εξισώσεων με $n+2$ αγνώστους, τους $w_1, w_2, \ldots, w_n, \lambda_1$ και λ_2.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial w_1} &= w_1\sigma_{11} + w_2\sigma_{12} + \ldots + w_n\sigma_{1n} - \lambda_1\mu_1 - \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial w_2} &= w_1\sigma_{21} + w_2\sigma_{22} + \ldots + w_n\sigma_{2n} - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2 = 0 \\
&\bullet \\
&\bullet \\
&\bullet \\
\frac{\partial L}{\partial w_n} &= w_1\sigma_{n1} + w_2\sigma_{n2} + \ldots + w_n\sigma_{nn} - \lambda_1\mu_n - \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + \ldots + w_n\mu_n - \mu_{R_p} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= w_1 + w_2 + \ldots + \mu_n - 1 = 0
\end{aligned}
\qquad \#
$$

Το παραπάνω σύστημα είναι το σύστημα $n+2$ γραμμικών εξισώσεων (ως πρός τα $w_1, w_2, \ldots, w_n, \lambda_1, \lambda_2$) με $n+2$ αγνώστους για το οποίο μιλήσαμε παραπάνω. Για να το λύσουμε, το εκφράζουμε πρώτα σε όρους διανυσμάτων και πινάκων ως εξής:

$$
\begin{bmatrix}
\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & \mu_1 & 1 \\
\sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & \mu_2 & 1 \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & \mu_n & 1 \\
\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & 0 & 0 \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_1 \\ w_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ w_n \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ \mu_{R_p} \\ 1
\end{bmatrix}
\qquad \#
$$

και σε συμπαγή μορφή,

$$\mathbf{Az} = \mathbf{b} \qquad \#$$

όπου **A** είναι ο πίνακας διαστάσεων $(n+2) \times (n+2)$ των συντελεστών του γραμμικού συστήματος (ref: lins2), **z** είναι το διάνυσμα στήλη, διαστάσεων $(n+2) \times 1$ των αγνώστων του συστήματος και **b** είναι το διάνυσμα στήλη, διαστάσεων $(n+2) \times 1$ των σταθερών όρων του συστήματος.

Παρατήρηση

Το διάνυσμα **z** περιέχει το διάνυσμα **w** των σταθμών συν τους δύο πολλαπλασιαστές του Lagrange, δηλαδή,

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ w_n \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Υποθέτοντας ότι ο αντίστροφος πίνακας $\mathbf{A}^{-1}$ υπάρχει (το οποίο εξασφαλίζεται αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων Σ είναι θετικά ορισμένος), το σύστημα (ref: lins2) έχει μοναδική λύση ως πρός $\mathbf{z}$. Η λύση αυτή μπορεί να βρεθεί ως εξής: Προ-πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (ref: lins3) με τον πίνακα $\mathbf{A}^{-1}$ έχουμε,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

απ'όπου, με βάση ότι $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (ο $(n+2) \times (n+2)$ μοναδιαίος πίνακας) προκύπτει,

$$\mathbf{I}\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

και τελικά

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Παρατηρώντας την λύση (ref: solut1) καταλαβαίνουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{z}$ και κατά συνέπεια και τα άριστα σταθμά $\mathbf{w}$ είναι συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης στόχου μ_{R_p} πού έχουμε θέσει για το χαρτοφυλάκιο. Αυτό συμβαίνει γιατί το $\mathbf{z}$ (και άρα το $\mathbf{w}$) είναι συνάρτηση του $\mathbf{b}$ μέσα στο οποίο εμπεριέχεται το μ_{R_p}. Αυτό σημαίνει ότι αν αλλάξουμε την αναμενόμενη απόδοση στόχο π.χ από $\mu_{R_p} = 1\%$ σε $\mu_{R_p} = 2\%$ αυτομάτως θα αλλάξει και η λύση του προβλήματος, δηλαδή τα άριστα σταθμά ή το άριστο χαρτοφυλάκιο.

(ii) Η παραπάνω παρατήρηση υποδηλώνει μιά σχέση μεταξύ του άριστου χαρτοφυλακίου, όπως προκύπτει από την διαδικασία αριστοποίησης του Markowitz, και της αναμενόμενης απόδοσης στόχου μ_{R_p}. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι δεν υπάρχει ένα και μοναδικό άριστο χαρτοφυλάκιο γενικά. Αντίθετα, υπάρχει ένα και μοναδικό άριστο χαρτοφυλάκιο *γιά κάθε επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης στόχου* μ_{R_p}. Κατά συνέπεια έχουμε ένα σύνολο από άριστα ή αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια. Αυτό το σύνολο έχει μιά διαγραμματική απεικόνιση, την οποία θα εξετάσουμε στη συνέχεια, και η οποία ονομάζεται "αποτελεσματικό σύνορο" (efficient frontier).

(iii) Έστω ότι για ένα δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης μ_{R_p} του χαρτοφυλακίου, η άριστη λύση (το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο) είναι το $\mathbf{w}_{\mu_{R_p}}^{\top} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)_{\mu_{R_p}}$. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την διακύμανση αυτού του χαρτοφυλακίου (η οποία φυσικά θα είναι η μικρότερη δυνατή για το δεδομένο επίπεδο μ_{R_p}) κάνοντας χρήση της σχέσης (ref: por_var2),

$$\sigma^2_{R_p,\mu_{R_p}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{i,\mu_{R_p}} w_{j,\mu_{R_p}} \sigma_{ij}, \qquad \#$$

ή κάνοντας χρήση πινάκων,

$$\sigma^2_{R_p,,\mu_{R_p}} = \mathbf{w}^{\top}_{\mu_{R_p}} \Sigma \mathbf{w}_{\mu_{R_p}}.$$

Παράδειγμα

Έστω τρείς μετοχές, οι 1, 2 και 3 για τις οποίες υποθέτουμε ότι το διάνυσμα των αναμενόμενων αποδόσεων τους είναι το

$$\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ E(R_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} \qquad \#$$

και ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων τους είναι ο ακόλουθος,

$$\Sigma = Cov(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -3.5 & 12 \\ -3.5 & 32 & 19 \\ 12 & 19 & 16 \end{bmatrix}. \qquad \#$$

Θέτουμε ως αναμενόμενη απόδοση στόχο για το χαρτοφυλάκιο την $\mu_{R_p} = 1.7\%$. Ποιό είναι το άριστο χαρτοφυλάκιο $\mathbf{w}^{\top}_{1.7} = (w_1, w_2, w_3)_{1.7}$ γιά αυτή την αναμενόμενη απόδοση? Κατ'αρχήν αξίζει να σημειώσουμε ότι οι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων των τριών αυτών μετοχών είναι

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} = \frac{-3.5}{\sqrt{40 \times 32}} = -0.098,$$

$$\rho_{13} = \frac{\sigma_{13}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{33}}} = \frac{12}{\sqrt{40 \times 16}} = 0.474.$$

και

$$\rho_{23} = \frac{\sigma_{23}}{\sqrt{\sigma_{22}\sigma_{33}}} = \frac{19}{\sqrt{32 \times 16}} = 0.839.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αποδόσεις των μετοχών 1 και 2 επιδεικνύουν αρνητική συσχέτιση (αν και χαμηλή), ενώ οι αποδόσεις μεταξύ των 1 και 2 και μεταξύ των 2 και 3 επιδεικνύουν θετική συσχέτιση. Διαιασθητικά, όσο μικρότερη είναι η συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των δύο μετοχών τόσο μεγαλύτερα θα είναι τα οφέλη από την διαφοροποίηση. Αυτό (επίσης διαισθητικά) σημαίνει ότι η διαδικασία αριστοποίησης η οποία (εκ σχεδιασμού) ευνοεί την συμμετοχή μετοχών με όσο το δυνατόν μικρότερες συσχετίσεις θα τείνει να προμοδοτεί τις 1 και 2 εις βάρος της 3. Βέβαια αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μετοχή 3 έχει την μικρότερη διακύμανση από τις τρείς μετοχές (γεγονός πού ευνοεί την συμμετοχή της στο χαρτοφυλάκιο) όπως επίσης και την μικρότερη αναμενόμενη απόδοση (γεγονός πού αποθαρρύνει τη συμμετοχή της στο χαρτοφυλάκιο από το οποίο ζητήσαμε αναμενόμενη απόδοση 1.7%).

Προκειμένου να υπολογίσουμε το άριστο χαρτοφυλάκιο $\mathbf{w}_{1.7}^{\top} = (w_1, w_2, w_3)_{1.7}$ χρησιμοποιούμε τη σχέση (ref: solut1) με

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{12} & \mu_1 & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \mu_2 & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \mu_3 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -3.5 & 12 & 2.2 & 1 \\ -3.5 & 32 & 19 & 1.3 & 1 \\ 12 & 19 & 16 & 0.4 & 1 \\ 2.2 & 1.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος πίνακας $\mathbf{A}^{-1}$ είναι ίσος με

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0685 & -0.0136 & 0.0068 & 0.292 & -0.0478 \\ -0.0136 & 0.0273 & -0.0136 & 0.525 & -0.347 \\ 0.0068 & -0.0136 & 0.0068 & -0.818 & 1.395 \\ 0.292 & 0.525 & -0.818 & 0.188 & -0.0478 \\ -0.0478 & -0.347 & 1.395 & -0.0478 & -14.96 \end{bmatrix},$$

μέσω του οποίου καταλήγουμε στη λύση,

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.0685 & -0.0136 & 0.0068 & 0.292 & -0.0478 \\ -0.0136 & 0.0273 & -0.0136 & 0.525 & -0.347 \\ 0.0068 & -0.0136 & 0.0068 & -0.818 & 1.395 \\ 0.292 & 0.525 & -0.818 & 0.188 & -0.0478 \\ -0.0478 & -0.347 & 1.395 & -0.0478 & -14.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.449 \\ 0.546 \\ 0.005 \\ -0.158 \\ -15.77 \end{bmatrix}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το άριστο χαρτοφυλάκιο για αναμενόμενη απόδοση ίση με 1.7% είναι ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο περιέχει τις μετοχές 1,2, και 3 σε αντίστοιχα ποσοστά, w_1, w_2 και w_3 ίσα με

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.449 \\ 0.546 \\ 0.005 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις

(i) Ως αναμενόταν, το άθροισμα των τριών σταθμών είναι ίσο με την μονάδα, αφού η λύση υπολογίστηκε κάτω από τον περιορισμό $w_1 + w_2 + w_3 = 1$.

(ii) Επίσης η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου, για τα συγκεκριμένα σταθμά είναι

$$\mu_{R_p} = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + \ldots + w_n\mu_n = 0.449 \times 2.2 + 0.546 \times 1.3 + 0.005 \times 0.4 = 1.7$$

το οποίο είναι επίσης αναμενόμενο αφού η λύση υπολογίστηκε κάτω από αυτό το περιορισμό.

(iii) Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου $(w_1, w_2, w_3)^\top = (0.449, 0.546, 0.005)$ είναι ίση με,

$$\begin{aligned} \sigma^2_{R_p,\mu_{R_p}} &= w_1^2\sigma_{11} + w_2^2\sigma_{22} + w_3^2\sigma_{33} + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23} = \\ &= 0.449^2 \times 40 + 0.546^2 \times 32 + 0.005^2 \times 16 + \\ &\quad + 2 \times 0.449 \times 0.546 \times (-3.5) + 2 \times 0.449 \times 0.005 \times 12 + 2 \times 0.546 \times 0.005 \times 19 \\ &= 16.04. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, η διακύμανση του άριστου χαρτοφυλακίου μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας χρήση πινάκων, ως

$$\begin{aligned} \sigma^2_{R_p,\mu_{R_p}} &= \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} = \\ &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.449 & 0.546 & 0.005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 & -3.5 & 12 \\ -3.5 & 32 & 19 \\ 12 & 19 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.449 \\ 0.546 \\ 0.005 \end{bmatrix} = 16.04. \end{aligned}$$

(iv) Η λύση του προβλήματος κατέληξε ότι για αναμενόμενη απόδοση στόχο ίση με 1.7%, το άριστο χαρτοφυλάκιο (αυτό πού επιτυγχάνει αυτή την απόδοση και ταυτόχρονα έχει την μικρότερη διακύμανση) είναι το $\mathbf{w}_{1.7}^\top = (0.449, 0.546, 0.005)$. Αυτό πού παρατηρούμε είναι ότι η λύση κατέληξε σε περίπου τα ίδια ποσοστά επένδυσης για τις μετοχές 1 και 2 και σε σχεδόν μηδενική επένδυση στην μετοχή 3. Γιατί συνέβη αυτό? Κατ' αρχήν αυτό πού απαιτήσαμε από την λύση είναι να κατανείμει τα ποσοστά με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζει αναμενόμενη απόδοση για το χαρτοφυλάκιο ίση με 1.7%. Η αναμενόμενη απόδοση για την μετοχή 3 είναι μόλις 0.4% το οποίο σημαίνει ότι αν επενδύαμε ένα μεγάλο ποσοστό στην μετοχή 3 δεν θα μπορούσαμε να επιτύχουμε την απόδοση στόχο. Επιπλέον, η συνδιακύμανση μεταξύ των μετοχών 1 και 2 είναι αρνητική το οποίο σημαίνει ότι έχουμε μεγάλα οφέλη διαφοροποίησης αν επενδύσουμε σε αυτές τις δύο μετοχές. Αντίθετα, οι συνδιακυμάνσεις των 1 και 3 και 2 και 3 είναι θετικές το οποίο σημαίνει ότι η προσθήκη της μετοχής 3 δεν προσφέρει σημαντικά οφέλη διαφοροποίησης.

Προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα το πώς τα δεδομένα του προβλήματος (οι αναμενόμενες αποδόσεις, διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις των τριών μετοχών) αλληλεπιδρούν με το στόχο πού θέτουμε για την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου στην εύρεση της άριστης λύσης, ας αλλάξουμε τα δεδομένα του προβλήματος. Συγκεκριμένα, αντί να υποθέσουμε ότι η συνδιακύμανση των μετοχών 2 και 3 είναι $\sigma_{23} = 19$ θα υποθέσουμε ότι είναι $\sigma_{23} = -19$. Αυτό σημαίνει ότι η συσχέτιση μεταξύ των 2 και 3 είναι $\rho_{23} = -0.839$ δηλαδή έντονα αρνητική. Αυτό δημιουργεί ισχυρό κίνητρο να συμπεριλάβουμε τις μετοχές 2 και 3 στο χαρτοφυλάκιο λόγω τού υψηλού οφέλους διαφοροποίησης πού αυτές προσφέρουν. Από την άλλη η αναμενόμενη απόδοση στόχος για το χαρτοφυλάκιο παραμένει στο 1.7%. Αυτό δημιουργεί αντικίνητρο στο να συμπεριλάβουμε την μετοχή 3 της οποίας η αναμενόμενη απόδοση παραμένει στο πολύ χαμηλό επίπεδο του 0.4%. Αντίθετα, ευνοεί την επένδυση στη μετοχή 1 της οποία η αναμενόμενη απόδοση είναι 2.2%. Η λύση του προβλήματος καταλήγει στο χαρτοφυλάκιο $\mathbf{w}_{1.7(2)}^{\top} = (0.517, 0.409, 0.074)$. Σε σχέση με το $\mathbf{w}_{1.7}^{\top} = (0.449, 0.546, 0.005)$, το $\mathbf{w}_{1.7(2)}^{\top}$ όντως επενδύει λίγο παραπάνω στη μετοχή 3. Πλην όμως η αναμενόμενη απόδοση στόχος, η οποία παραμένει στο πολύ υψηλό επίπεδο για τα μέτρα της μετοχής 3 του 1.7%, καθιστά το ποσοστό επένδυσης στη μετοχή 3 πολύ μικρό σε σχέση με αυτό στις μετοχές 1 και 2.

Η κατάσταση αλλάζει δραματικά αν μειώσουμε την αναμενόμενη απόδοση στόχο για το χαρτοφυλάκιο από 1.7% στο 0.7%. Οι αναμενόμενες αποδόσεις των 1, 2 και 3 παραμένουν στα επίπεδα 2.2%, 1.3% και 0.4% αντίστοιχα. Ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ είναι αυτός πού υποθέσαμε στην τελευταία περίπτωση, με $\sigma_{23} = -19$. Τώρα πλέον η αναμενόμενη απόδοση στόχος είναι κοντά στην αναμενόμενη απόδοση της μετοχής 3. Αυτό σημαίνει ότι η προσθήκη των μετοχών 2 και 3 στο χαρτοφυλάκιο είναι επιβεβλημένη με δεδομένη την υψηλή αρνητική συσχέτιση πού επιδεικνύουν. Πράγματι, το άριστο χαρτοφυλάκιο για αυτή τη περίπτωση είναι το $\mathbf{w}_{0.7}^{\top} = (-0.05, 0.435, 0.615)$. Παρατηρούμε ότι η μετοχή 1 όχι μόνο δεν συμμετέχει με θετική στάθμιση στο χαρτοφυλάκιο αλλά ο επενδυτής προβαίνει σε "ανοιχτή πώληση" της μετοχή 1 (short-selling) προκειμένου να υπερ-επενδύσει στις 2 και 3. Τι σημαίνει ανοιχτή πώληση? Σημαίνει ότι ο επενδυτής δανείζεται (από κάποιον broker) μετοχές 1 και τις πουλάει την ίδια στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι ο επενδυτής ανοίγει μια "short θέση" στη μετοχή 1. Το συμπέρασμα από αυτή την άσκηση είναι ότι όταν η αναμενόμενη απόδοση στόχος είναι αρκετά χαμηλή, τότε η υψηλή αναμενόμενη απόδοση της μετοχής 1 μπαίνει σε δεύτερη μοίρα και αυτό πού ανακύπτει ως σημαντικότερο είναι η αρνητική συσχέτιση μεταξύ των μετοχών 2 και 3.

Άριστα Χαρτοφυλάκια κάτω από Ανισοτικούς Περιορισμούς

Το πρόβλημα αριστοποίησης πού αναλύσαμε παραπάνω εμπίπτει στην κατηγορία των προβλημάτων αριστοποίησης μιάς αντικειμενικής συνάρτησης (εν προκειμένω της $\sigma^2_{R_p} = g(w_1, w_2, \ldots, w_n)$) κάτω από περιορισμούς πού εκφράζονται με την μορφή "ισοτήτων". Πολλές φορές όμως επιθυμούμε να υπολογίσουμε την άριστη λύση κάτω από επιπρόσθετους περιορισμούς οι οποίοι λαμβάνουν τη μορφή ανισοτήτων. Για παράδειγμα, αν αποκλείσουμε την δυνατότητα "ανοιχτών πωλήσεων" (short selling) τότε θα πρέπει να επιθέσουμε τους περιορισμούς

$$w_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Παρατήρηση

Ορισμένα χρηματιστήρια απαγορεύουν τις ανοιχτές πωλήσεις (τουλάχιστον για κάποια assets). Επίσης ορισμένοι θεσμικοί επενδυτές όπως συνταξιοδοτικά ταμεία δεν επιτρέπουν στους διαχειριστές των αποθεματικών τους πολιτική ανοιχτών πωλήσεων.

Μιά άλλη περίπτωση είναι να θέσουμε εκ των προτέρων κάποια όρια μέσα στα οποία θέλουμε να κινείται το ποσοστό επένδυσης σε κάθε ένα από τα n περιουσιακά στοιχεία (π.χ. μετοχές). Γιά παράδειγμα, έστω $n = 3$ και ο επενδυτής επιθυμεί να μην επενδύσει πάνω από 50% στη μετοχή 1, και πάνω από 40% στη μετοχή 2. Επιπλέον, η επένδυσή του στη μετοχή 3 θέλει να κινείται μεταξύ του 10% και του 70%. Σε αυτή τη περίπτωση το πρόβλημα αριστοποίησης πού καλείται να λύσει επαυξάνεται με τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 0 &\leq w_1 \leq 0.5 \\ 0 &\leq w_2 \leq 0.4 \\ 0.1 &\leq w_3 \leq 0.7. \end{aligned}$$

Θα πρέπει να προσέξουμε ώστε οι ανισοτικοί περιορισμοί πού επιβάλλουμε να μην είναι εξαιρετικά περιοριστικοί κατά τρόπο πού να μην επιτρέπουν την επένδυση του συνολικού μας επιθυμητού κεφαλαίου. Για παράδειγμα, αν οι τρείς παραπάνω περιορισμοί γίνουν

$$\begin{aligned} 0 &\leq w_1 \leq 0.3 \\ 0 &\leq w_2 \leq 0.3 \\ 0.1 &\leq w_3 \leq 0.3, \end{aligned}$$

τότε το άθροισμα των άνω ορίων είναι 0.9, το οποίο σημαίνει ότι ακόμα και αν φτάσουμε στο άνω όριο επένδυσης και για τις τρείς μετοχές πάλι θα μπορούμε να επενδύσουμε μόνο το 90% του κεφαλαίου μας. Αυτή η διαπίστωση γενικεύεται ως εξής: Αν συμβολίσουμε με $u_1, u_2, \ldots, u_n$ τα άνω όρια των n ανισοτικών περιορισμών (ένας γιά κάθε μία από τις n μετοχές) και με $l_1, l_2, \ldots, l_n$ τα κάτω όρια των n περιορισμών, τότε θα πρέπει να ισχύουν οι εξής περιορισμοί (επι των περιορισμών),

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \geq 1$$

και

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \leq 1.$$

Στη περίπτωση κατά την οποία το πρόβλημα αριστοποίησης εμπλέκει ανισοτικούς περιορισμούς, η μέθοδος του Lagrange πού ακολουθήσαμε στην προηγούμενη ενότητα δεν εφαρμόζεται. Αντίθετα, οι συνθήκες αριστοποίησης είναι οι λεγόμενες Karush-Kuhn-Tucker συνθήκες. Σε κάθε περίπτωση, η δυνατότητα μας να αποκτήσουμε αναλυτική λύση στο πρόβλημα αριστοποίησης είναι εξαιρετικά περιορισμένη και συνήθως αυτό πού κάνουμε είναι να καταφύγουμε στις λεγόμενες "αριθμητικές λύσεις". Επίσης ένα σημαντικό θέμα πού ανακύπτει από την παρουσία ανισοτικών περιορισμών (και της συνεπακόλουθης απουσίας δυνατότητας για ανοιχτές πωλήσεις) είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει λύση για το δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης πού έχει θέσει ως στόχο ο επενδυτής.

Το Αποτελεσματικό Σύνορο (n περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο)

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αναλύσουμε την έννοια του αποτελεσματικού συνόρου, γιά την περίπτωση πού το σύνολο των προς επένδυση περιουσιακών στοιχείων είναι n assets με κίνδυνο (δεν υπάρχει, προς το παρόν, η δυνατότητα επένδυσης σε asset χωρίς κίνδυνο). Τι είναι το αποτελεσματικό σύνορο (efficient frontier)? Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στο χώρο $(\sigma_{R_p}, \mu_{R_p})$ (ή εναλλακτικά στο χώρο $(\sigma^2_{R_p}, \mu_{R_p})$) τα οποία αντιστοιχούν στα άριστα χαρτοφυλάκια. Με άλλα λόγια, κάθε σημείο στο αποτελεσματικό σύνορο αντιπροσωπεύει ένα άριστο χαρτοφυλάκιο. Πιό συγκεκριμένα, όπως είδαμε εκτενώς στα προηγούμενα, γιά κάθε επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης στόχου μ_{R_p} αντιστοιχεί ένα άριστο χαρτοφυλάκιο $\mathbf{w}_{\mu_{R_p}}$ το οποίο χαρακτηρίζεται από την ελάχιστη δυνατή τυπική απόκλιση σ_{R_p} (ή την ελάχιστη διακύμανση $\sigma^2_{R_p}$). Μεταβάλλοντας διαρκώς την αναμενόμενη απόδοση στόχο, παίρνουμε και το αντίστοιχο άριστο χαρτοφυλάκιο με την αντίστοιχη ελάχιστη διακύμανση. Αν απεικονίσουμε όλα αυτά τα σημεία $(\sigma_{R_p}, \mu_{R_p})$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων όπου ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στην τυπική απόκλιση και ο κάθετος στην αναμενόμενη απόδοση του εκάστοτε χαρτοφυλακίου, προκύπτει μία καμπύλη η οποία είναι το αποτελεσματικό σύνορο. Η καμπύλη αυτή είναι μιά "παραβολή" στο χώρο $(\sigma^2_{R_p}, \mu_{R_p})$ ή μιά "υπερβολή" στο χώρο $(\sigma_{R_p}, \mu_{R_p})$. Η διαγραμματική απεικόνιση του αποτελεσματικού συνόρου στο χώρο $(\sigma_{R_p}, \mu_{R_p})$ παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 2.

Διάγραμμα 2
Το Αποτελεσματικό Σύνορο

Οποιοδήποτε σημείο κάτω από το αποτελεσματικό σύνορο είναι ένα εφικτό, πλην όμως, μη-άριστο χαρτοφυλάκιο. Οποιοδήποτε σημείο πάνω από το αποτελεσματικό σύνορο είναι ένα επιθυμητό, πλην όμως μη-εφικτό, χαρτοφυλάκιο.

Κατά συνέπεια το αποτελεσματικό σύνορο αντιπροσωπεύει όλα εκείνα τα χαρτοφυλάκια πού είναι αφενός μεν εφικτά και αφετέρου τα πιό επιθυμητά (μέσα στο σύνολο των εφικτών). Πιό συγκεκριμένα, ας πάρουμε το χαρτοφυλάκιο A πάνω στο αποτελεσματικό σύνορο και ας το συγκρίνουμε με το χαρτοφυλάκιο B κάτω από το σύνορο. Το A έχει τυπική απόκλιση ίση με σ_{R_A} και αναμενόμενη απόδοση ίση με μ_{R_A}. Το χαρτοφυλάκιο B έχει τυπική απόκλιση σ_{R_B} ίση με σ_{R_A} αλλά η αναμενόμενη απόδοση του μ_{R_B} είναι μικρότερη από αυτή του A. Κατά συνέπεια, κάθε επενδυτής του οποίου η αναμενόμενη χρησιμότητα είναι αποκλειστική συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης και της τυπικής απόκλισης του χαρτοφυλακίου θα επιλέξει το A από το B, αφού το A για το ίδιο ρίσκο με το B προσφέρει στον επενδυτή μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση.

Από την προηγούμενη συζήτηση καθίσταται εμφανές ότι το αποτελεσματικό σύνορο εκφράζεται από μία σχέση μεταξύ μ_{R_p} και σ_{R_p}. Ποιά είναι η ακριβής μορφή αυτής της σχέσης γιά την οποία ήδη αναφέραμε ότι θα είναι υπερβολή (ή παραβολή αν αντί για την τυπική απόκλιση χρησιμοποιήσουμε τη διακύμανση $\sigma^2_{R_p}$)? Για να εξάγουμε την ακριβή μορφή αυτής της σχέσης, θα πρέπει να προβούμε σε κάποια μαθηματική προεργασία. Αυτή ξεκινά από το να λύσουμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της $\sigma^2_{R_p}$ κάτω από τους δύο γνωστούς περιορισμούς χρησιμοποιώντας μιά (ελαφρώς) διαφορετική διαδικασία.

Παρατήρηση

Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, η νέα αυτή διαδικασία επίλυσης του προβλήματος ελαχιστοποίησης της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου θα μας οδηγήσει σε λύση απευθείας για το **w** και όχι για το **z** το οποίο εκτός του **w** περιέχει και τους πολλαπλασιαστές του Lagrange.

Πιό συγκεκριμένα, θα επιχειρήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα υπολογίζοντας την παράγωγο της Λαγκρανζιανής ως πρός το διάνυσμα των σταθμών **w**. Σε αυτή τη διατύπωση, το πρόβλημα πού καλούμαστε να λύσουμε είναι το εξής:

$$\left[\begin{array}{c} \min_{\mathbf{w}} \sigma^2_{R_p} = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} \\ s.t. \\ \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_{R_p} \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{1} = 1. \end{array}\right]$$

Παρατηρήσεις

(i) Το διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}$ είναι το διαστάσεων $(n \times 1)$ διάνυσμα των αναμενόμενων αποδόσεων των n assets με ρίσκο.

(ii) Το διάνυσμα $\mathbf{1}$ είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων $(n \times 1)$ το οποίο περιέχει ως στοιχεία αποκλειστικά και μόνο μονάδες.

Η Λαγκρανζιανή πού αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη διατύπωση του προβλήματος είναι η

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} + \lambda_1(\mu_{R_p} - \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu}) + \lambda_2(1 - \mathbf{w}^\top \mathbf{1}) \qquad \#$$

η οποία δεν είναι άλλη από την (ref: lagr1) εκφρασμένη με τη βοήθεια διανυσμάτων και πινάκων. Οι συνθήκες πρώτης τάξης για την ύπαρξη ελαχίστου εμπλέκουν την παράγωγο της L ως προς $\mathbf{w}$, δηλαδή την παράγωγο μιάς συνάρτησης ως προς ένα διάνυσμα. Οι συνθήκες αυτές παίρνουν τη μορφή,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \Sigma\mathbf{w} - \lambda_1\boldsymbol{\mu} - \lambda_2\mathbf{1} = \mathbf{0} \qquad \#$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \mu_{R_p} - \mathbf{w}^\top\boldsymbol{\mu} = 0 \qquad \#$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - \mathbf{w}^\top\mathbf{1} = 0 \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Η παράγωγος $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}}$ είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων $(n \times 1)$. Αυτό μπορούμε να το διασταυρώσουμε εξετάζοντας τις διαστάσεις της έκφρασης στο δεξί μέλος της αντίστοιχης ισότητας. Συγκεκριμένα είναι
$(n \times n) \cdot (n \times 1) - (n \times 1) - (n \times 1) = (n \times 1)$. Επίσης το $\mathbf{0}$ στη πρώτη εξίσωση είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων διαστάσεων $(n \times 1)$ το οποίο περιέχει ως στοιχεία αποκλειστικά και μόνο μηδενικά.

(ii) Οι παράγωγοι $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}$ και $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}$ είναι διαστάσεων 1×1 (βαθμωτά).

Υποθέτοντας ότι ο πίνακας Σ είναι θετικά ορισμένος, συμπεραίνουμε ότι ο αντίστροφος πίνακας Σ^{-1} υπάρχει. Αυτό μας επιτρέπει να προβούμε στις εξής πράξεις: Από την (ref: foc) έχουμε,

$$\Sigma\mathbf{w} = \lambda_1\boldsymbol{\mu} + \lambda_2\mathbf{1}$$

και προ-πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με τον Σ^{-1},

$$\Sigma^{-1}\Sigma\mathbf{w} = \Sigma^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\mu} + \Sigma^{-1}\lambda_2\mathbf{1}$$

και άρα

$$\mathbf{w} = \lambda_1\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda_2\Sigma^{-1}\mathbf{1}. \qquad \#$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει το $\mathbf{w}$ ως συνάρτηση των δεδομένων του προβλήματος $\boldsymbol{\mu}$ και Σ καθώς και των πολλαπλασιαστών λ_1 και λ_2. Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να εξάγουμε μιά εναλλακτική έκφραση για το $\mathbf{w}$ η οποία να μην εξαρτάται από τα λ_1 και λ_2. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να βρούμε εκφράσεις για τα λ_1 και λ_2 οι οποίες να είναι συναρτήσεις των δεδομένων του προβλήματος, δηλαδή των $\boldsymbol{\mu}$, Σ και μ_{R_p}. Προς αυτή τη κατεύθυνση ξεκινάμε με την σχέση (ref: foc_a) από την οποία προκύπτει ότι

$$\mathbf{w}^\top\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{w} = \mu_{R_p}.$$

Αντικαθιστώντας σε αυτή τη σχέση το $\mathbf{w}$ από την (ref: solut2) έχουμε,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{w} = \mu_{R_p} &\Rightarrow \\ \boldsymbol{\mu}^\top(\lambda_1\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda_2\Sigma^{-1}\mathbf{1}) = \mu_{R_p} &\Rightarrow \\ \boldsymbol{\mu}^\top\lambda_1\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^\top\lambda_2\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} = \mu_{R_p} &\Rightarrow \end{aligned}$$

απ’ όπου τελικά καταλήγουμε,

$$\lambda_1 \boldsymbol{\mu}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda_2 \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} = \mu_{R_p}. \qquad \#$$

Αυτή η εξίσωση έχει τούς δύο αγνώστους λ_1 και λ_2 πού μας ενδιαφέρουν. Αυτό σημαίνει ότι χρειαζόμαστε άλλη μιά εξίσωση πού να περιέχει τους δύο αυτούς αγνώστους, έτσι ώστε να καταλήξουμε να έχουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Προς αυτή τη κατεύθυνση, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (ref: foc_b) απο την οποία προκύπτει ότι

$$\mathbf{w}^\top \mathbf{1} = \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1.$$

Αντικαθιστώντας και πάλι το $\mathbf{w}$ από την (ref: solut2) έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^\top (\lambda_1 \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda_2 \Sigma^{-1} \mathbf{1}) &= 1 \Rightarrow \\ \mathbf{1}^\top \lambda_1 \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{1}^\top \lambda_2 \Sigma^{-1} \mathbf{1} &= 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

απ’ όπου τελικά καταλήγουμε,

$$\lambda_1 \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda_2 \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} = 1. \qquad \#$$

Αυτή είναι η δεύτερη εξίσωση με τους αγνώστους λ_1 και λ_2 πού αναζητούσαμε. Κατά συνέπεια έχουμε καταλήξει σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων, τις (ref: aux1) και (ref: aux2) σε δύο αγνώστους τους λ_1 και λ_2.

Παρατήρηση

Στο παραπάνω σύστημα όλοι οι συντελεστές των αγνώστων λ_1 και λ_2 δηλαδή οι

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\mu}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} \end{gathered}$$

είναι βαθμωτά (δηλαδή διαστάσεων 1×1).

Λύνοντας (έπειτα από αλγεβρικές παράξεις) καταλήγουμε στις εξής εκφράσεις για του πολλαπλασιαστές λ_1 και λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{\Gamma \mu_{R_p} - A}{\Delta} \qquad \#$$

$$\lambda_2 = \frac{B - A \mu_{R_p}}{\Delta} \qquad \#$$

με

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} \qquad \# \\ A &= \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ B &= \boldsymbol{\mu}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

και

$$\Delta = B\Gamma - A^2. \qquad \#$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των λ_1 και λ_2 από τις (ref: l1n) και (ref: l2n) αντίστοιχα, στην (ref: solut2) καταλήγουμε σε μιά έκφραση για το w η οποία είναι συνάρτηση μόνο των δεδομένων του προβλήματος, ήτοι των $\boldsymbol{\mu}$, Σ και μ_{R_p} :

$$\mathbf{w} = \left[\frac{\Gamma\mu_{R_p} - A}{\Delta} \right]\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \left[\frac{B - A\mu_{R_p}}{\Delta} \right]\Sigma^{-1}\mathbf{1}.$$

Απομονώνοντας την αναμενόμενη απόδοση στόχο μ_{R_p} του χαρτοφυλακίου, η παραπάνω έκφραση γίνεται

$$\mathbf{w} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1\mu_{R_p} \qquad \#$$

όπου τα $\mathbf{g}_0$ και $\mathbf{g}_1$ είναι διανύσματα διαστάσεων $(n \times 1)$ και ίσα με

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= \frac{1}{\Delta}(B\Sigma^{-1}\mathbf{1} - A\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}) \qquad \# \\ \mathbf{g}_1 &= \frac{1}{\Delta}(\Gamma\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} - A\Sigma^{-1}\mathbf{1}). \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

(i) Η λύση (ref: solut3) ταυτίζεται με τη λύση (ref: solut1) στην οποία καταλήξαμε προηγουμένως. Δηλαδή οι τιμές των $w_1, w_2, \ldots, w_n$ από την (ref: solut3) είναι ίσες με τις τιμές των n πρώτων σειρών του διανύσματος z της (ref: solut1).

(ii) Η λύση (ref: solut3) εκφράζει τα άριστα σταθμά $\mathbf{w}$ ως συνάρτηση αποκλειστικά και μόνο των δεδομένων του προβλήματος, δηλαδή των $\boldsymbol{\mu}$, Σ και μ_{R_p}. Για δεδομένα (και σταθερά) $\boldsymbol{\mu}$, Σ, η (ref: solut3) μας λέει ότι τα σταθμά $\mathbf{w}$ είναι γραμμική συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης στόχου μ_{R_p}.

Έχοντας καταλήξει στη σχέση (ref: solut3) μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στον αντικειμενικό στόχο πού θέσαμε στην παρούσα ενότητα πού είναι να εξάγουμε την αλγεβρική έκφραση για το αποτελεσματικό σύνορο. Αφού η σχέση πού αναζητούμε είναι μεταξύ της $\sigma^2_{R_p}$ (ή της σ_{R_p}) και της μ_{R_p} είναι λογικό να επικαλεστούμε τη σχέση πού εκφράζει τη διακύμανση του χαρτοφυλακίου η οποία ως γνωστόν είναι η ακόλουθη,

$$\sigma^2_{R_p} = \mathbf{w}^\top\Sigma\mathbf{w}.$$

Αντικαθιστώντας το $\mathbf{w}$ από την (ref: solut3) έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma^2_{R_p} &= (\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1\mu_{R_p})^\top\Sigma(\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1\mu_{R_p}) = \\ &= [\mathbf{g}_0^\top + (\mathbf{g}_1\mu_{R_p})^\top]\Sigma(\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1\mu_{R_p}) = \\ &= (\mu_{R_p}\mathbf{g}_1^\top + \mathbf{g}_0^\top)\Sigma(\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1\mu_{R_p}). \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις και αντικαθιστώντας τα διανύσματα $\mathbf{g}_0$ και $\mathbf{g}_1$ με τις σχέσεις πού εκφράζονται στις (ref: param1) καταλήγουμε,

$$\sigma^2_{R_p} = \frac{\Gamma}{\Delta}\left(\mu_{R_p} - \frac{A}{\Gamma}\right)^2 + \frac{1}{\Gamma} \qquad \#$$

Η σχέση (ref: eff_front) είναι η αλγεβρική σχέση πού αναζητούμε η οποία περιγράφει το αποτελεσματικό σύνορο στο χώρο $(\sigma^2_{R_p}, \mu_{R_p})$ και η οποία είναι, όπως ήδη αναφέραμε, παραβολή. Η αντίστοιχη σχέση στο χώρο $(\sigma_{R_p}, \mu_{R_p})$ είναι υπερβολή, με κορυφή στο σημείο $(1/\sqrt{\Gamma}, A/\Gamma)$.

Η παραπάνω σχέση, όπως είπαμε περιγράφει τη σχέση μεταξύ της ελάχιστης διακύμανσης $\sigma^2_{R_p}$ και της αναμενόμενης απόδοσης μ_{R_p} των άριστων χαρτοφυλακίων. Κάθε ζεύγος $(\sigma^2_{R_p}, \mu_{R_p})$ αντιστοιχεί και σε ένα διαφορετικό πλην όμως άριστο χαρτοφυλάκιο. Αυτό μας γεννά το ερώτημα του ποιά είναι η ελάχιστη διακύμανση μεταξύ όλων των (ελάχιστων) διακυμάνσεων των άριστων χαρτοφυλακίων. Με άλλα λόγια ποιά είναι η "καθολικά ελάχιστη διακύμανση" (global minimum variance)? Από τη σχέση (ref: eff_front) παρατηρούμε ότι η διακύμανση $\sigma^2_{R_p}$ είναι το άθροισμα δύο όρων του $\frac{\Gamma}{\Delta}\left(\mu_{R_p} - \frac{A}{\Gamma}\right)^2$ και του $\frac{1}{\Gamma}$. Αφού ο πρώτος όρος είναι πάντα μη-αρνητικός, συνεπάγεται ότι η $\sigma^2_{R_p}$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν ο πρώτος όρος γίνει ίσος με το μηδέν, δηλαδή όταν

$$\mu_{R_p} = \frac{A}{\Gamma}. \qquad \#$$

Γιά αυτή την αναμενόμενη απόδοση στόχο, η ελάχιστη διακύμανση είναι η καθολικά ελάχιστη διακύμανση σ^2_{gmv} και είναι ίση με

$$\sigma^2_{gmv} = \frac{1}{\Gamma} \qquad \#$$

Το επόμενο ερώτημα πού προκύπτει λογικά σε αυτό το σημείο είναι το ποιό είναι το χαρτοφυλάκιο με την καθολικά ελάχιστη διακύμανση. Αυτό σημαίνει να βρούμε το διάνυσμα $\mathbf{w}_{gmv}$ πού αποτελεί το χαρτοφυλάκιο της καθολικά ελάχιστης διακύμανσης. Κατ’αρχήν ξεκινάμε με την διαπίστωση ότι αφού το χαρτοφυλάκιο $\mathbf{w}_{gmv}$ πού αναζητούμε είναι άριστο, θα βρίσκεται πάνω στο αποτελεσματικό σύνορο και άρα θα ικανοποιεί τη σχέση (ref: solut2), δηλαδή

$$\mathbf{w}_{gmv} = \lambda_1 \Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda_2 \Sigma^{-1}\mathbf{1}. \qquad \#$$

Γιά το χαρτοφυλάκιο $\mathbf{w}_{gmv}$ οι πολλαπλασιαστές του Lagrange παίρνουν τις τιμές (κάνοντας χρήση της (ref: mv1))

$$\lambda_1 = \frac{\Gamma\mu_{R_p} - A}{\Delta} = \frac{\Gamma\frac{A}{\Gamma} - A}{\Delta} = \frac{A - A}{\Delta} = 0 \qquad \#$$

$$\lambda_2 = \frac{B - A\mu_{R_p}}{\Delta} = \frac{B - A\frac{A}{\Gamma}}{\Delta} = \frac{B - \frac{A^2}{\Gamma}}{\Delta} = \frac{\frac{B\Gamma - A^2}{\Gamma}}{\Delta} = \frac{\frac{B\Gamma - A^2}{\Gamma}}{B\Gamma - A^2} = \frac{1}{\Gamma}. \qquad \#$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές πίσω στην (ref: wgmv1) καταλήγουμε στο ότι το χαρτοφυλάκιο με την καθολικά ελάχιστη διακύμανση είναι το

$$\mathbf{w}_{gmv} = \frac{1}{\Gamma}\Sigma^{-1}\mathbf{1}$$

το οποίο με αντικατάσταση του Γ από το ίσο του στην (ref: par1a) τελικά καταλήγουμε στην σχέση

$$\mathbf{w}_{gmv} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{1}}. \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Το χαρτοφυλάκιο της καθολικά ελάχιστης διακύμανσης, $\mathbf{w}_{gmv}$ διαγραμματικά απεικονίζεται από το σημείο Γ στο Διάγραμμα 2.

(ii) Όπως είναι φυσικό, το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης είναι ταυτοχρόνως και το χαρτοφυλάκιο με την ελάχιστη δυνατή αναμενόμενη απόδοση μ_{R_p}.

(iii) Το χαρτοφυλάκιο $\mathbf{w}_{gmv}$ καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τον πίνακα Σ. Άρα η μόνη πληροφορία πού χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης είναι οι διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις των n assets. Αυτό σημαίνει ότι η πληροφορία σχετικά με τις αναμενόμενες αποδόσεις του κάθε asset, δηλαδή η γνώση του διανύσματος $\boldsymbol{\mu}$ μας είναι περιττή.

Το επόμενο ερώτημα είναι το εξής: Από όλα τα άριστα χαρτοφυλάκια πού βρίσκονται πάνω στο αποτελεσματικό σύνορο, ποιό θα επιλέξει ένας δεδομένος επενδυτής Α? Η επιλογή του επενδυτή Α εξαρτάται από τον βαθμό αποφυγής του κινδύνου πού επιδεικνύει ο Α, ο οποίος με την σειρά του εξαρτάται από την "κοιλότητα" της συνάρτησης χρησιμότητας του, όπως φαίνεται και από το μέτρο αποστροφής κινδύνου (ref: ap1) των Arrow-Pratt πού αναλύσαμε στο πρώτο τμήμα του βιβλίου. Πράγματι, ο βαθμός αποστροφής του κινδύνου για τον Α εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την συνάρτηση χρησιμότητας του, η οποία συνάρτηση χρησιμότητας ορίζει τις καμπύλες αδιαφορίας του επενδυτή Α στο χώρο $(\sigma_{R_p}, \mu_{R_p})$. Έστω ότι οι καμπύλες αδιαφορίας του Α είναι αυτές πού παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 3.

Διάγραμμα 3
Η Επιλογή Άριστου Χαρτοφυλακίου του Επενδυτή

Το χαρτοφυλάκιο πού επιλέγει ο Α είναι το A_p το οποίο είναι το σημείο επαφής της καμπύλης αδιαφορίας K_2 με το αποτελεσματικό σύνορο. Ένας άλλος επενδυτής, Β με διαφορετική συνάρτηση χρησιμότητας και ως εκ τούτου με διαφορετικές καμπύλες αδιαφορίας και διαφορετικό βαθμό αποστροφής του κινδύνου θα επέλεγε ένα άλλο χαρτοφυλάκιο διαφορετικό από το A_p αλλά πάντα πάνω στο αποτελεσματικό σύνορο. Όσο λιγότερο αποστρέφεται το κίνδυνο ένας επενδυτής, τόσο οι αντίστοιχες καμπύλες αδιαφορίας του (οι οποίες καθορίζονται αποκλειστικά και μόνο από την συνάρτηση χρησιμότητας του) θα τείνουν να εφάπτονται σε σημεία στο δεξί τμήμα του αποτελεσματικού συνόρου. Αντίθετα, οι επενδυτές πού αποστρέφονται περισσότερο τον κίνδυνο θα τείνουν να έχουν καμπύλες αδισφορίας οι οποίες θα εφάπτονται σε σημεία στο αριστερό τμήμα του αποτελεσματικού συνόρου. Οι επενδυτές με τον μεγαλύτερο βαθμό αποστροφής κινδύνου θα επιλέγουν το χαρτοφυλάκιο με την καθολικά ελάχιστη διακύμανση.

Η Εισαγωγή ενός Επιπρόσθετου Περιουσιακού Στοιχείου χωρίς Κίνδυνο

Έως τώρα η ανάλυση έγινε κάτω από την υπόθεση ότι στην Οικονομία υπάρχουν μόνο n assets με κίνδυνο και κανένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο. Στην ενότητα αυτή θα αλλάξουμε αυτή την υπόθεση θεωρώντας ότι στην Οικονομία υπάρχουν n assets με κίνδυνο και ένα επιπλέον asset χωρίς κίνδυνο (risk-free asset) το οποίο δίνει σίγουρη απόδοση R_f. Το ερώτημα είναι πώς μεταβάλλεται η ανάλυση της προηγούμενης ενότητας όταν στην εικόνα προστεθεί και το $(n+1)$ –asset χωρίς κίνδυνο. Όπως θα δούμε στη συνέχεια τα αποτελέσματα πού εξάγαμε στην προηγούμενη ενότητα μεταβάλλονται σημαντικά. Τώρα πλέον δεν υπάρχουν άπειρα άριστα χαρτοφυλάκια αποτελούμενα από τα n assets με κίνδυνο αλλά μόνο ένα και μοναδικό. Με άλλα λόγια όλοι οι επενδυτές ανεξαρτήτως του βαθμού αποστροφής στο κίνδυνο πού επιδεικνύουν θα διακρατούν το ίδιο χαρτοφυλάκιο από τα n assets με κίνδυνο. Η διαφορά μεταξύ τους είναι ότι ο κάθε επενδυτής αναλόγως του πόσο αποστρέφεται το κίνδυνο θα διακρατεί διαφορετικά αναλογία μεταξύ του χαρτοφυλακίου των n assets με κίνδυνο και του asset χωρίς κίνδυνο. Για παράδειγμα, έστω ο επενδυτής Α ο οποίος αποστρέφεται μεν τον κίνδυνο αλλά όχι σε μεγάλο βαθμό. Αυτός μοιράζει το κεφάλαιο του μεταξύ του χαρτοφυλακίου των n assets με κίνδυνο και του asset χωρίς κίνδυνο σε αναλογία 80-20. Έστω ο επενδυτής Β ο οποίος αποστρέφεται τον κίνδυνο πολύ περισσότερο από τον Α. Αυτός μοιράζει το κεφάλαιο του σε αντίστοιχη αναλογία 30-70. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το αποτελεσματικό σύνορο αλλάζει στην περίπτωση της εισαγωγής ενός asset χωρίς κίνδυνο.

Παρατήρηση

Η εισαγωγή του asset χωρίς κίνδυνο επιτρέπει στον επενδυτή είτε να δανειστεί είτε να δανείσει με επιτόκιο R_f. Το γεγονός ότι το νέο αυτό asset είναι χωρίς κίνδυνο μεταφράζεται στο ότι η διακύμανση της απόδοσης R_f είναι ίση με το μηδέν.

Έστω $\mathbf{w}$ να είναι το διάνυσμα των σταθμών επένδυσης στα n assets με κίνδυνο και

$$w_f = 1 - \sum_{i=1}^{n} w_i = (1 - \mathbf{w}^\top \mathbf{1})$$

να είναι το ποσοστό επένδυσης στο asset χωρίς κίνδυνο. Η απόδοση του χαρτοφυλακίου p είναι

$$R_p = \mathbf{w}^\top \mathbf{R} + (1 - \mathbf{w}^\top \mathbf{1}) R_f.$$

Αυτό σημαίνει ότι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$E(R_p) = \mu_{R_p} = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} + (1 - \mathbf{w}^\top \mathbf{1}) R_f. \qquad \#$$

Παρατήρηση

Είναι προφανές ότι ο περιορισμός του να είναι το άθροισμα των σταθμών σε όλα (τα $n+1$) assets ίσο με την μονάδα έχει ήδη επιβληθεί στην παραπάνω διατύπωση αφού,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i + w_f = \sum_{i=1}^{n} w_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\right) = 1$$

Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι ίση με

$$Var(R_p) = \sigma_{R_p}^2 = \mathbf{w}^\top \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} \qquad \#$$

εξαιτίας του ότι τόσο η διακύμανση της R_f όσο και οι συνδιακυμάνσεις της R_f με τις αποδόσεις στο **R** είναι ίσες με το μηδέν (αφού η R_f δεν είναι τυχαία μεταβλητή αλλά σταθερή.

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι η διακύμανση του χαρτοφυλακίου στη περίπτωση της εισαγωγής ενός asset χωρίς κίνδυνο δεν αλλάζει αλλά συνεχίζει να καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τις διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων των n assets με κίνδυνο.

Με βάση τα παραπάνω το πρόβλημα του επενδυτή παίρνει τη μορφή,

$$\begin{bmatrix} \min_{\mathbf{w}} \sigma_{R_p}^2 = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} \\ s.t. \\ \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} + (1 - \mathbf{w}^\top \mathbf{1}) R_f = \mu_{R_p} \end{bmatrix}. \qquad \#$$

Το πρόβλημα είναι και πάλι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιάς αντικειμενικής συνάρτησης κάτω από ισοτικούς περιορισμούς. Να σημειωθεί ότι ο δεύτερος περιορισμός του να είναι το άθροισμα των σταθμών ίσο με την μονάδα έχει ήδη επιβληθεί εμμέσως στην παραπάνω διατύπωση του προβλήματος. Κατά συνέπεια το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με την μέθοδο του Lagrange. Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση είναι η,

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} + \lambda[\mu_{R_p} - \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} - (1 - \mathbf{w}^\top \mathbf{1}) R_f]. \qquad \#$$

Παίρνοντας τις συνθήκες πρώτης τάξης,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \Sigma \mathbf{w} - \lambda \boldsymbol{\mu} - \lambda R_f \mathbf{1} = \mathbf{0} \qquad \#$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mu_{R_p} - \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} - (1 - \mathbf{w}^\top \mathbf{1}) R_f = 0 \qquad \#$$

δημιουργούμε ένα σύστημα $n + 1$ εξισώσεων με $n + 1$ αγνώστους, τα n σταθμά πού περιέχονται στο διάνυσμα **w** και το λ. Λύνοντας ως προς τους αγνώστους έχουμε

$$\mathbf{w} = \lambda \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}) \qquad \#$$

και

$$\mu_{R_p} = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} + (1 - \mathbf{w}^\top \mathbf{1}) R_f = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} + R_f - \mathbf{w}^\top \mathbf{1} R_f = \qquad \#$$

$$= R_f + \mathbf{w}^\top (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1} R_f). \qquad \#$$

Αντικαθιστώντας την (ref: t_rf1) στην (ref: t_rf2) θα προκύψει μια εξίσωση με μόνο άγνωστο το λ :

$$\begin{aligned}\mu_{R_p} &= R_f + \mathbf{w}^\top(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}R_f) = R_f + [\lambda\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1})]^\top(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}R_f) = \\ &= R_f + (\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1})^\top\Sigma^{-1}\lambda(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}R_f) = \\ &= R_f + \lambda(\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1})^\top\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}R_f).\end{aligned}$$

Στη τελευταία εξίσωση ο όρος $(\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1})^\top\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}R_f)$ είναι διαστάσεων 1×1 είναι δηλαδή βαθμωτό και άρα μπορούμε αλγεβρικά να τον διαχειριστούμε ως ένα πραγματικό αριθμό (ο οποίος επιπλέον είναι και διάφορος του μηδενός). Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως πρός λ,

$$\begin{aligned}\mu_{R_p} - R_f = \lambda(\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1})^\top\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}R_f) \Rightarrow \\ \lambda = \frac{\mu_{R_p} - R_f}{(\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1})^\top\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}R_f)}\end{aligned}$$

ή

$$\lambda = \frac{\mu_{R_p} - R_f}{\Psi} \quad \#$$

με

$$\Psi = (\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1})^\top\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1}R_f).$$

Τέλος αντικαθιστώντας την τιμή του λ από την (ref: lag_fr2) στην (ref: t_rf1) βρίσκουμε τη λύση για το $\mathbf{w}$,

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\mu_{R_p} - R_f}{\Psi}\right)\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1}). \quad \#$$

Παρατήρηση

Έχοντας υπολογίσει τα σταθμά $\mathbf{w}$ των n assets με κίνδυνο από την (ref: weight_fr3) μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε και το ποσοστό w_f πού επενδύουμε στο asset χωρίς κίνδυνο, απλώς παίρνοντα τη διαφορά,

$$w_f = 1 - \mathbf{w}^\top\mathbf{1}.$$

Από την σχέση (ref: weight_fr3) παρατηρούμε ότι τα σταθμά με τα οποία τα n assets με κίνδυνο συμμετέχουν στο χαρτοφυλάκιο είναι γραμμική συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης στόχου μ_{R_p} κάτι πού ίσχυε και στην περίπτωση πού είχαμε μόνο τα n assets με κίνδυνο και κανένα asset χωρίς κίνδυνο. Πράγματι, η (ref: weight_fr3)μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \left(\frac{\mu_{R_p} - R_f}{\Psi}\right)\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1}) = & \# \\ &= \frac{\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1})}{\Psi}\mu_{R_p} - \frac{R_f}{\Psi}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1}) = & \# \\ &= \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1\mu_{R_p} & \#\end{aligned}$$

με

$$\mathbf{h}_0 = -\frac{R_f}{\Psi}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1})$$

και

$$\mathbf{h}_1 = \frac{\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_f\mathbf{1})}{\Psi}.$$

Συγκρίνοντας την σχέση (ref: weight_rf3b) με την (ref: solut3) παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις (και εν τη απουσία και εν τη παρουσία ενός asset χωρίς κίνδυνο) τα σταθμά **w** είναι γραμμική συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης στόχου μ_{R_p}.

Παρατηρήσεις

(i) Ας δούμε πώς η σχέση (ref: weight_rf3b) καταλήγει να είναι όταν $n = 1$ δηλαδή όταν έχουμε μόνο ένα asset με κίνδυνο (και ένα χωρίς κίνδυνο). Οι παράμετροι $\mathbf{h}_0$ και $\mathbf{h}_1$ γίνονται,

$$h_0 = -\frac{R_f}{\Psi}\frac{1}{\sigma^2}(\mu - R_f)$$

$$h_1 = \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\Psi}(\mu - R_f)$$

με

$$\Psi = \frac{(\mu - R_f)^2}{\sigma^2}$$

και μ και σ^2 είναι η αναμενόμενη απόδοση και η διακύμανση του asset με κίνδυνο. Κατά συνέπεια, η στάθμιση με την οποία το asset με κίνδυνο εισέρχεται στο χαρτοφυλάκιο είναι

$$w = h_0 + h_1\mu_{R_p}.$$

Με δεδομένο ότι $h_1 \geq 0$, όσο μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση θέτουμε τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η συμμετοχή w του asset με κίνδυνο στο χαρτοφυλάκιο.

(ii) Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία η αναμενόμενη απόδοση του asset με κίνδυνο είναι ίση με την σίγουρη απόδοση R_f του asset χωρίς κίνδυνο, δηλαδή $\mu = R_f$. Σε αυτή τη περίπτωση οι παράμετροι h_0 και h_1 γίνονται ίσες με το μηδέν και άρα και η στάθμιση w του asset με κίνδυνο γίνεται ίση με το μηδέν. Αυτό το αποτέλεσμα είναι διαισθητικά εμφανές. Όταν η αναμενόμενη απόδοση του asset με κίνδυνο είναι ίση με την σίγουρη απόδοση του asset χωρίς κίνδυνο τότε δεν υπάρχει κανένας λόγος να επενδύσουμε στο asset με κίνδυνο.

Το Αποτελεσματικό Σύνορο εν τη Παρουσία ενός Asset Χωρίς Κίνδυνο

Το επόμενο ερώτημα πού προκύπτει σε αυτό το σημείο είναι το εξής: Μήπως η εισαγωγή του asset χωρίς κίνδυνο μεταβάλει το αποτελεσματικό σύνορο (σε σχέση με αυτό πού είχαμε στην περίπτωση πού τα προς επένδυση assets ήταν όλα με κίνδυνο)? Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική. Πράγματι, στη παρούσα περίπτωση το αποτελεσματικό σύνορο δεν είναι πλέον η υπερβολή στο χώρο $(\sigma_{R_p}, \mu_{R_p})$ πού αναπαρίσταται στο Διάγραμμα 2. Αντίθετα, το αποτελεσματικό σύνορο είναι μιά ευθεία η οποία ξεκινά από το σημείο στο κάθετο άξονα (το άξονα της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου) πού αντιστοιχεί στο επίπεδο της R_f. Το δεύτερο σημείο πού απαιτείται για να οριστεί αυτή η ευθεία είναι το σημείο επαφής, m, αυτής της ευθείας με το "παλιό" αποτελεσματικό σύνορο πού είχαμε στη περίπτωση των n assets με κίνδυνο. Η διαγραμματική απεικόνιση του νέου αποτελεσματικού συνόρου παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 4.

Διάγραμμα 4
Το Αποτελεσματικό Σύνορο εν τη Παρουσία ενός Asset χωρίς Κίνδυνο

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το χαρτοφυλάκιο m το οποίο βρίσκεται πάνω στο παλιό αποτελεσματικό σύνορο. Ως εκ τούτου είναι ένα χαρτοφυλάκιο πού αποτελείται αποκλειστικά και μόνο από τα n assets με κίνδυνο. Αυτό το χαρτοφυλάκιο, για προφανείς λόγους, ονομάζεται "εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο". Κάθε σημείο πού ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $R_f m$ αντιπροσωπεύει ένα άριστο χαρτοφυλάκιο στο οποίο ένα ποσοστό w_f του κεφαλαίου επενδύεται στο χαρτοφυλάκιο asset χωρίς κίνδυνο και το υπόλοιπο επενδύεται στο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο m. Το ποσοστό w_f είναι μεγαλύτερο όσο πιό κοντά είναι το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο στο R_f. Πιό συγκεκριμένα, θεωρείστε το χαρτοφυλάκιο p_1 πού αντιστοιχεί στο σημείο p_1 πάνω στο αποτελεσματικό σύνορο. Η απόσταση $R_f p_1$ είναι το 25% του ευθύγραμμου τμήματος $R_f m$. Αυτό σημαίνει ότι το p_1 είναι ένα χαρτοφυλάκιο στο οποίο το 75% αποτελεί επένδυση στο asset χωρίς κίνδυνο και 25% στο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο m. Το χαρτοφυλάκιο πού αντιστοιχεί στο ίδιο το σημείο R_f είναι ένα χαρτοφυλάκιο πού επενδύει 100% στο asset χωρίς κίνδυνο, ενώ το χαρτοφυλάκιο πού αντιστοιχεί στο σημείο m είναι ένα χαρτοφυλάκιο πού επενδύει 100% στο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο m.

Παρατηρήσεις

(i) Τα σημεία πού ανήκουν στο $R_f m$ αντιστοιχούν, όπως είπαμε, σε χαρτοφυλάκια τα οποία είναι γραμμικοί συνδυασμοί του asset χωρίς κίνδυνο και του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου. Σε καθένα από αυτά τα χαρτοφυλάκια, μέρος του προς επένδυση κεφαλαίου έχει τοποθετηθεί στο asset χωρίς κίνδυνο. Αυτό σημαίνει ότι ο επενδυτής "δανείζει" στο R_f. Αντίθετα, σημεία δεξιά του m και πάνω στην επέκταση του $R_f m$ αντιπροσωπεύουν χαρτοφυλάκια στα οποία ο επενδυτής "δανείζεται" στο R_f προκειμένου να εξασφαλίσει επιπλέον κεφάλαιο για να το επενδύσει στο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο m των assets με κίνδυνο. Με άλλα λόγια αυτά τα χαρτοφυλάκια περιέχουν "μόχλευση" και ως εκ τούτου έχουν πολύ μεγάλη επικινδυνότητα (παρότι παραμένουν άριστα).

(ii) Η γραμμή πού ορίζεται από τα σημεία R_f και m ονομάζεται "Γραμμή Κεφαλαιαγοράς" (Capital Market Line - CML).

Παράδειγμα

Έστω ότι υπάρχουν τρία asset με κίνδυνο (μετοχές) στην Οικονομία, $n = 3$, και το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο, m, είναι το

$$[w_{1m}, w_{2m}, w_{3m}]^\top = [0.2, 0.35, 0.45]^\top.$$

Έστω επίσης ότι η απόδοση του asset χωρίς κίνδυνο είναι $R_f = 2\%$. Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής Α αποστρέφεται σημαντικά τον κίνδυνο και ως εκ τούτου επιθυμεί να επενδύσει το 80% του κεφαλαίου στο asset χωρίς κίνδυνο και το υπόλοιπο 20% στο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο. Αυτό σημαίνει ότι τα ποσοστά επένδυσης στις τρείς μετοχές θα είναι,

$$w_1 = 0.2 \times w_{1m} = 0.2 \times 0.2 = 0.04$$
$$w_2 = 0.2 \times w_{2m} = 0.2 \times 0.35 = 0.07$$
$$w_3 = 0.2 \times w_{3m} = 0.2 \times 0.45 = 0.09.$$

Το άθροισμα $w_1 + w_2 + w_3$ είναι ίσο με 0.2. Το τελικό άθροισμα, $(w_1 + w_2 + w_3)$ συν το w_f είναι ίσο με την μονάδα.

Έστω ο επενδυτής Β ο οποίος αποστρέφεται τον κίνδυνο σε μικρότερο βαθμό απο τον Α. Αυτός ο επενδυτής αποφασίζει να επενδύσει το 50% στο asset χωρίς κίνδυνο και το υπόλοιπο στο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο m. Παρότι ο Β επενδύει στο ίδιο χαρτοφυλάκιο m με τον Α, εντούτοις επειδή επενδύει διαφορετικό ποσοστό του κεφαλαίου του θα καταλήξει να έχει διαφορετικά σταθμά/ποσοστά μετοχών $w_i, i = 1,2,3$ από τον Α. Συγκεκριμένα, τα ποσοστά επένδυσης του Β στις τρείς μετοχές θα είναι,

$$w_1 = 0.5 \times w_{1m} = 0.5 \times 0.2 = 0.10$$
$$w_2 = 0.5 \times w_{2m} = 0.5 \times 0.35 = 0.175$$
$$w_3 = 0.5 \times w_{3m} = 0.5 \times 0.45 = 0.225.$$

Όπως είναι φυσικό το άθροισμα $w_1 + w_2 + w_3$ είναι ίσο με 0.5. Παρατηρούμε ότι τα σταθμά $w_i, i = 1,2,3$ για τον Β είναι διαφορετικά από τα αντίστοιχα για τον Α, γεγονός πού απορρέει από το ότι ο Β επειδικνύει μικρότερο βαθμό αποστροφής του κινδύνου από τον Α. Παρόλα αυτά και οι δύο έχουν επενδύσει (ο καθένας το ποσοστό του) στο ίδιο χαρτοφυλάκιο m. Αυτό φαίνεται από το ότι οι αναλογίες w_i/w_j είναι οι ίδιες και για τους δύο επενδυτές. Πράγματι,

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{0.04}{0.07} = \frac{0.10}{0.175} = 0.571$$
$$\frac{w_1}{w_3} = \frac{0.04}{0.09} = \frac{0.10}{0.225} = 0.444$$
$$\frac{w_2}{w_3} = \frac{0.07}{0.09} = \frac{0.175}{0.225} = 0.777.$$

Αυτό πού πρέπει να τονίσουμε είναι ότι το χαρτοφυλάκιο πού επιλέγει ο Α, δηλαδή το $(w_1, w_2, w_3, w_f) = (0.04, 0.07, 0.09)$ και το χαρτοφυλάκιο πού επιλέγει ο Β δηλαδή το $(w_1, w_2, w_3, w_f) = (0.10, 0.175, 0.225, 0.5)$ βρίσκονται πάνω στο αποτελεσματικό σύνορο πού ονομάσαμε Γραμμή Κεφαλαιαγοράς (CML). Το χαρτοφυλάκιο του Α βρίσκεται πιό κοντά στο σημείο R_f ενώ το χαρτοφυλάκιο του Β βρίσκεται ακριβώς στη μέση του ευθύγραμμου τμήματος $R_f m$.

Ας δούμε τώρα πώς εξάγουμε αναλυτικά το νέο αποτελεσματικό σύνορο το οποίο, όπως ήδη είπαμε, στην περίπτωση πού εκτός από τα n assets με κίνδυνο έχουμε και ένα asset χωρίς κίνδυνο είναι μία γραμμή (αντί για υπερβολή). Ο τρόπος πού θα υπολογίσουμε το νέο αποτελεσματικό σύνορο είναι ανάλογος με αυτόν πού ακολουθήσαμε στην προηγούμενη ενότητα: Θα εισάγουμε την εξισωση για τα άριστα σταθμά στην εξίσωση πού εκφράζει την διακύμανση του χαρτοφυλακίου. Αυτό θα μας δώσει μία σχέση μεταξύ της διακύμανσης $\sigma^2_{R_p}$ και της αναμενόμενης απόδοσης (στόχου) μ_{R_p}. Η σχέση αυτή είναι η αλγεβρική έκφραση του αποτελεσματικού συνόρου στο χώρο $(\sigma^2_{R_p}, \mu_{R_p})$. Από αυτή τη σχέση μπορούμε εύκολα να εξάγουμε τη σχέση μεταξύ της τυπικής απόκλισης σ_{R_p} και της αναμενόμενης απόδοσης μ_{R_p} η οποία αναπαριστά το αποτελεσματικό σύνορο στο χώρο $(\sigma_{R_p}, \mu_{R_p})$. Σύμφωνα με την ως τώρα συζήτηση, αυτή η τελευταία σχέση θα πρέπει να είναι γραμμική.

Ως πρώτο βήμα λοιπόν, αντικαθιστούμε τη σχέση (ref: weight_fr3) στην έκφραση (ref: var_rf1),

$$
\begin{aligned}
Var(R_p) = \sigma^2_{R_p} = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} &= \left[\left(\frac{\mu_{R_p} - R_f}{\Psi} \right) \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}) \right]^\top \Sigma \left[\left(\frac{\mu_{R_p} - R_f}{\Psi} \right) \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}) \right] = \\
&= (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1})^\top \Sigma^{-1} \left(\frac{\mu_{R_p} - R_f}{\Psi} \right) \Sigma \left(\frac{\mu_{R_p} - R_f}{\Psi} \right) \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}) = \\
&= (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1})^\top \Sigma^{-1} \Sigma \left(\frac{\mu_{R_p} - R_f}{\Psi} \right)^2 \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}) = \\
&= (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1})^\top \mathbf{I} \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}) \left(\frac{\mu_{R_p} - R_f}{\Psi} \right)^2 = \\
&= (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1})^\top \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}) \left(\frac{\mu_{R_p} - R_f}{\Psi} \right)^2 .
\end{aligned}
$$

Έχουμε ήδη ορίσει το Ψ να είναι ίσο με

$$
\Psi = (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1})^\top \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1} R_f).
$$

Αυτό σημαίνει ότι η τελευταία έκφραση γίνεται,

$$
\sigma^2_{R_p} = \Psi \left(\frac{\mu_{R_p} - R_f}{\Psi} \right)^2 = \frac{(\mu_{R_p} - R_f)^2}{\Psi}. \qquad \#
$$

Η σχέση (ref: eff_front_rf1) εκφράζει το αποτελεσματικό σύνορο στον χώρο $(\sigma^2_{R_p}, \mu_{R_p})$. Γιά να υπολογίσουμε το αποτελεσματικό σύνορο στο χώρο $(\sigma_{R_p}, \mu_{R_p})$ παίρνουμε την τετραγωνική ρίζα και των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης. Υποθέτοντας ότι η αναμενόμενη απόδοση στόχος είναι μεγαλύτερη από το R_f και άρα $\mu_{R_p} - R_f > 0$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\sigma_{R_p} &= \frac{1}{\sqrt{\Psi}} (\mu_{R_p} - R_f) \Rightarrow \qquad \# \\
\sigma_{R_p} \sqrt{\Psi} &= (\mu_{R_p} - R_f) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \mu_{R_p} = R_f + \sigma_{R_p} \sqrt{\Psi} .
\end{aligned}
$$

Από τη σχέση (ref: eff_front_rf2) είναι εμφανές ότι η αλγεβρική σχέση πού περιγράφει το αποτελεσματικό σύνορο είναι γραμμική και τέμνει τον κάθετο άξονα (μ_{R_p}) στο σημείο R_f. Η ευθεία πού περιγράφεται από την (ref: eff_front_rf2) είναι αυτή πού ονομάσαμε πρίν γραμμή κεφαλαιαγοράς CML. Η κλίση της ευθείας είναι ίση με $\sqrt{\Psi}$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η ευθεία αυτή εφάπτεται του "παλιού" αποτελεσματικού συνόρου πού είχαμε στη περίπτωση των n assets με κίνδυνο. Στο σημείο επαφής m αντιστοιχεί το "εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο", το οποίο όταν το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι το ίδιο γιά όλους τους επενδυτές, ονομάζεται και "χαρτοφυλάκιο της αγοράς" (market portfolio). Η υπόθεση ότι το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι το ίδιο για όλους τους επενδυτές είναι μιά υπόθεση πού θα κάνουμε σε επόμενη ενότητα στα πλαίσια του μοντέλου αποτίμησης CAPM. Προς το παρόν, συνεχίζουμε αν αναλύουμε το πρόβλημα από την σκοπιά του μεμονωμένου επενδυτή και κατά συνέπεια το m είναι προς το παρόν απλώς το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο το οποίο μπορεί να διαφέρει από επενδυτή σε επενδυτή ανάλογα με την άποψη του καθενός για το διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}$ και τον πίνακα Σ. Το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο έχει αναμενόμενη απόδοση μ_m και τυπική απόκλιση (ρίσκο) ίση με σ_m. Αφού το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι σημείο του αποτελεσματικού συνόρου (το σημείο επαφής του νέου με το παλαιό αποτελεσματικό σύνορο) συνεπάγεται ότι το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο. Στην πραγματικότητα είναι το μόνο αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται αμιγώς από τα n assets με κίνδυνο.

Μπορούμε τέλος να έχουμε μιά εναλλακτική έκφραση για το αποτελεσματικό σύνορο σε όρους της αναμενόμενης απόδοσης μ_m και του ρίσκου σ_m του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου. Έστω ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο p το οποίο βρίσκεται (ως αποτελεσματικό πού είναι) πάνω στο αποτελεσματικό σύνορο. Το αποτελεσματικό σύνορο είναι μιά ευθεία πού ορίζεται από δύο σημεία. Το πρώτο σημείο αντιστοιχεί στο asset χωρίς κίνδυνο και έχει συντεταγμένες $(0, R_f)$. Το δεύτερο σημείο αντιστοιχεί στο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο m και έχει συντεταγμένες $(\sigma_m, E(R_m))$. Γνωρίζουμε ότι για οποιοδήποτε σημείο p πάνω στην ευθεία με συντεταγμένες $(\sigma_p, E(R_p))$ (δηλαδή για οποιοδήποτε αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο) ισχύει η σχέση,

$$\frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p - 0} = \gamma.$$

Η ίδια σχέση ισχύει και για το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο m (αφού είναι και αυτό αποτελεσματικό και άρα βρίσκεται πάνω στη γραμμή) και κατά συνέπεια,

$$\frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m - 0} = \gamma.$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι,

$$\frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p} = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m}.$$

Αναδιατάσοσντας τους όρους, προκύπτει μιά εξίσωση πού στο δεξί μέλος έχει το $E(R_p)$ και στο αριστερό το σ_p :

$$[E(R_p) - R_f]\sigma_m = [E(R_m) - R_f]\sigma_p \Rightarrow$$
$$E(R_p) - R_f = \frac{[E(R_m) - R_f]\sigma_p}{\sigma_m}$$

απ'οπου τελικά καταλήγουμε,

$$E(R_p) = R_f + \frac{[E(R_m) - R_f]}{\sigma_m}\sigma_p. \qquad \#$$

Η παραπάνω μορφή της CML είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη στην ανάλυση του μοντέλου τιμολόγησης CAPM πού θα αναλύσουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Όπως ήδη είπαμε και όπως θα δούμε στη συνέχεια, στο πλαίσιο του CAPM το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο m είναι κοινό γιά όλους τους επενδυτές και αποκαλείται χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

Παρατήρηση

Η εξίσωση (ref: cml2) έχει και μιά εναλλακτική ανάγνωση. Προκειμένου να τονιστεί αυτή η ανάγνωση, ας ξαναγράψουμε την παραπάνω εξίσωση ως

$$[E(R_p) - R_f] = \frac{\sigma_p}{\sigma_m}[E(R_m) - R_f]. \qquad \#$$

Σύμφωνα με αυτή την εξίσωση, το ασφάλιστρο κινδύνου $[E(R_p) - R_f]$ του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου p είναι ίσο με το ασφάλιστρο κινδύνου $[E(R_m) - R_f]$ του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου m πολλαπλασιασμένο επί τον συντελεστή $\frac{\sigma_p}{\sigma_m}$. Ο τελευταίος δείχνει το λόγο του κινδύνου του χαρτοφυλακίου p ως προς το κίνδυνο του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου m. Αν $\frac{\sigma_p}{\sigma_m} = 1$, τότε

$$[E(R_p) - R_f] = [E(R_m) - R_f].$$

Εκτίμηση των Άριστων Χαρτοφυλακίων

Η παρούσα ενότητα ασχολείται με το πώς η θεωρία πού αναπτύχθηκε στις προηγούμενες ενότητες εφαρμόζεται στην πράξη. Με άλλα λόγια, το κεντρικό ερώτημα με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι το πώς κατασκευάζουμε άριστα χαρτοφυλάκια χρησιμοποιώντας πραγματικά περιουσιακά στοιχεία (assets) πού διαπραγματεύονται στις διεθνείς κεφαλαιαγορές. Η ανάλυση θα κινηθεί στο πλάισιο της ύπαρξης n assets με κίνδυνο χωρίς την παρουσία ενός asset χωρίς κίνδυνο. Σε αυτή τη περίπτωση το άριστο χαρτοφυλάκιο, $\mathbf{w}$, για επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης χαρτοφυλακίου ίσο με μ_{R_p} δίνεται από τη σχέση (ref: solut3a) την οποία ξαναγράφουμε για λόγους ευκολίας,

$$\mathbf{w} = \left[\frac{\Gamma\mu_{R_p} - A}{\Delta} \right]\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \left[\frac{B - A\mu_{R_p}}{\Delta} \right]\Sigma^{-1}\mathbf{1}. \qquad \#$$

Από την παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε αμέσως ότι προκειμένου να υπολογίσουμε το $\mathbf{w}$ αυτό πού χρειαζόμαστε είναι να γνωρίζουμε πέραν της αναμενόμενης απόδοσης στόχου, μ_{R_p}, την οποία θέτουμε εμείς στο επιθυμητό επίπεδο, το διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}$ των αναμενόμενων αποδόσεων και τον πίνακα Σ των διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των n assets. Αυτή η πληροφορία δεν μας είναι γνωστή. Κατά συνέπεια, εν τη απουσία αυτής της πληροφορίας το καλύτερο πού μπορούμε να κάνουμε είναι να εκτιμήσουμε το $\boldsymbol{\mu}$ και Σ χρησιμοποιώντας διαθέσιμα στατιστικά στοιχεία. Αυτά τα στοιχεία δεν είναι άλλα από τις ιστορικές αποδόσεις των n assets. Έστω ότι για κάθε ένα από τα n assets έχουμε διαχρονικά ιστορικά στοιχεία (ημερήσια, εβδομαδιαία, μηνιαία κλπ) τα οποία συνθέτουν ένα δείγμα μεγέθους T (γιά κάθε asset). Αυτό σημαίνει ότι έχουμε n assets ($i = 1, 2, \ldots, n$) και γιά κάθε ένα i έχουμε T παρατηρήσεις ($j = 1, 2, \ldots, T$). Από τα στοιχεία αυτά μπορούμε να εκτιμήσουμε το $\boldsymbol{\mu}$ και Σ χρησιμοποιώντας ως εκτιμητές τις αντίστοιχες δειγματικές ροπές. Δηλαδή,

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mu}_1 \\ \widehat{\mu}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \widehat{\mu}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} R_{1j} \\ \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} R_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} R_{nj} \end{bmatrix}, \qquad \#$$

και,

$$\widehat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \widehat{\sigma}_{11} & \widehat{\sigma}_{12} & \cdots & \widehat{\sigma}_{1n} \\ \widehat{\sigma}_{21} & \widehat{\sigma}_{22} & \cdots & \widehat{\sigma}_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \widehat{\sigma}_{n1} & \widehat{\sigma}_{n2} & \cdots & \widehat{\sigma}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{1j}-\widehat{\mu}_1)^2 & \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{1j}-\widehat{\mu}_1)(R_{2j}-\widehat{\mu}_2) & \cdots \\ \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{1j}-\widehat{\mu}_1)(R_{2j}-\widehat{\mu}_2) & \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{2j}-\widehat{\mu}_2)^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{1j}-\widehat{\mu}_1)(R_{nj}-\widehat{\mu}_n) & \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{2j}-\widehat{\mu}_2)(R_{nj}-\widehat{\mu}_n) & \cdots \end{bmatrix}$$

Κάτω από ορισμένες υποθέσεις για την διανυσματική στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων $\{\mathbf{R}_t\}$ με

$$\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} R_{1t} \\ R_{2t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_{nt} \end{bmatrix},$$

τις οποίες θα αναλύσουμε στη συνέχεια, οι εκτιμητές $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ και $\widehat{\Sigma}$ είναι αμερόληπτοι και συνεπείς εκτιμητές των $\boldsymbol{\mu}$ και Σ αντίστοιχα.

Παρατηρήσεις

(i) Το διάνυσμα εκτιμητών $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ θα θεωρείται αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής του διανύσματος των αναμενόμενων αποδόσεων $\boldsymbol{\mu}$ όταν κάθε στοιχείο του $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής του αντίστοιχου στοιχείου του $\boldsymbol{\mu}$. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για τον πίνακα $\widehat{\Sigma}$.

(ii) Η διαίρεση με το $(T-1)$ αντί του T στα στοιχεία του $\widehat{\Sigma}$ απαιτείται για την αμεροληψία του $\widehat{\Sigma}$.

Προς το παρόν θα υποθέσουμε ότι οι συνθήκες πού αφορούν στην $\{\mathbf{R}_t\}$ για την εξασφάλιση της αμεροληψίας και συνέπειας των $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ και $\widehat{\Sigma}$ ικανοποιούνται. Για παράδειγμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\{\mathbf{R}_t\}$ είναι ανεξάρτητη, ταυτόνομη και Κανονική ανέλιξη με διάνυσμα μέσων $\boldsymbol{\mu}$ και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ,

$$\mathbf{R}_t \sim NIID(\boldsymbol{\mu}, \Sigma). \qquad \#$$

Σε αυτή τη περίπτωση, γνωρίζουμε ότι ισχύουν τα εξής,

$$E(\widehat{\boldsymbol{\mu}}) = \boldsymbol{\mu}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu} \qquad \#$$

και

$$E(\widehat{\Sigma}) = \Sigma$$

$$\widehat{\Sigma} \xrightarrow{p} \Sigma. \qquad \#$$

Το ερώτημα πού προκύπτει σε αυτό το σημείο είναι το εξής. Αυτό πού δείξαμε ως τώρα είναι το πώς εκτιμούμε με σχετική ακρίβεια τις άγνωστες παραμέτρους $\boldsymbol{\mu}$ και Σ πού χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό του άριστου χαρτοφυλακίου $\mathbf{w}$. Αυτό σημαίνει ότι ένας εκτιμητής $\widehat{\mathbf{w}}$ του $\mathbf{w}$ μπορεί να αποκτηθεί μέσω της σχέσης (ref: solut3a) στην οποία οι παράμετροι $\boldsymbol{\mu}$ και Σ υποκαθίστανται από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις τους $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ και $\widehat{\Sigma}$, δηλαδή

$$\widehat{\mathbf{w}}=\left[\frac{\widehat{\Gamma}\mu_{R_p}-\widehat{A}}{\widehat{\Delta}}\right]\widehat{\Sigma}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}}+\left[\frac{\widehat{B}-\widehat{A}\mu_{R_p}}{\widehat{\Delta}}\right]\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} \qquad \#$$

με

$$\widehat{\Gamma} = \mathbf{1}^{\top}\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} \qquad \#$$
$$\widehat{A} = \mathbf{1}^{\top}\widehat{\Sigma}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}}$$
$$\widehat{B} = \widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\widehat{\Sigma}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}}$$

και

$$\widehat{\Delta} = \widehat{B}\widehat{\Gamma} - \widehat{A}^2. \qquad \#$$

Το ερώτημα πού πρέπει να απαντήσουμε είναι το εξής: Είναι ο εκτιμητής $\widehat{\mathbf{w}}$ αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής του $\mathbf{w}$? Με εναλλακτική διατύπωση, αν έχουμε την διαβεβαίωση ότι τα $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ και $\widehat{\Sigma}$ είναι αμερόληπτοι και συνεπείς εκτιμητές των $\boldsymbol{\mu}$ και Σ αντίστοιχα, αυτό αυτομάτως σημαίνει ότι και ο $\widehat{\mathbf{w}}$, πού είναι μιά συνάρτηση των $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ και $\widehat{\Sigma}$, θα είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής του $\mathbf{w}$?

Ας ξεκινήσουμε από την αμεροληψία. Το κλειδί για το αν ο $\widehat{\mathbf{w}}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του $\mathbf{w}$ είναι το αν η συνάρτηση g,

$$\mathbf{w} = g(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$

είναι γραμμική ή όχι. Από την σχέση (ref: solut3a) παρατηρούμε ότι η σχέση πού συνδέει τα σταθμά $\mathbf{w}$ με τις ροπές $\boldsymbol{\mu}$ και Σ είναι μη-γραμμική. Το ερώτημα είναι τι μας λέει η μη-γραμμικότητα της g για την αμεροληψία του $\widehat{\mathbf{w}}$? Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα πρέπει να ανατρέξουμε στην ανισότητα του Jensen την οποία συναντήσαμε στο πρώτο τμήμα του βιβλίου. Η ανισότητα αυτή μας λέει ότι αν έχουμε μια τυχαία μεταβλητή X και μιά συνάρτηση $g(X)$ αυτής, τότε η αναμενόμενη τιμή $E(g(X))$ της $g(X)$ είναι, γενικά, διάφορη της $g(E(X))$,

$$E(g(X)) \neq g(E(X)).$$

Η μόνη περίπτωση για να έχουμε ισότητα μεταξύ της $E(g(X))$ και της $g(E(X))$ είναι όταν η $g(X)$ είναι γραμμική στη X. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Jensen στην (ref: est_weight1) και με δεδομένη τη μη-γραμμικότητα της συνάρτησης πού συνδέει τα άριστα σταθμά με τις ροπές των αποδόσεων, συμπεραίνουμε ότι

$$E(\widehat{\mathbf{w}}) \neq \mathbf{w}$$

ακόμα και στην ιδιαίτερα ευνοική περίπτωση στην οποία

$$E(\widehat{\boldsymbol{\mu}}) = \boldsymbol{\mu}$$

και

$$E(\widehat{\Sigma}) = \Sigma.$$

Το ερώτημα είναι πόσο μεγάλο είναι το μεροληπτικό σφάλμα $E(\widehat{\mathbf{w}}) - \mathbf{w}$ και αν τουλάχιστον τείνει να μειώνεται όσο το μέγεθος του δείγματος T αυξάνεται. Η τελευταία ερώτηση μας οδηγεί στο θέμα της συνέπειας του εκτιμητή $\widehat{\mathbf{w}}$. Είναι ο $\widehat{\mathbf{w}}$ συνεπής εκτιμητής του $\mathbf{w}$? Αν ναί, τότε το μεροληπτικό σφάλμα θα τείνει στο μηδέν όσο το T θα τείνει στο άπειρο. Τι γνωρίζουμε για την συνέπεια μιας συνάρτησης $g(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\Sigma})$ συνεπών εκτιμητών κάποιων παραμέτρων? Με άλλα λόγια, αν δεχθούμε ότι ισχύουν τα πιθανοτικά όρια (ref: plim_m) και (ref: plim_v) και με δεδομένη τη μη-γραμμικότητα της $g(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\Sigma})$ μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$$\widehat{\mathbf{w}} \xrightarrow{p} \mathbf{w}?$$

Προκειμένου να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα επικαλεστούμε ένα σημαντικό θεώρημα της Θεωρίας Πιθανοτήτων, το επονομαζόμενο Θεώρημα της Συνεχούς Απεικόνισης (Continuous Mapping Theorem - CMT). Σύμφωνα με το θέωρημα αυτό αν έχουμε μιά ακολουθία τυχάιων μεταβλητών $\{X_t\}$ η οποία συγκλίνει κατά πιθανότητα στην τυχαία μεταβλητή X τότε και η νέα ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{g(X_t)\}$ θα συγκλίνει κατά πιθανότητα στην τυχαία μεταβλητή $g(X)$, αν η συνάρτηση g είναι συνεχής:

$$CMT : X_t \xrightarrow{p} X \Rightarrow g(X_t) \xrightarrow{p} g(X)$$

Παρατήρηση

Το CMT συνεχίζει να ισχύει αν η έννοια της σύγκλισης κατά πιθανότητα υποκατασταθεί από κάποια άλλη μορφή στοχαστικής σύγκλισης όπως για παράδειγμα η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση.

Εφαρμόζοντας το CMT στην περίπτωση πού μας ενδιαφέρει (και μπορούμε να το κάνουμε γιατί το $\mathbf{w}$ είναι συνεχής συνάρτηση των $\boldsymbol{\mu}$ και Σ) συμπεραίνουμε ότι

$$\left[\begin{array}{ccc} \widehat{\boldsymbol{\mu}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\mu} & & \\ \text{και} & \Rightarrow & \widehat{\mathbf{w}} \xrightarrow{p} \mathbf{w} \\ \widehat{\Sigma} \xrightarrow{p} \Sigma & & \end{array}\right].$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι για οποιοδήποτε πεπερασμένο δείγμα μεγέθους T αναμένουμε οι εκτιμήσεις $\widehat{\mathbf{w}}$ να επιδεικνύουν μεροληπτικό σφάλμα το οποίο όμως θα τείνει να μειώνεται όσο το μέγεθος του δείγματος θα αυξάνεται.

Ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο μεροληπτικό σφάλμα $E(\widehat{\mathbf{w}}) - \mathbf{w}$. Από πού πηγάζει αυτό το σφάλμα? Από το γεγονός ότι ο εκτιμητής $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ δεν δίνει πάντα την αληθινή τιμή του $\boldsymbol{\mu}$ και ο $\widehat{\Sigma}$ δεν δίνει πάντα την αληθινή τιμή του Σ. Δηλαδή απο το γεγονός ότι τόσο το $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ όσο και ο $\widehat{\Sigma}$ είναι τυχαίες μεταβλητές. Το πόσο μεγάλο θα είναι το μεροληπτικό σφάλμα $E(\widehat{\mathbf{w}}) - \mathbf{w}$ θα εξαρτηθεί από το πόσο η συνάρτηση g, $\widehat{\mathbf{w}} = g(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\Sigma})$ "μεγενθύνει" ή "ενισχύει" τα σφάλματα $(\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu})$ και $(\widehat{\Sigma} - \Sigma)$. Με άλλα λόγια, το κρίσιμο ερώτημα είναι αν ένα μικρό σφάλμα $(\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu})$ ή/και ένα μικρό σφάλμα $(\widehat{\Sigma} - \Sigma)$ θα τείνει να παράξει ένα μεγάλο σφάλμα $(\widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{w})$.

Ανάλυση Ευαισθησίας

Προκειμένου να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα διενεργήσουμε μια "ανάλυση ευαισθησίας". Συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε ότι τα $\boldsymbol{\mu}$ και Σ παίρνουν κάποιες συγκεκριμένες τιμές, θα λύσουμε το πρόβλημα για αυτές τις τιμές και έτσι θα υπολογίσουμε το $\mathbf{w}$ πού αντιστοιχεί στις συγκεκριμένες τιμές των $\boldsymbol{\mu}$ και Σ. Τέλος, θα μεταβάλλουμε τις τιμές των $\boldsymbol{\mu}$ ή/και Σ κατά μιά ποσότητα δ και θα εξετάσουμε την συνεπακόλουθη μεταβολή πού προκαλείται στο $\mathbf{w}$. Έστω λοιπόν ότι έχουμε τρείς μετοχές, δηλαδή $n = 3$, για τις οποίες οι αναμενόμενες αποδόσεις είναι

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0367 \\ 0.0463 \\ 0.0673 \end{bmatrix} \qquad \#$$

και ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων είναι ο

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.734 & 0.408 & 0.358 \\ 0.408 & 1.469 & 0.986 \\ 0.358 & 0.986 & 1.203 \end{bmatrix}. \qquad \#$$

Παρατήρηση

Οι παραπάνω τιμές των $\boldsymbol{\mu}$ και Σ δεν ετέθησαν τυχαία, αλλά αντίθετα εκφράζουν τις εκτιμήσεις των $\boldsymbol{\mu}$ και Σ πού παίρνουμε από ημερήσια στοιχεία για τις αποδόσεις των κλάδων Utilities, Financials και Information technology του SP500 για την περίοδο 24/5/2010 - 31/12/2019.

Η αναμενόμενη απόδοση στόχος του χαρτοφυλακίου που θα θέσουμε θα καθορίσει και τον βαθμό αποστροφής πού επιδεικνύουμε προς τον κίνδυνο. Έστω ότι ο βαθμός αποστροφής του κινδύνου είναι μεγάλος το οποίο σημαίνει ότι η (ημερήσια) αναμενόμενη απόδοση στόχος είναι σχετικά μικρή, π.χ. $\mu_{R_p} = 0.04\%$. Με αυτό το σύνολο παραμέτρων, το άριστο χαρτοφυλάκιο είναι το

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.782 \\ 0.161 \\ 0.057 \end{bmatrix}. \qquad \#$$

Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι η αναμενόμενη απόδοση, μ_1, της μετοχής 1 αυξάνεται από 0.0367% σε 0.0387% το οποίο αντιστοιχεί σε μιά αύξηση κατά 5.45%. Με το νεό διάνυσμα αναμενόμενων αποδόσεων, και με τον Σ αμετάβλητο, το άριστο χαρτοφυλάκιο γίνεται

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.805 \\ 0.204 \\ -0.009 \end{bmatrix}.$$

Οι ποσοστιαίες μεταβολές πού υπέστησαν τα w_1, w_2 και w_3 είναι 2.94%, 26.70% και -115.78% αντίστοιχα. Αμέσως παρατηρούμε την μεγάλη ευαισθησία πού επιδεικνύουν τα w_2 και κυρίως το w_3 στη μεταβολή της αναμενόμενης απόδοσης μ_1 κατά 5.45%. Αυτή η ευαισθησία απορρέει από την "έντονη μη-γραμμικότητα" πού χαρακτηρίζει τη σχέση μεταξύ $\mathbf{w}$ και $\boldsymbol{\mu}$. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι παρότι η παράμετρος πού μεταβάλλαμε είναι η μ_1, εντούτοις το ποσοστό πού μεταβλήθηκε δεν είναι τόσο το w_1 πού αυξήθηκε μόνο κατά 2.94% αλλά το w_2 πού αυξήθηκε κατά 26.70% και το w_3 πού μειώθηκε κατά 115.78%.

Ας επαναλάβουμε την άσκηση για την αναμενόμενη απόδοση μ_2. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η μ_2 αυξάνεται από 0.0463 σε 0.0488 δηλαδή μια αύξηση περίπου ίση με 5.45%. Οι υπόλοιπες παράμετροι του προβλήματος παραμένουν σταθερές. Με αυτή την μοναδική (και μικρή αλλαγή), το άριστο χαρτοφυλάκιο γίνεται

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.799 \\ 0.153 \\ 0.047 \end{bmatrix}.$$

Οι ποσοστιαίες μεταβολές των w_1, w_2 και w_3 είναι 2.17%, -4.97% και -17.54%, αντίστοιχα. Εδώ παρατηρούμε ότι η διαταραχή πού προκαλέσαμε στην μ_2 είχε συνολικά μικρότερες συνέπειες στα w_1, w_2 και w_3 από την (κατά το ίδιο ποσοστό) διαταραχή στην μ_1. Πράγματι, η μόνη μεταβολή πού ξεπέρασε ως ποσοστό την μεταβολή της μ_2 είναι η μεταβολή πού υπέστη το w_3.

Τέλος ας δούμε την επίδραση πού έχει στο $\mathbf{w}$ μιά αύξηση της μ_3 κατά 5.45%. Αυτό σημαίνει ότι η μ_3 αυξάνεται από 0.0673 σε 0.0709. Ως συνήθως, οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν σταθερές. Με αυτή την αλλαγή στη μ_3, το άριστο χαρτοφυλάκιο γίνεται

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.781 \\ 0.170 \\ 0.049 \end{bmatrix}.$$

Οι ποσοστιαίες μεταβολές των w_1, w_2 και w_3 είναι -0.13%, 5.59% και -14.01% αντίστοιχα. Εδώ παρατηρούμε ότι η επίδραση της διαταραχής στην μ_3 είναι μικρότερη από την αντίστοιχη διαταραχή στη μ_2 η οποία με τη σειρά της όπως είδαμε είναι μικρότερη από την διαταραχή στην μ_1. Αυτό πού φαίνεται να αναδεικνύεται ως μοτίβο είναι ότι η διαταραχή στην αναμενόμενη απόδοση της μετοχής πού συμμετέχει με το μεγαλύτερο ποσοστό στο αρχικό χαρτοφυλάκιο προκαλεί και την μεγαλύτερη επίδραση στα σταθμά του χαρτοφυλακίου.

Ας εξετάσουμε τώρα την επίδραση αντίστοιχων διαταραχών στις διακυμάνσεις των τριών μετοχών. Ας ξεκινήσουμε από την σ_{11} την οποία αλλάζουμε από 0.734 σε 0.774 δηλαδή μιά αύξηση κατά το γνωστό 5.45%. Το διάνυσμα των αναμενόμενων αποδόσεων παραμένει το αρχικό, δηλαδή αυτό πού θέσαμε στο (ref: intial_m) και ο πίνακας Σ είναι ο (ref: initial_v) με την μόνη αλλαγή αυτή πού εισάγαμε στην σ_{11}. Με το νέο Σ το άριστο χαρτοφυλάκιο γίνεται το

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.764 \\ 0.186 \\ 0.050 \end{bmatrix}.$$

Οι ποσοστιαίες μεταβολές των w_1, w_2 και w_3 είναι -2.30%, 15.53% και -12.28% αντίστοιχα. Στη συνέχεια, επαναλαμβάνουμε την άσκηση για την σ_{22} μεταβάλλοντας την κατά 5.45% από $\sigma_{22} = 1.469$ σε $\sigma_{22} = 1.549$. Γιά αυτές τις παραμέτρους έχουμε,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.790 \\ 0.148 \\ 0.062 \end{bmatrix},$$

πού σημαίνει ότι τα σταθμά w_1, w_2 και w_3 μεταβάλλονται κατά 1.02%, -8.07% και 8.77% αντίστοιχα. Τέλος, μεταβάλλουμε την σ_{33} κατά 5.45% από $\sigma_{33} = 1.203$ σε $\sigma_{33} = 1.268$. Με αυτή την αλλάγη στον Σ, το διάνυσμα $\mathbf{w}$ είναι

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.781 \\ 0.162 \\ 0.057 \end{bmatrix}$$

και άρα οι ποσοστιαίες μεταβολές των w_1, w_2 είναι -0.13%, 0.62% αντίστοιχα ενώ το w_3 δεν άλλαξε καθόλου αλλά παρέμεινε σταθερό στο 0.057.

Από την παραπάνω άσκηση σχετικά με τις διαταραχές στις διακυμάνσεις αυτό πού προκύπτει ως συμπέρασμα είναι ότι οι διαταραχές στις διακυμάνσεις φαίνεται να επηρεάζουν την άριστη λύση $\mathbf{w}$ λιγότερο από αντίστοιχες διαταραχές στους μέσους (στις αναμενόμενες αποδόσεις). Συγκεκριμένα, το άθροισμα των απόλυτων τιμών των ποσοστιαίων μεταβολών των στοιχείων του $\mathbf{w}$ πού προκλήθηκαν από τις τρεις διαταραχές στα μ_1, μ_2 και μ_3 είναι

$$S_\mu = (2.94 + 26.70 + 115.78) + (2.17 + 4.97 + 17.54) + (0.13 + 5.59 + 14.01) = 189.83,$$

ενώ το αντίστοιχο άθροισμα πού αντιστοιχεί στις τρείς διαταραχές των σ_{11}, σ_{22} και σ_{33} είναι

$$S_{\sigma_{ii}} = (2.30 + 15.53 + 12.28) + (1.02 + 8.07 + 8.77) + (0.13 + 0.62 + 0) = 48.72.$$

Τέλος μένει να εξετάσουμε την επίδραση των αντίστοιχων διαταραχών στις συνδιακυμάνσεις των τριών μετοχών. Ξεκινάμε από την σ_{12} την οποία μεταβάλλουμε κατά 5.45% από $\sigma_{12} = 0.408$ σε $\sigma_{12} = 0.430$. Το διάνυσμα των αναμενόμενων αποδόσεων παραμένει το αρχικό, δηλαδή αυτό πού θέσαμε στο (ref: intial_m) και ο πίνακας Σ είναι ο (ref: initial_v) με την μόνη αλλαγή αυτή πού εισάγαμε στην σ_{12}. Με το νέο Σ το άριστο χαρτοφυλάκιο γίνεται το

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.594 \\ -0.046 \\ 0.452 \end{bmatrix}.$$

Οι ποσοστιαίες μεταβολές των w_1, w_2 και w_3 είναι 1.41%, −10.56% και 10.53% αντίστοιχα. Στη συνέχεια, επαναλαμβάνουμε την άσκηση για την σ_{13} μεταβάλλοντας την κατά 5.45% από $\sigma_{13} = 0.358$ σε $\sigma_{13} = 0.378$. Γιά αυτές τις παραμέτρους έχουμε,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.777 \\ 0.167 \\ 0.055 \end{bmatrix},$$

πού σημαίνει ότι τα σταθμά w_1, w_2 και w_3 μεταβάλλονται κατά −0.64%, 3.73% και −3.51% αντίστοιχα. Τέλος, μεταβάλλουμε την σ_{23} κατά 5.45% από $\sigma_{23} = 0.986$ σε $\sigma_{23} = 1.040$. Με αυτή την αλλάγη στον Σ, το διάνυσμα **w** είναι

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.782 \\ 0.161 \\ 0.057 \end{bmatrix}$$

και άρα δεν υπάρχει καμία ποσοστιαία μεταβολή στα w_1, w_2 και w_3.

Εύκολα κάποιος μπορεί να συμπεράνει ότι οι ποσοστιαίες μεταβολές των w_1, w_2 και w_3 που προκύπτουν από τις διαταραχές στις διακυμάνσεις είναι ακόμη μικρότερες σε σύγκριση με και από αυτές που προκύπτουν από τις διαταραχές στις διακυμάνσεις. Συγκεκριμένα, το άθροισμα των απόλυτων τιμών των ποσοστιαίων μεταβολών των στοιχείων του **w** πού προκλήθηκαν από τις τρείς διαταραχές στα σ_{12}, σ_{13} και σ_{23} είναι

$$S_{\sigma_{ij}} = (1.41 + 10.56 + 10.53) + (0.64 + 3.73 + 3.51) = 30.38.$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι συνεπή με αποτελέσματα από αντίστοιχες μελέτες στη διεθνή βιβλιογραφία, σύμφωνα με τα οποία ένα σφάλμα στην εκτίμηση του $\boldsymbol{\mu}$ έχει μεγαλύτερες συνέπειες στην εκτίμηση του $\mathbf{w}$ από ένα αντίστοιχο σφάλμα στην εκτίμηση των διακυμάνσεων, το οποίο με τη σειρά του έχει μεγαλύτερες συνέπειες από ένα αντίστοιχο σφάλμα στην εκτίμηση των συνδιακυμάνσεων.

Προσομοιώσεις Monte Carlo

Οι προσομοιώσεις Monte Carlo είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος διερεύνησης της συμπεριφοράς των εκτιμητών σε μικρά δείγματα. Συγκεκριμένα, όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει ο εκτιμητής $\widehat{\mathbf{w}}$ δεν είναι αμερόληπτος εκτιμητής του $\mathbf{w}$. Πλην όμως είναι συνεπής εκτιμητής του πραγματικού $\mathbf{w}$. Αυτό σημαίνει ότι για μικρά δείγματα αναμένουμε ένα σημαντικό μεροληπτικό σφάλμα $E(\widehat{\mathbf{w}}) - \mathbf{w}$ το οποίο θα πρέπει να τείνει στο μηδέν, όσο το μέγεθος του δείγματος T αυξάνεται. Με τις προσομοιώσεις Monte Carlo θα μας δοθεί η δυνατότητα να δούμε πόσο μεγάλο είναι όντως αυτό το μεροληπτικό σφάλμα, πώς επηρεάζει την κατασκευή του άριστου χαρτοφυλακίου, και με τι ρυθμό αυτό το σφάλμα τείνει στο μηδέν όσο το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται.

Η μέθοδος Monte Carlo βασίζεται στην δημιουργία τυχαίων αριθμών (απ'οπου και το όνομα της). Πιό συγκεκριμένα, η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε "τεχνητά δεδομένα" από μιά στοχαστική διαδικασία τις ιδιότητες της οποίας θέτουμε εμείς εκ των προτέρων. Για παράδειγμα, αν θελήσουμε να δημιουργήσουμε δεδομένα κάτω από την υπόθεση (ref: iid1a) τότε θα ζητήσουμε από μιά γεννήτρια τυχαίων αριθμών να μας παράξει n σειρές (π.χ. $n = 3$) μεγέθους T η κάθε μία (π.χ. $T = 100$). Κάθε μιά από τις n σειρές θα θεωρείται ως πραγματοποίηση μιάς ανέλιξης η οποία επιδεικνύει διαχρονική ανεξαρτησία, ταυτονομία και Κανονικότητα. Επιπλέον, οι n σειρές θα επιδεικνύουν ταυτόχρονη εξάρτηση όπως περιγράφεται από τις συνδιακυμάνσεις του πίνακα Σ τον οποίο ορίζουμε εμείς. Με αυτό το τρόπο παράγουμε n σειρές μεγέθους T, οι οποίες αντιστοιχούν στη (γνωστή σε εμάς) διανυσματική στοχαστική ανέλιξη πού αναφέραμε παραπάνω. Το εξαιρετικά χρήσιμο στοιχείο της μεθόδου είναι ότι μας επιτρέπει να παράξουμε όσες $n-$άδες μεγέθους T επιθυμούμε. Κάθε τέτοια $n-$αδα αποτελεί μιά αναπαραγωγή (replication) της διαδικασίας Monte Carlo και το σύνολο όλων των αναπαραγωγών έχει μέγεθος N (π.χ. $N = 1000$ αναπαραγωγές).

Αντιμετωπίζοντας την κάθε αναπαραγωγή ως ένα σύνολο "πραγματικών δεδομένων" μπορούμε να υπολογίσουμε όποιον εκτιμητή μας ενδιαφέρει. Για παράδειγμα, ο εκτιμητής $\widehat{\mu}_1$,

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} R_{1j} \qquad \#$$

μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την πρώτη αναπαραγωγή απο στοιχεία

$$\{R_{11}, R_{12}, \ldots, R_{1T}\}_1$$

πού αντιστοιχούν στην R_{1t}. Από την πρώτη αναπαραγωγή θα πάρουμε την πρώτη τιμή $\widehat{\mu}_{1,1}$ για το $\widehat{\mu}_1$ σύμφωνα με την (ref: mean_mc1). Μιά δεύτερη αναπαραγωγή

$$\{R_{11}, R_{12}, \ldots, R_{1T}\}_2$$

θα μας επιτρέψει να πάρουμε μιά δεύτερη τιμή $\widehat{\mu}_{1,2}$ για το $\widehat{\mu}_1$ και ούτω κάθε εξής. Η αντιστοίχηση μεταξύ των αναπαραγωγών και των τιμών του $\widehat{\mu}_1$ έχει ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \{R_{11}, R_{12}, \ldots, R_{1T}\}_1 & \Leftrightarrow & \widehat{\mu}_{1,1} \\ \{R_{11}, R_{12}, \ldots, R_{1T}\}_2 & \Leftrightarrow & \widehat{\mu}_{1,2} \\ \cdots & & \\ \{R_{11}, R_{12}, \ldots, R_{1T}\}_N & \Leftrightarrow & \widehat{\mu}_{1,N} \end{bmatrix}.$$

Παίρνοντας τον μέσο των N τιμών για το $\widehat{\mu}_1$ έχω μιά τιμή πού αντιστοιχεί στην θεωρητική οντότητα $E(\widehat{\mu}_1)$,

$$E(\widehat{\mu}_1) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} \widehat{\mu}_{1,s}.$$

Μην ξεχνάμε ότι την πραγματική τιμή του μ_1 την γνωρίζουμε ήδη αφού βάση αυτής δημιουργήσαμε τα δεδομένα. Κατά συνέπεια μπορούμε να υπολογίσουμε το μεροληπτικό σφάλμα $E(\widehat{\mu}_1) - \mu_1$ και να ελέγξουμε πόσο κοντά στο μηδέν αυτό βρίσκεται.

Παρατήρηση

Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου Monte Carlo είναι ότι επιτρέπει στον ερευνητή να γνωρίζει τόσο την πραγματική τιμή της παραμέτρου πού τον ενδιαφέρει (εν προκειμένω των $\boldsymbol{\mu}$ και Σ) όσο και τις εκτιμήσεις αυτών. Αυτή η κατάσταση δεν ισχύει στον πραγματικό κόσμο όπου ο ερευνητής χρησιμοποιεί πραγματικά δεδομένα για τα οποία δεν γνωρίζει το μοντέλο (τη στοχαστική διαδικασία) πού τα παρήγαγε. Σε αυτή τη περίπτωση ο ερευνητής είναι σε θέση να γνωρίζει μόνο τις εκτιμήσεις των παραμέτρων ενδιαφέροντος αλλά όχι και τις πραγματικές τιμές αυτών των παραμέτρων.

Το πρώτο πείραμα πού θα διενεργήσουμε βασίζεται στην εξής στοχαστική διαδικασία:

$$\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} R_{1t} \\ R_{2t} \\ R_{3t} \end{bmatrix} \sim NIID(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \qquad \#$$

με

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0.0367 \\ 0.0463 \\ 0.0673 \end{bmatrix} \qquad \#$$

και

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.734 & 0.408 & 0.358 \\ 0.408 & 1.469 & 0.986 \\ 0.358 & 0.986 & 1.203 \end{bmatrix}. \qquad \#$$

Παρατήρηση

Ο πίνακας Σ πού ορίστηκε στην (ref: cov_s1) συνεπάγεται τον ακόλουθο πίνακα συσχετίσεων P,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.39 & 0.38 \\ 0.39 & 1 & 0.74 \\ 0.38 & 0.74 & 1 \end{bmatrix}.$$

Από τον πίνακα P παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο βαθμό (θετικής) συσχέτισης επιδεικνύουν οι σειρές R_{2t} και R_{2t} αφού ο συνετελεστής συσχέτισης τους είναι $\rho_{23} = 0.74$.

Η αναμενόμενη απόδοση στόχος τίθεται αρχικά στο $\mu_{R_p} = 0.05\%$. Το μέγεθος του δείγματος πού εξετάζουμε είναι $T = 50,\ 150,\ 500,\ 1000,\ 10000$ και 20000. Ο αριθμός των αναπαραγωγών (replications) τίθεται στο $N = 10000$. Στις προσομοιώσεις πού ακολουθούν θα συγκρίνουμε τρία εναλλακτικά χαρτοφυλάκια:

(i) Το θεωρητικό άριστο χαρτοφυλάκιο, r, το οποίο κατασκευάζεται με τις πραγματικές τιμές των w_1, w_2 και w_3 όπως προκύπτουν από την σχέση (ref: solut3a) στην οποία οι παράμετροι $\boldsymbol{\mu}$ και Σ είναι αυτές πού ετέθησαν στις (ref: mean_s1) και (ref: cov_s1) αντίστοιχα. Με βάση αυτές τις τιμές και με $\mu_r = 0.05\%$, στο χαρτοφυλάκιο r αντιστοιχούν σταθμά,

$$\mathbf{w}_r = \begin{bmatrix} w_{1r} \\ w_{2r} \\ w_{3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.594 \\ -0.046 \\ 0.452 \end{bmatrix}.$$

Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου, r, είναι όπως έχει τεθεί εκ των προτέρων στο $\mu_r = 0.05\%$. Αυτό επαληθεύεται αφού

$$\begin{aligned} \mu_r &= w_{1r} \times \mu_1 + w_{2r} \times \mu_2 + w_{3r} \times \mu_3 = \\ &= 0.594 \times 0.0367 - 0.046 \times 0.0463 + 0.452 \times 0.0673 = 0.05. \end{aligned}$$

Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου r, δίνεται από την σχέση

$$\sigma_r^2 = \mathbf{w}_r^{\top} \Sigma \mathbf{w}_r,$$

η οποία για το συγκεκριμένο $\mathbf{w}_r$ και τον συγκεκριμένο Σ παίρνει την τιμή $\sigma_r^2 = 0.798$. Αφού το r είναι το άριστο χαρτοφυλάκιο σημαίνει ότι η διακύμανση $\sigma_r^2 = 0.798$ είναι η μικρότερη δυνατή διακύμανση πού μπορεί να προκύψει για επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης ίσο με $\mu_{R_p} = 0.05\%$.

(ii) Το δεύτερο χαρτοφυλάκιο πού θα εξετάσουμε είναι το "απλοικό" χαρτοφυλάκιο, v, το οποίο βασίζεται στην λεγόμενη "αφελή διαφοροποίηση" (naive diversification) η οποία παίρνει την μορφή της ίσης ποσοστιαίας τοποθέτησης σε κάθε asset (ο κανόνας $1/n$). Στην προκειμένη περίπτωση όπου $n = 3$, το απλοικό χαρτοφυλάκιο v είναι το

$$\mathbf{w}_v = \begin{bmatrix} w_{1v} \\ w_{2v} \\ w_{3v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου v είναι ίση με την αναμενόμενη απόδοση στόχο $\mu_{R_p} = 0.05\%$ πού θέσαμε παραπάνω. Στη πραγματικότητα η επιλογή του 0.05% έγινε έτσι ώστε η αναμενόμενη απόδοση στόχος του άριστου χαρτοφυλακίου r να είναι (εκ κατασκευής) ίση με την αναμενόμενη απόδοση του απλοικού χαρτοφυλακίου για λόγους συγκρισιμότητας των διακυμάνσεων τους. Πράγματι, η αναμενόμενη απόδοση του v είναι

$$\mu_v = \frac{1}{3} \times 0.0367 + \frac{1}{3} \times 0.0463 + \frac{1}{3} \times 0.0673 = 0.05.$$

Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου v, δίνεται από την σχέση

$$\sigma_v^2 = \mathbf{w}_v^\top \Sigma \mathbf{w}_v,$$

η οποία παίρνει την τιμή $\sigma_v^2 = 0.876$. Όπως παρατηρούμε η διακύμανση του v είναι όντως μεγαλύτερη της διακύμανσης του r κατά

$$\frac{(0.876 - 0.798)}{0.798} \times 100 = 9.77\%.$$

(iii) Το τρίτο χαρτοφυλάκιο, e, το οποίο αποκαλούμε "εκτιμημένο άριστο χαρτοφυλάκιο" είναι αυτό στο οποίο τα σταθμά $\widehat{w}_1, \widehat{w}_2$ και $\widehat{w}_3$ είναι οι εκτιμήσεις των w_1, w_2 και w_3 αντίστοιχα πού προκύπτουν από τον εκτιμητή (ref: est_weight1). Η αναμενόμενη απόδοση στόχος του χαρτοφυλακίου e είναι ίση με

$$\mu_e = \widehat{w}_1\mu_1 + \widehat{w}_2\mu_2 + \widehat{w}_3\mu_3$$

η οποία ασυμπτωτικά είναι ίση με 0.05%. Αυτό φαίνεται αν επικαλεστούμε και πάλι το θεώρημα της συνεχούς απεικόνισης με βάση το οποίο

$$\mu_e = \widehat{w}_1\mu_1 + \widehat{w}_2\mu_2 + \widehat{w}_3\mu_3 \xrightarrow{p} w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + w_3\mu_3 = 0.05,$$

όπως και στα δύο προηγούμενα χαρτοφυλάκια.

Παρατήρηση

Μιά εκτίμηση $\widehat{\mu}_e$ της πραγματικής απόδοσης μ_e μπορεί να δοθεί από τον τύπο

$$\widehat{\mu}_e = \widehat{w}_1\widehat{\mu}_1 + \widehat{w}_2\widehat{\mu}_2 + \widehat{w}_3\widehat{\mu}_3$$

όπου $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2$ και $\widehat{\mu}_3$ είναι οι εκτιμητές (δειγματικές ροπές) των πραγματικών πλην άγνωστων μ_1, μ_2 και μ_3. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η εκτίμηση $\widehat{\mu}_e$ θα είναι πάντα ίση με την την τιμή της αναμενόμενης απόδοσης στόχου $\mu_r = 0.05$ πού έχουμε θέσει στο πρόβλημα της αριστοποίησης. Αυτό ίσως δεν είναι εμφανές εκ πρώτης όψεως και οφείλει να αποδειχθεί. Πράγματι ας ξεκινήσουμε από την σχέση (ref: est_weight1)

$$\widehat{\mathbf{w}}_e = \left[\frac{\widehat{\Gamma}\mu_r - \widehat{A}}{\widehat{\Delta}} \right] \widehat{\Sigma}^{-1} \widehat{\boldsymbol{\mu}} + \left[\frac{\widehat{B} - \widehat{A}\mu_r}{\widehat{\Delta}} \right] \widehat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}. \qquad \#$$

Προ-πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας με τον εκτιμητή $\widehat{\boldsymbol{\mu}}^\top$ του $\boldsymbol{\mu}^\top$, έχουμε

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\widehat{\mathbf{w}}_e = \widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\left[\frac{\widehat{\Gamma}\mu_r - \widehat{A}}{\widehat{\Delta}}\right]\widehat{\Sigma}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}} + \widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\left[\frac{\widehat{B} - \widehat{A}\mu_r}{\widehat{\Delta}}\right]\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}$$

και αφού οι όροι στις αγγύλες είναι βαθμωτά,

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\widehat{\mathbf{w}} = \left[\frac{\widehat{\Gamma}\mu_r - \widehat{A}}{\widehat{\Delta}}\right]\widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\widehat{\Sigma}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}} + \left[\frac{\widehat{B} - \widehat{A}\mu_r}{\widehat{\Delta}}\right]\widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}.$$

Έχουμε όμως ήδη θέσει τις ισότητες

$$\widehat{A} = \mathbf{1}^{\top}\widehat{\Sigma}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}$$
$$\widehat{B} = \widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\widehat{\Sigma}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}}.$$

Αντικαθιστώντας,

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\widehat{\mathbf{w}}_e &= \left[\frac{\widehat{\Gamma}\mu_r - \widehat{A}}{\widehat{\Delta}}\right]\widehat{B} + \left[\frac{\widehat{B} - \widehat{A}\mu_r}{\widehat{\Delta}}\right]\widehat{A} = \\ &= \frac{\widehat{\Gamma}\mu_r\widehat{B} - \widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}\widehat{A} - \widehat{A}^2\mu_r}{\widehat{\Delta}} = \\ &= \frac{\left(\widehat{\Gamma}\widehat{B} - \widehat{A}^2\right)\mu_r}{\widehat{\Delta}}\end{aligned}$$

και αφού

$$\widehat{\Delta} = \widehat{B}\widehat{\Gamma} - \widehat{A}^2$$

συνεπάγεται ότι

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\widehat{\mathbf{w}}_e = \mu_{R_p}.$$

Αυτό σημαίνει ότι ανεξαρτήτως του πόσο "μεροληπτικές" μπορεί να είναι οι εκτιμήσεις των $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ και $\widehat{\mathbf{w}}$, πάντα θα είναι τέτοιες ώστε το γινόμενο τους $\widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\top}\widehat{\mathbf{w}}$ να καταλήγει στην αναμενόμενη απόδοση στόχο πού έχουμε θέσει στο πρόβλημα της αριστοποίησης.

Η διακύμανση του εκτιμημένου άριστου χαρτοφυλακίου e θα είναι ίση με

$$\sigma_e^2 = \widehat{\mathbf{w}}_e^{\top}\Sigma\widehat{\mathbf{w}}_e,$$

όπου Σ είναι ο πραγματικός πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων πού ορίσαμε στην σχέση (ref: cov_s1). Στις πρακτικές εφαρμογές, όπως είπαμε, ο πίνακας Σ (όπως και το διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}$ πού αναφέραμε παραπάνω) δεν έιναι γνωστός και πρέπει να εκτιμηθεί από τα διαθέσιμα στατιστικά στοιχεία. Ως εκ τούτου και η πραγματική διακύμανση σ_e^2 του χαρτοφυλακίου e δεν είναι γνωστή αφού εμπλέκει τον πραγματικό πλην άγνωστο πίνακα Σ. Αντ’αυτής ο ερευνητής πού αντιμετωπιζει μια πραγματική κατάσταση (στην οποία πρέπει να αρκεστεί στον $\widehat{\Sigma}$ αντί του Σ) μπορεί να πάρει μιά εκτίμηση $\widehat{\sigma}_e^2$ της σ_e^2 χρησιμοποιώντας τον τύπο,

$$\widehat{\sigma}_e^2 = \widehat{\mathbf{w}}_e^{\top}\widehat{\Sigma}\widehat{\mathbf{w}}_e.$$

Παρατήρηση

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι τόσο η σ_e^2 όσο και η $\widehat{\sigma}_e^2$ συγκλίνουν κατά πιθανότητα στη θεωρητική διακύμανση σ_r^2. Πράγματι, με δεδομένο ότι $\widehat{\mathbf{w}}_e \xrightarrow{p} \mathbf{w}_r$ και με βάση το θεώρημα συνεχούς απεικόνισης έχουμε

$$\sigma_e^2 = \widehat{\mathbf{w}}_e^{\top}\Sigma\widehat{\mathbf{w}}_e \xrightarrow{p} \mathbf{w}_r^{\top}\Sigma\mathbf{w}_r = \sigma_r^2$$

καθώς επίσης και

$$\widehat{\sigma}_e^2 = \widehat{\mathbf{w}}_e^{\top}\widehat{\Sigma}\widehat{\mathbf{w}}_e \xrightarrow{p} \mathbf{w}_r^{\top}\Sigma\mathbf{w}_r = \sigma_r^2.$$

Τα τρία παραπάνω χαρτοφυλάκια δηλαδή τα r, v και e θα συγκριθούν με βάση το λόγο της αναμενόμενης απόδοσης προς την διακύμανση των αποδόσεων τους. Αυτός ο λόγος συνήθως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως Sharpe ratio (SR).

Παρατήρηση

Κατ'ακρίβεια το Sharpe ratio ορίζεται ως ο λόγος της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου μείον την απόδοση του asset χωρίς κίνδυνο δια την τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Πλην όμως εμείς θα συνεχίσουμε να αποκαλούμε Sharpe ratio τον λόγο της αναμενόμενης απόδοσης προς την διακύμανση του χαρτοφυλακίου.

Κατά συνέπεια για κάθε χαρτοφυλάκιο θα υπολογίσουμε τα SR, ως εξής:

$$SR_r = \frac{\mu_r}{\sigma_r^2}$$
$$SR_v = \frac{\mu_v}{\sigma_v^2}$$
$$SR_e = \frac{\mu_e}{\sigma_e^2}.$$

Είναι προφανές ότι τα SR_r και SR_v μπορούν ήδη να υπολογιστούν χωρίς την διενέργεια οποιασδήποτε προσομοίωσης, αφού γνωρίζουμε εκ των προτέρων τα σταθμά πού χρησιμοποιούνται στην κατασκευή τόσο του χαρτοφυλακίου r (τα άριστα σταθμά) όσο και του χαρτοφυλακίου v (απλοικό χαρτοφυλάκιο). Συγκεκριμένα,

$$SR_r = \frac{\mu_r}{\sigma_r^2} = \frac{0.05}{0.798} = 0.626$$

και

$$SR_v = \frac{\mu_v}{\sigma_v^2} = \frac{0.05}{0.876} = 0.057.$$

Όπως είναι φυσικό $SR_v < SR_r$. Επίσης ισχύει η σχέση

$$SR_e = \frac{\mu_e}{\sigma_e^2} \xrightarrow{p} \frac{\mu_r}{\sigma_r^2} = SR_r.$$

Κατά συνέπεια οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ασυμπτωτικά τα δύο χαρτοφυλάκια r και e θα είναι ισοδύναμα όσον αφορά το κριτήριο SR. Βεβαίως αυτή η ασυμπτωτική ισοδυναμία δεν ισχύει για πεπερασμένα δείγματα μεγέθους T. Για οποιοδήποτε πεπερασμένο T αναμένουμε να ισχύει η ανισότητα,

$$SR_e < SR_r.$$

Το ερώτημα είναι πόσο μεγάλη είναι η διαφορά $(SR_e - SR_r)$ και αν είναι τόσο μεγάλη πού τελικά καθιστά την διαδικασία αριστοποίησης κατα Markowitz στην πράξη μάλλον ανώφελη. Πιό συγκεκριμένα, εκτός της σύγκρισης του SR_e με το SR_r, ενδιαφέρον έχει και η σύγκριση του SR_e με το SR_v. Αν για παράδειγμα, $SR_e \leq SR_v$ τότε το απλοικό χαρτοφυλάκιο (το οποίο προκύπτει πολύ εύκολα ακολουθώντας το κανόνα του $1/n$) προσφέρει καλύτερη σχέση αναμενόμενης απόδοσης - ρίσκου από το "άριστο" χαρτοφυλάκιο το οποίο προκύπτει από την εκτίμηση $\widehat{\mathbf{w}}$ τού $\mathbf{w}$.

Ο τρόπος με τον οποίο διενεργούμε τις προσομοιώσεις Monte Carlo περιγράφεται στα επόμενα βήματα:

Βήμα 1: Χρησιμοποιώντας μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών (η οποία υπάρχει ενσωματωμένη στα περισσότερα οικονομετρικά πακέτα) δημιουργούμε τρείς "ανεξάρτητες" και "ταυτόνομες" σειρές αριθμών (έχουμε υποθέσει ότι $n = 3$), R_{1t}, R_{2t}, R_{3t} μεγέθους T ($T = 50$, 100, 500, 1000, 10000, 20000) οι οποίες επιπλέον κατανέμονται από κοινού Κανονικά με διάνυσμα μέσων $\boldsymbol{\mu}$ και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ όπως ετέθησαν στις (ref: mean_s1) και (ref: cov_s1) αντίστοιχα. Αυτές οι τρείς σειρές μπορούν να θεωρηθούν ως μία παραγματοποίηση μιάς διανυσματικής στοχαστικής ανέλιξης $\mathbf{R}_t = [R_{1t}, R_{2t}, R_{3t}]^\top$ η οποία είναι ανεξάρτητη, ταυτόνομη και Κανονική. Αυτή η τριάδα σειρών πού δημιουργήσαμε αντιστοιχεί στην πρώτη αναπαραγωγή (replication).

Βήμα 2: Βρισκόμαστε ακόμα στην πρώτη αναπαραγωγή. Με βάση τις τρείς σειρές πού παράξαμε, εκτιμούμε τους τρείς μέσους μ_1, μ_2, μ_3, τις τρείς διακυμάνσεις, σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} και τις τρείς συνδιακυμάνσεις σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} χρησιμοποιώντας ως εκτιμητές τις αντίστοιχες δειγματικές ροπές

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} R_{1j}$$

$$\widehat{\mu}_2 = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} R_{2j}$$

$$\widehat{\mu}_3 = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} R_{3j}$$

$$\widehat{\sigma}_{11} = \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{1j}-\widehat{\mu}_1)^2$$

$$\widehat{\sigma}_{22} = \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{2j}-\widehat{\mu}_2)^2$$

$$\widehat{\sigma}_{33} = \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{3j}-\widehat{\mu}_3)^2$$

$$\widehat{\sigma}_{12} = \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{1j}-\widehat{\mu}_1)(R_{2j}-\widehat{\mu}_2)$$

$$\widehat{\sigma}_{13} = \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{1j}-\widehat{\mu}_1)(R_{3j}-\widehat{\mu}_3)$$

$$\widehat{\sigma}_{23} = \frac{1}{T-1}\sum_{j=1}^{T}(R_{2j}-\widehat{\mu}_2)(R_{3j}-\widehat{\mu}_3).$$

Στη συνέχεια και αφού έχουμε ήδη τις πρώτες εκτιμήσεις $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ και $\widehat{\Sigma}$ (αυτές πού αντιστοιχούν στη πρώτη αναπαραγωγή) εκτιμούμε τα σταθμά $\mathbf{w}$, σύμφωνα με τον εκτιμητή

$$\widehat{\mathbf{w}}=\left[\frac{\widehat{\Gamma}\mu_{R_p}-\widehat{A}}{\widehat{\Delta}}\right]\widehat{\Sigma}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\mu}}+\left[\frac{\widehat{B}-\widehat{A}\mu_{R_p}}{\widehat{\Delta}}\right]\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}. \qquad \#$$

Από αυτούς τους εκτιμητές παίρνουμε τις εκτιμήσεις των μέσων, διακυμάνσεων και συνδιακυμάνσεων καθώς επίσης και των τριών σταθμών πού αντιστοιχούν στη πρώτη αναπαραγωγή. Ας συμβολίσουμε αυτές τις εκτιμήσεις ως $\widehat{\mu}_{1,1}$, $\widehat{\mu}_{2,1}$, $\widehat{\mu}_{3,1}$, $\widehat{\sigma}_{11,1}$, $\widehat{\sigma}_{22,1}$, $\widehat{\sigma}_{33,1}$, $\widehat{\sigma}_{12,1}$, $\widehat{\sigma}_{13,1}$, $\widehat{\sigma}_{23,1}$ και $\widehat{w}_{1,1}$, $\widehat{w}_{2,1}$, $\widehat{w}_{3,1}$. Να σημειωθεί ότι ο δεύτερος δείκτης, ο οποίος είναι για όλες τις εκτιμήσεις ίσος με 1, αναφέρεται στην πρώτη αναπαραγωγή.

Βήμα 3: Έχοντας τις παραπάνω εκτιμήσεις από την πρώτη αναπαραγωγή και γνωρίζοντας τις πραγματικές τιμές των μ_1, μ_2, μ_3, σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} και w_1, w_2, w_3 προχωρούμε στον ορισμό κάποιων "μέτρων" πού υπολογίζουν την απόσταση μεταξύ των εκτιμήσεων και των αντίστοιχων πραγματικών τιμών των παραμέτρων ενδιαφέροντος. Το πρώτο μέτρο πού ορίζουμε είναι το "απόλυτο σφάλμα", AE (Absolute Error) , το οποίο γιά κάθε μία από τις παραπάνω εκτιμήσεις $\widehat{\theta}$ (όπου με $\widehat{\theta}$ αναφερόμαστε γενικά σε οποιαδήποτε απο τις παραπάνω 12 εκτιμήσεις) είναι $\left|\widehat{\theta}-\theta\right|$. Το δεύτερο μέτρο είναι το "τετραγωνικό σφάλμα" SE (Square Error) πού ορίζεται ως $\left(\widehat{\theta}-\theta\right)^2$. Το τρίτο μέτρο είναι το "απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα" APE (Absolute Percentage Error) πού ορίζεται ως $\left|\frac{\widehat{\theta}-\theta}{\theta}\right|$. Τα τρία αυτά μέτρα θα μας δώσουν (το καθένα με διαφορετικό τρόπο) το σφάλμα εκτίμησης των εκτιμητών για την πρώτη αναπαραγωγή. Άρα στην πρώτη αναπαραγωγή (δείκτης 1) θα έχουμε υπολογίσει τα

$$AE_1 = \left|\widehat{\theta}_1 - \theta\right|$$

$$SE_1 = \left(\widehat{\theta}_1 - \theta\right)^2$$

και

$$APE_1 = \left|\frac{\widehat{\theta}_1 - \theta}{\theta}\right|.$$

Βήμα 4: Παραμένοντας στην πρώτη αναπαραγωγή, υπολογίζουμε την αναμενόμενη απόδοση και το ρίσκο του εκτιμημένου άριστου χαρτοφυλακίου e για την πρώτη αναπαραγωγή σύμφωνα με τους τύπους

$$\mu_{e,1} = \widehat{w}_{1,1}\mu_1 + \widehat{w}_{2,1}\mu_2 + \widehat{w}_{3,1}\mu_3$$

και

$$\sigma_{e,1}^2 = \widehat{\mathbf{w}}_{e,1}^{\top}\Sigma\widehat{\mathbf{w}}_{e,1}.$$

Τέλος για την πρώτη αναπαραγωγή, υπολογίζουμε το $SR_{e,1}$ σύμφωνα με τη σχέση

$$SR_{e,1} = \frac{\mu_{e,1}}{\sigma_{e,1}^2}.$$

Επίσης υπολογίζουμε την αναμενόμενη απόδοση και το ρίσκο του "πλήρως εκτιμημένου" άριστου χαρτοφυλακίου f για την πρώτη αναπαραγωγή σύμφωνα με τους τύπους

$$\mu_{f,1} = \widehat{w}_{1,1}\widehat{\mu}_1 + \widehat{w}_{2,1}\widehat{\mu}_2 + \widehat{w}_{3,1}\widehat{\mu}_3$$

και

$$\sigma_{f,1}^2 = \widehat{\mathbf{w}}_{f,1}^{\top}\widehat{\Sigma}\widehat{\mathbf{w}}_{f,1}.$$

Τέλος, πάντα για την πρώτη αναπαραγωγή, υπολογίζουμε το $SR_{f,1}$ σύμφωνα με τη σχέση

$$SR_{f,1} = \frac{\mu_{f,1}}{\sigma_{f,1}^2}.$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι τα $\mu_{f,1}$, $\sigma_{f,1}^2$ και $SR_{f,1}$ είναι οι μόνες στατιστικές τις οποίες μπορεί ο ερευνητής να υπολογίσει σε μιά πραγματική κατάσταση (με πραγματικά δεδομένα). Αντίθετα, οι στατιστικές $\mu_{e,1}$, $\sigma_{e,1}^2$ και $SR_{e,1}$ μπορούν να υπολογιστούν μόνο σε περιβάλλον προσομοίωσης, αφού για τον υπολογισμό τους απαιτούνται οι πραγματικές τιμές των μ_1, μ_2 και μ_3 καθώς και του Σ (οι οποίες πραγματικές τιμές είναι γνωστές σε περιβάλλον προσομοίωσης αλλά άγνωστες σε περιβάλλον πραγματικής στατιστικής διερεύνησης ενός φαινομένου).

Βήμα 5: Επαναλαμβάνουμε όλα τα παραπάνω σταδια N φορές, όπου N είναι ο αριθμός των αναπαραγωγών, π.χ. $N = 10000$. Στο τέλος παίρνουμε τους μέσους όρους ως προς τις N αναπαραγωγές όλων των στατιστικών μέτρων πού ορίσαμε παραπάνω. Με αυτό το τρόπο δημιουργούμε το "μέσο απόλυτο σφάλμα" MAE (Mean Absolute Error),

$$MAE(\widehat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\left|\widehat{\theta}_s - \theta\right|,$$

το "μέσο τετραγωνικό σφάλμα" MSE (Mean Square Error),

$$MSE(\widehat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\left(\widehat{\theta}_s - \theta\right)^2,$$

και το "μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα" MAPE (Mean Absolute Percentage Error),

$$MAPE(\widehat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\left|\frac{\widehat{\theta}_s - \theta}{\theta}\right|.$$

Το ίδιο κάνουμε για τον μέσο, τη διακύμανση και το SR_e του εκτιμημένου χαρτοφυλακίου e, δηλαδή παίρνουμε τους αντίστοιχους μέσους όρους ως προς τις N αναπαραγωγές,

$$\overline{\mu}_e = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\mu_{e,s},$$

$$\overline{\sigma}_e^2 = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\sigma_{e,s}^2$$

και

$$\overline{SR}_e = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}SR_{e,s}.$$

Τέλος υπολογίζουμε τους αντίστοιχους μέσους όρους ως προς τις N αναπαραγωγές για την αναμενόμενη απόδοση, την διακύμανση και το Sharpe ratio του πλήρως εκτιμημένου χαρτοφυλάκιο f

$$\overline{\mu}_f = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\mu_{f,s},$$

$$\overline{\sigma}_f^2 = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}\sigma_{f,s}^2$$

και

$$\overline{SR}_f = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N} SR_{f,s}.$$

Βήμα 6: Συγκρίνουμε το $\overline{SR}_e$ με το SR_r και SR_v τα οποία έχουμε ήδη υπολογίσει εκτός προσομοιώσεων. Αν δούμε ότι

$$SR_v < \overline{SR}_e < SR_r$$

τότε συμπεραίνουμε ότι η πρακτική εφαρμογή της διαδικασίας αριστοποίησης κατα Markowitz έχει κάποια αξία αφού δημιουργεί χαρτοφυλάκια με μεγαλύτερα Sharpe ratio από αυτά πού αντιστοιχούν στα χαρτοφυλάκια της αφελούς διαφοροποίησης. Αν όμως παρατηρήσουμε ότι για κάποια μεγέθη δείγματος T,

$$\overline{SR}_e < SR_v$$

τότε η διαδικασία του Markowitz με εκτίμηση των σταθμών δεν έχει πρακτική αξία, αφού μιά άλλη διαδικασία κατασκευής χαρτοφυλακίου (η απλοική που ακολουθεί το κανόνα $1/n$) δίνει χαρτοφυλάκια με μεγαλύτερα Sharpe ratio.

Βήμα 7: Συγκρίνουμε το $\overline{SR}_e$ με το $\overline{SR}_f$. Η σύγκριση αυτή θα μας δείξει ποιό είναι το πραγματικό Sharpe ratio πού όντως χαρακτηρίζει το χαρτοφυλάκιο, e, πού δημιουργείται με τα εκτιμημένα σταθμά $\widehat{w}_1, \widehat{w}_2, \widehat{w}_3$ σε συνδυασμό με τις πραγματικές τιμές των μ_1, μ_2 μ_3 και Σ σε σχέση με το φαινομενικό Sharpe ratio πού ο ερευνητής νομίζει ότι απολαμβάνει και το οποίο δημιουργείται από τα εκτιμημένα σταθμά $\widehat{w}_1, \widehat{w}_2, \widehat{w}_3$ σε συνδυασμό με τις εκτιμήσεις $\widehat{\mu}_1$, $\widehat{\mu}_2$ $\widehat{\mu}_3$ και $\widehat{\Sigma}$. Για παράδειγμα, αν $\overline{SR}_f > \overline{SR}_e$ τότε ο ερευνητής/επενδυτής βρίσκεται σε κατάσταση "παραπλανητικής αισιοδοξίας" υπό την έννοια ότι νομίζει ότι αντιμετωπίζει ένα υψηλότερο Sharpe ratio από ότι χαρακτηρίζει το χαρτοφυλάκιο του στην πραγματικότητα. Να επαναλάβουμε σε αυτο το σημείο, ότι σε πραγματικές καταστάσεις (αντίθετα από τις προσομοιώσεις) ο ερευνητής μπορεί να υπολογίσει μόνο το $\overline{SR}_f$ του πλήρως εκτιμημένου χαρτοφυλακίου f.

Τα αποτελέσματα από το πείραμα της προσομοιώσης πού περιγράψαμε παραπάνω παρουσιάζονται στους πίνακες πού ακολουθούν. Ο πίνακας 1Α περιέχει το "μέσο τετραγωνικό σφάλμα" MSE των εκτιμητών $\widehat{\mu}_1$, $\widehat{\mu}_2$, $\widehat{\mu}_3$, $\widehat{\sigma}_{11}$, $\widehat{\sigma}_{22}$, $\widehat{\sigma}_{33}$, $\widehat{\sigma}_{12}$, $\widehat{\sigma}_{13}$, $\widehat{\sigma}_{23}$ γιά μέγεθος δείγματος $T = 50,\ 150,\ 500,\ 1000,\ 10000$ και 20000.

Πίνακας 1Α
Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα MSE Εκτιμητών Μέσων, Διακυμάνσεων και Συνδιακυμάνσεων
Τιμές Παραμέτρων:
$\mu_r = 0.05\%$, $\mu_1 = 0.0367$, $\mu_2 = 0.046$, $\mu_3 = 0.067$, $\sigma_{11} = 0.734$, $\sigma_{22} = 1.469$, $\sigma_{33} = 1.20$, $\sigma_{12} = 0.408$, $\sigma_{13} = 0.358$, $\sigma_{23} = 0.986$

	$T=50$	$T=150$	$T=500$	$T=1000$	$T=10000$	$T=20000$
$\widehat{\mu}_1$	0.01467	0.00493	0.00148	0.00074	0.00007	0.00004
$\widehat{\mu}_2$	0.02986	0.00984	0.00295	0.00146	0.00015	0.00007
$\widehat{\mu}_3$	0.02441	0.00805	0.00242	0.00121	0.00012	0.00006
$\widehat{\sigma}_{11}$	0.02179	0.00716	0.00215	0.00108	0.00011	0.00005
$\widehat{\sigma}_{22}$	0.08847	0.02915	0.00860	0.00431	0.00043	0.00022
$\widehat{\sigma}_{33}$	0.05818	0.01931	0.00582	0.00289	0.00029	0.00014
$\widehat{\sigma}_{12}$	0.02561	0.00832	0.00249	0.00124	0.00012	0.00006
$\widehat{\sigma}_{13}$	0.02062	0.00672	0.00202	0.00100	0.00010	0.00005
$\widehat{\sigma}_{23}$	0.05547	0.01838	0.00549	0.00275	0.00027	0.00014

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι το MSE γιά όλους τους εκτιμητές μειώνεται, τείνοντας στο μηδέν, όσο το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται. Από τον ορισμό του MSE, γνωρίζουμε ότι το MSE ενός εκτιμητή $\widehat{\theta}$ μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, το μεροληπτικό σφάλμα στο τετράγωνο και τη διακύμανση του $\widehat{\theta}$,

$$\begin{aligned} MSE(\widehat{\theta}) &= E(\widehat{\theta}-\theta)^2 = \left[E(\widehat{\theta})-\theta\right]^2 + Var(\widehat{\theta}) \\ &= \left[bias(\widehat{\theta})\right]^2 + Var(\widehat{\theta}). \end{aligned}$$

Όλοι οι παραπάνω εκτιμητές είναι αμερόληπτοι, το οποίο σημαίνει ότι το $MSE(\widehat{\theta})$ είναι ίσο με την διακύμανση $Var(\widehat{\theta})$ για τον κάθε εκτιμητή. Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός με τον οποίο το $MSE(\widehat{\theta})$ τείνει στο μηδέν είναι ίσος με τον ρυθμό με τον οποίο η $Var(\widehat{\theta})$ τείνει στο μηδέν. Μπορούμε να δείξουμε ότι η $Var(\widehat{\theta})$ για κάθε εκτιμητή από αυτούς πού εξετάζουμε τείνει στο μηδέν με ρυθμό $1/T$. Άρα και το $MSE(\widehat{\theta})$ θα τείνει στο μηδέν με ρυθμό $1/T$. Αυτό το θεωρητικό αποτέλεσμα όντως επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα της προσομοίωσης. Παρατηρούμε, για παράδειγμα, ότι το $MSE(\widehat{\mu}_1)$ του $\widehat{\mu}_1$ για $T=50$ είναι ίσο με 0.01467 ενώ για τριπλάσιο μέγεθος δείγματος, $T=150$ το $MSE(\widehat{\mu}_1)$ είναι ίσο με 0.00493 δηλαδή περίπου το 1/3 του $MSE(\widehat{\mu}_1)$ για $T=50$. Ως άλλο παράδειγμα, το $MSE(\widehat{\sigma}_{13})$ της $\widehat{\sigma}_{13}$ για $T=500$ είναι ίσο με 0.00202, ενώ όταν το μέγεθος του δείγματος διπλασιάζεται σε $T=1000$, το αντίστοιχο $MSE(\widehat{\sigma}_{13})$ μειώνεται περίπου στο μισό.

Στη συνέχεια, περνάμε από την αξιολόγηση των εκτιμητών των "εισροών" του προβλήματος (δηλαδή των εκτιμητών των μ και Σ) στην αξιολόγηση των εκτιμητών των "εκροών" του προβλήματος, δηλαδή στην αξιολόγηση των εκτιμητών $\widehat{w}_1$, $\widehat{w}_2$ και $\widehat{w}_3$ των σταθμών w_1, w_2 και w_3 του άριστου χαρτοφυλακίου. Τα MSE των $\widehat{w}_1$, $\widehat{w}_2$ και $\widehat{w}_3$ για τα εναλλακτικά μεγέθη δείγματος T πού εξετάζουμε παρουσιάζονται στο πίνακα 1Β.

Πίνακας 1Β
Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα MSE Εκτιμητών των Σταθμών
Τιμές Παραμέτρων:
$\mu_r = 0.05\%,\ \mu_1 = 0.0367,\ \mu_2 = 0.046,\ \mu_3 = 0.067,\ \sigma_{11} = 0.734,\ \sigma_{22} = 1.469,$
$\sigma_{33} = 1.20,\ \sigma_{12} = 0.408,\ \sigma_{13} = 0.358,\ \sigma_{23} = 0.986$

$$\begin{bmatrix} & T=50 & T=150 & T=500 & T=1000 & T=10000 & T=20000 \\ \widehat{w}_1 & 4.91438 & 1.38213 & 1.19032 & 1.01510 & 0.03495 & 0.01337 \\ \widehat{w}_2 & 5.61457 & 2.13546 & 1.72535 & 1.59206 & 0.05265 & 0.01724 \\ \widehat{w}_3 & 2.32317 & 2.59443 & 2.33142 & 1.97359 & 0.11907 & 0.05183 \end{bmatrix}$$

Τα αποτελέσματα του πίνακα 1Β δείχνουν ότι τα MSE των εκτιμητών $\widehat{w}_1$, $\widehat{w}_2$ και $\widehat{w}_3$ μειώνονται όσο το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει, γεγονός πού υποδηλώνει την συνέπεια των εκτιμητών αυτών. Πλήν όμως για μικρά δείγματα, π.χ. για $T = 50$ τα MSE είναι εξαιρετικά υψηλά γεγονός πού οφείλεται στην μεροληψία των εκτιμητών $\widehat{w}_1$, $\widehat{w}_2$ και $\widehat{w}_3$. Ο ρυθμός με τον οποίο το μεροληπτικό σφάλμα (το οποίο είναι η μία από τις δύο συνιστώσες του MSE μειώνεται είναι αρκετά αργός και δεν ακολουθεί γραμμική φθίνουσα πορεία. Γιά παράδειγμα, ενώ από την περίπτωση $T = 50$ στη περίπτωση $T = 150$ το $MSE(\widehat{w}_1)$ μειώνεται από 4.91438 σε 1.38213 (δηλαδή περίπου μειώνεται στο 1/3) για μεγαλύτερα μεγεθη δείγματος η μείωση του MSE είναι πολύ πιό αργή. Συγκεκριμένα, το $MSE(\widehat{w}_1)$ γιά $T = 500$ είναι 1.19032. Όταν το μέγεθος του δείγματος διπλασιαστεί σε $T = 1000$ το αντίστοιχο $MSE(\widehat{w}_1)$ μείωνεται μόνο σε 1.01510 δηλαδή παραμένει στο 85% του $MSE(\widehat{w}_1)$ για $T = 500$. Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές του T η ταχύτητα μείωσης του MSE φαίνεται να αυξάνεται σημαντικά ξεπερνώντας το γραμμικό ρυθμό. Συγκεκριμένα, το $MSE(\widehat{w}_1)$ μειώνεται από 1.01510 για $T = 1000$ σε 0.03495 για $T = 10000$ δηλαδή για δεκαπλασιασμό στο μέγεθος του δείγματος έχουμε μία μείωση του MSE κατά περίπου 30 φορές. Αυτό σημαίνει ότι το MSE των εκτιμητών των σταθμών είναι φθίνουσα μεν, μη-γραμμική δε συνάρτηση του T. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι χρειαζόμαστε πολύ μεγάλα δείγματα πρίν το μεροληπτικό σφάλμα (και κατά συνέπεια το MSE) μειωθεί σε ικανοποιητικά επίπεδα.

Ερωτήσεις Επανάληψης

1) Να περιγράψετε το "πρόβλημα του επενδυτή". Να εξηγήσετε το γιατί το πρόβλημα του επενδυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του γενικού προβλήματος της λήψης μιας απόφασης σε καθεστώς ρίσκου (Von Neumann - Morgenstern).

2) Έστω ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι τετραγωνική συνάρτηση του πλούτου του. Να αναλύσετε τη σχέση μεταξύ χρησιμότητας του επενδυτή και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου.

3) Έστω ότι η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι τετραγωνική συνάρτηση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Να δείξετε ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή είναι συνάρτηση μόνο του μέσου και της διακύμανσης της απόδοσης του χαρτοφυλακίου.

4) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: Ένας επενδυτής με τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας ενδιαφέρεται για την ασυμμετρία της απόδοσης του χαρτοφυλακίου.

5) Αν η από-κοινού κατανομή των αποδόσεων των n assets με κίνδυνο στην Οικονομία είναι η Κανονική, τότε σε τι χρειάζεται η υπόθεση της τετραγωνικής συνάρτησης χρησιμότητας?

6) Να ορίσετε το πρόβλημα αριστοποίησης κατά Markowitz. Να εξηγήσετε το

πώς συνδέεται το συγκεκριμένο πρόβλημα με την υπόθεση της τετραγωνικής χρησιμότητας.

7) Να διατυπώσετε και να λύσετε το πρόβλημα του Markowitz όταν στην Οικονομία υπάρχουν *n* assets με κίνδυνο. Να σχολιάσετε τους περιορισμούς του προβλήματος.

8) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: Κάθε επενδυτής είναι δυνατόν να αντιμετωπίζει το δικό του υποκειμενικό αποτελεσματικό σύνορο.

9) Να διατυπώσετε και να λύσετε το πρόβλημα του Markowitz όταν στην Οικονομία υπάρχουν *n* assets με κίνδυνο και ένα asset χωρίς κίνδυνο. Πώς αλλάζει το αποτελεσματικό σύνορο σε αυτή τη περίπτωση?

10) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: Κάθε επενδυτής είναι δυνατόν να αντιμετωπίζει το δικό του υποκειμενικό εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο.

11) Ποιά είναι τα βασικά προβλήματα από την εφαρμογή της διαδικασίας του Markowitz στην πράξη? Μπορούν τα σταθμά των άριστων χαρτοφυλακίων να εκτιμηθούν με ικανοποιητική ακρίβεια?

Το Μοντέλο Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων CAPM

Εισαγωγή

Η ανάλυση πού προηγήθηκε γεννά το ακόλουθο ερώτημα: Τι θα συνέβαινε στην αγορά των assets με κίνδυνο αν όλοι οι επενδυτές επέλεγαν τα χαρτοφυλάκια τους ακολουθώντας πιστά την διαδικασία αριστοποίησης του Markowitz? Κατ’αρχήν αυτή η ερώτηση προυποθέτει ότι ο κάθε επενδυτής είναι σε θέση να εφαρμόσει την διαδικασία του Markowitz, το οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι ο κάθε επενδυτής γνωρίζει την πραγματική τιμή του διανύσματος των αναμενόμενων αποδόσεων $\boldsymbol{\mu}$ και την πραγματική τιμή του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμνάνσεων Σ. Αν ο κάθε επενδυτής γνωρίζει τα $\boldsymbol{\mu}$ και Σ αυτό σημαίνει ότι όλοι οι επενδυτές συμφωνούν μεταξύ τους για το ποιές είναι οι αναμενόμενες αποδόσεις, οι διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις των *n* assets και επιπλέον η υποκειμενική κατανομή πιθανότητας του κάθε επενδυτή ταυτίζεται με την αντικειμενική (απο-κοινού) κατανομή πιθανότητας των αποδόσεων των *n* assets. Έστω λοιπόν ότι αυτές οι υποθέσεις ισχύουν (μιά μάλλον "ηρωική" υπόθεση). Τότε τι θα συνέβαινε στη τιμή ισορροπίας του καθενός εκ των *n* assets? Με άλλα λόγια, αν όλοι οι επενδυτές συμπεριφερόντουσαν σύμφωνα με την θεωρία του Markowitz, τότε τι συνέπειες θα είχε αυτή η συμπεριφορά στην τιμή ισορροπίας P_i του asset i με $i = 1,2,\ldots,n$? Να σημειωθεί ότι η τιμή ισορροπίας P_i είναι η τιμή για την οποία η ζήτηση για το asset i καθίσταται ίση με την προσφορά του asset i.

Παρατήρηση
Η παραπάνω υπόθεση περί της κοινής υποκειμενικής κατανομής πιθανότητας για τις αποδόσεις των *n* assets για όλους τους επενδυτές γεννά το εξής ερώτημα: Αν όλοι οι επενδυτές έχουν τις ίδιες αναμενόμενες αποδόσεις (π.χ όλοι θεωρούν ότι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής Α είναι 4%) τότε πώς θα προβούν σε αγοραπωλησίες μεταξύ τους? Η απάντηση βασίζεται στο ότι οι επενδυτές έχουν

διαφορετικό βαθμό αποστροφής του κινδύνου. Άρα ακόμα και αν δύο επενδυτές έχουν την ίδια άποψη σχετικά με την αναμενόμενη απόδοση της μετοχής Α, ο πρώτος μπορεί να θέλει να πουλήσει την Α αν θεωρεί ότι αυτή η αναμενόμενη απόδοση δεν του προσφέρει ικανοποιητική ανταμοιβή για το ρίσκο πού αναλαμβάνει, ενώ ο δεύτερος να θέλει να την αγοράσει. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι ο πρώτος επενδυτής έχει μεγαλύτερο βαθμό αποστροφής του κινδύνου απ'ότι ο δεύτερος.

Το μοντέλο πού θα αναλύσουμε σε αυτό το κεφάλαιο αποσκοπεί στο να απαντήσει στο ερώτημα πού θέσαμε παραπάνω, δηλαδή πώς διαμορφώνεται η τιμή ισορροπίας για το κάθε asset με κίνδυνο. Για το λόγο αυτό ονομάζεται μοντέλο αποτίμησης. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν αρκετά μοντέλα αποτίμησης. Το συγκεκριμένο πού θα αναλύσουμε στην συνέχεια ονομάζεται Capital Asset Pricing Model (CAPM) και είναι το πλέον διαδεδομένο μοντέλο αποτίμησης στη βιβλιογραφία. Επιπλέον είναι και το πρώτο μοντέλο αποτίμησης πού προτάθηκε με όλα τα μεταγενέστερα μοντέλα να αποτελούν είτε τροποποιήσεις είτε επεκτάσεις του CAPM. Το CAPM προτάθηκε απο τους Jack Treynor το 1961, William Sharpe (1964), John Lintner (1965) και Jan Mossin (1966).

Το CAPM (όπως και κάθε θεωρητικό μοντέλο) βασίζεται σε κάποιες υποθέσεις (προκείμενες). Οι υποθέσεις αυτές είναι συχνά μη ρεαλιστικές. Πλην όμως αυτό δεν μας εμποδίζει να τις υιοθετήσουμε προκειμένου να κερδίσουμε την αναλυτική ευκολία πού μας προσφέρουν. Όπως παραδέχεται ο ίδιος ο Sharpe: "Είναι περιττό να υπογραμμίσουμε ότι οι υποθέσεις αυτές είναι εξαιρετικά περιοριστικές και αναμφίβολα μη-ρεαλιστικές. Πλην όμως ο ενδεδειγμένος έλεγχος μιάς θεωρίας δεν είναι ο ρεαλισμός των υποθέσεων της αλλά η αποδοχή των συμπερασμάτων της. Με δεδομένο ότι αυτές οι υποθέσεις συνεπάγονται συνθήκες ισορροπίας οι οποίες αποτελούν το μεγαλύτερο μέρος της κλασσικής χρηματοοικονομικής θεωρίας, δεν είναι καθόλου προφανές ότι αυτή η θεμελίωση πρέπει να απορριφθεί, ειδικά αν λάβουμε υπόψη μας την παντελή έλλειψη εναλλακτικών μοντέλων πού να οδηγούν σε παρόμοια αποτελέσματα." Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι συχνά η ανάλυση συμπληρώνεται εκ των υστέρων με μιά διερεύνηση του πώς μεταβάλλονται τα σημαντικότερα αποτελέσματα του μοντέλου αν οι αρχικές υποθέσεις γίνουν πιό ρεαλιστικές. Ποιές είναι οι υποθέσεις του CAPM? Αυτές οι υποθέσεις παρουσιάζονται και αναλύονται στην επόμενη ενότητα.

Πριν παρουσιάσουμε τις υποθέσεις του CAPM ας δώσουμε μια σύνοψη του τι κάνει αυτό το μοντέλο. Όπως είπαμε το CAPM ξεκινά με την υπόθεση ότι όλοι οι επενδυτές ακολουθούν την διαδικασία αριστοποίησης του Markowitz ως τρόπο επιλογής του χαρτοφυλακίου τους. Με βάση αυτή την υπόθεση το CAPM θέτει το εξής ερώτημα: Πώς καθορίζεται η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας για το asset *i*? Με άλλα λόγια, ποιοί παράγοντες επηρεάζουν την αναμενόμενη απόδοση του asset *i* η οποία επιφέρει ισορροπία μεταξύ προσφοράς και ζήτησης του asset *i*. Για παράδειγμα, έστω ότι η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας του asset *i* είναι 4%. Επίσης έστω ότι η αναμενόμενη τιμή τού asset *i* για την επόμενη περίοδο είναι 104 ευρώ. Τότε η τρέχουσα τιμή του asset *i* πρέπει να διαμορφωθεί στα 100 ευρώ, προκειμένου η αναμενόμενη απόδοση να είναι 4%. Με άλλα λόγια η ερώτηση "ποιά είναι η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας" είναι ταυτόσημε με την ερώτηση "ποιά είναι η τρέχουσα τιμή ισορροπίας" για το asset *i*. Η τρέχουσα τιμή 100, επιφέρει ισορροπία στην αγορά του asset *i* το οποίο είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι η αναμενόμενη απόδοση του 4% επιφέρει ισορροπία στην αγορά του asset *i*. Το ερώτημα είναι πώς διαμορφώνεται αυτό το 4%? Γιατί για μιά μετοχή η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας να είναι 4% και για μιά άλλη να είναι 3%? Αν θεωρήσουμε ότι αυτό το 4% είναι η "αποζημίωση" των επενδυτών για το ρίσκο πού επιδεικνύει το asset *i*, τότε ποιό ρίσκο είναι αυτό πού αξιολογούν οι επενδυτές? Το CAPM απαντά σε αυτό ακριβώς το ερώτημα. Συγκεκριμένα το μοντέλο αυτό καταλήγει σε τρία βασικά (και σχετιζόμενα μεταξύ τους) συμπεράσματα: Πρώτον, το ενδεδειγμένο ρίσκο για το οποίο πρέπει να αποζημιωθούν οι επενδυτές επειδή διακρατούν (ζητούν) το asset με κίνδυνο *i*, (ή ένα μη-αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο *i*) δεν είναι το ολικό ρίσκο του asset *i* αλλά μόνο το συστηματικό ρίσκο του *i*, το οποίο μετριέται με τον συντελεστή b_i του *i*. Δεύτερον, η σχέση ισορροπίας μεταξύ της αναμενόμενης απόδοσης του asset *i* και του συστηματικού ρίσκου, b_i, του asset *i* είναι γραμμική, με σταθερό όρο ίσο με την απόδοση R_f του asset χωρίς κίνδυνο και συντελεστή κλίσης ίσο με το ασφάλιστρο κινδύνου $[E(R_m) - R_f]$ της αγοράς. Τρίτον, αν αντί για το μεμονωμένο asset *i* είχαμε ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο *p*, τότε η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας του p είναι γραμμική συνάρτηση όχι του συντελστή b_i αλλά του συντλεστή σ_p/σ_m όπου σ_m είναι η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου της αγοράς.

Υποθέσεις του CAPM

Οι υποθέσεις του CAPM είναι οι ακόλουθες:

Υπόθεση I: Οι ποσότητες των *n* assets (γιά παράδειγμα ο αριθμός των μετοχών για κάθε μετοχή *i*) είναι δεδομένες και σταθερές.

Υπόθεση II: Όλοι οι επενδυτές είναι "αποδέκτες των τιμών" (price takers) υπό την έννοια ότι οι μεμονωμένες ενέργειες του καθενός δεν επηρεάζουν τις τιμές των *n* assets. Κατά συνέπεια, όλοι οι επενδυτές αντιμετωπίζουν τις ίδιες τιμές για κάθε ένα από τα *n* assets.

Υπόθεση III: Όλοι οι επενδυτές επιλέγουν χαρτοφυλάκια ακολουθώντας την αρχή της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης χρησιμότητας του μελλοντικού τους πλούτου.

Υπόθεση IV: Ο χρονικός ορίζοντας της επένδυσης γιά κάθε επενδυτή είναι μία περίοδος. Όλοι οι επενδυτές παίρνουν τις επενδυτικές τους αποφάσεις την ίδια χρονική στιγμή.

Υπόθεση V: Όλοι οι επενδυτές αποστρέφονται τον κίνδυνο. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι επενδυτές έχουν κοίλες συναρτήσεις χρησιμότητας. Αυτή η υπόθεση δεν σημαίνει φυσικά ότι όλοι οι επενδυτές έχουν τον ίδιο βαθμό αποστροφής του κινδύνου.

Υπόθεση VI: Η αναμενόμενη χρησιμότητα του κάθε επενδυτή είναι συνάρτηση μόνο της αναμενόμενης απόδοσης και του ρίσκου του χαρτοφυλακίου. Αυτό όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα εξασφαλίζεται με το να υποθέσουμε είτε ότι οι επενδυτές έχουν τετραγωνικές συναρτήσεις χρησιμότητας είτε με το να υποθέσουμε ότι οι απο-κοινού κατανομή των αποδόσεων είναι Κανονική.

Υπόθεση VII: Όλοι οι επενδυτές γνωρίζουν το διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}$ των αναμενόμενων αποδόσεων και το πίνακα Σ των διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των *n* assets. Αυτό σημαίνει, όπως είδαμε και παραπάνω, ότι όλοι οι επενδυτές έχουν ομογενείς προσδοκίες σχετικά με τις μελλοντικές αποδόσεις των *n* assets.

Υπόθεση VIII: Υπάρχει ένα asset χωρίς κίνδυνο με σίγουρη απόδοση (μιάς περιόδου) ίση με R_f. Όλοι οι επενδυτές συμφωνούν ότι όντως το asset είναι χωρίς κίνδυνο. Επίσης όλοι οι επενδυτές μπορούν να δανείσουν ή να δανειστούν στο R_f όση ποσότητα χρήματος επιθυμούν.

Υπόθεση IX: Όλα τα assets με κίνδυνο στην Οικονομία είναι τα *n* assets και όλα είναι διαπραγματεύσιμα στην αγορά. Επιπλέον δεν υπάρχουν φόροι ή έξοδα συναλλαγών.

Υπόθεση X: Η αγορά είναι αποτελεσματική, υπό την έννοια ότι η διαθέσιμη πληροφορία ενσωματώνεται στις τιμές με ταχύτητα (σχεδόν ακαριαία) και με ακρίβεια.

Παρατηρούμε ότι κάποιες από τις παραπάνω υποθέσεις αφορούν στα υποκειμενικά χαρακτηριστικά των επενδυτών και κάποιες στα αντικειμενικά χαρακτηριστικά της αγοράς. Συγκεκριμένα, οι υποθέσεις (III), (IV), (V), (VI) και (VII) αφορούν στη συμπεριφορά των επενδυτών ενώ οι υποθέσεις (I), (II), (VIII), (IX) αφορούν στην δομή της αγοράς. Η υπόθεση X είναι μια υπόθεση η οποία καλύπτει τόσο τα συμπεριφορικά χαρακτηριστικά των επενδυτών όσο και την δομή της αγοράς. Συγκεκριμένα, για να είναι η αγορά αποτελεσματική σημαίνει ότι οι επενδυτές πού δραστηριοποιούνται σε αυτή την αγορά είναι ορθολογικοί. Κατά συνέπεια, η υπόθεση (X) μπορεί να αναφέρεται στην ίδια την αγορά αλλά υποκρύπτει μιά υπόθεση για τα υποκειμενικά χαρακτηριστικά (ορθολογισμός) των επενδυτών.

Με βάση αυτές τις δέκα υποθέσεις το CAPM καταλήγει σε κάποια συμπεράσματα για το πώς καθορίζονται οι τιμές των *n* assets. Από τη στιγμή πού η προσφορά των assets θεωρείται δεδομένη και σταθερή (Υπόθεση I) η τιμή του κάθε asset θα καθοριστεί από την ζήτηση πού διαμορφώνεται για το κάθε asset. Η ζήτηση με τη σειρά της εξαρτάται από το αν οι επενδυτές πού θα ζητήσουν τα assets αυτά (οι οποίοι αποστρέφονται το κίνδυνο) θεωρούν ότι ανταμοίβονται επαρκώς για το ρίσκο πού αναλαμβάνουν. Πότε οι επενδυτές θα θεωρήσουν ότι ανταμοίβονται επαρκώς? Όταν το ασφάλιστρο κινδύνου του κάθε asset είναι αυτό πού επιθυμούν οι επενδυτές. Ποιό είναι το αποδεκτό ή το δίκαιο ασφάλιστρο κινδύνου γιά κάθε asset? Εναλλακτικά, ποιό είναι το ασφάλιστρο κινδύνου ισορροπίας για το κάθε asset? Σε αυτή ακριβώς την ερώτηση απαντά το CAPM. Με άλλα λόγια το CAPM δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια θεωρία για το πώς προσδιορίζεται το ασφάλιστρο κινδύνου γιά κάθε asset το οποίο (ασφάλιστρο κινδύνου) εξασφαλίζει την ισορροπία μεταξύ προσφοράς και ζήτησης για το κάθε asset. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το βασικό συμπέρασμα του CAPM είναι ότι το ασφάλιστρο κινδύνου ρ_i του asset *i*, το οποίο ως συνήθως ορίζεται ως

$$\rho_i \equiv E(R_i) - R_f,$$

για το οποίο η προσφορά του asset *i* ισούται με την ζήτηση για το asset *i*, είναι ίσο με το "βήτα" του asset *i* επί το ασφάλιστρο κινδύνου της αγοράς:

$$\rho_i \equiv E(R_i) - R_f = b_i[E(R_m) - R_f].$$

Το βήτα της μετοχής ορίζεται ως

$$b_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}.$$

Παρατήρηση

Το παραπάνω συμπέρασμα του CAPM αφορά είτε το μεμονωμένο asset *i* είτε το χαρτοφυλάκιο *i* το οποίο δεν είναι αποτελσματικό. Αν αντί του *i* είχαμε το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο *p* τότε ο κανόνας τιμολόγησης αλλάζει και πλέον το ρίσκο πού τιμολογείται είναι το συνολικό ρίσκο του *p*.

Με άλλα λόγια, το CAPM οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για την διαμόρφωση του ασφαλίστρου κινδύνου ισορροπίας ενός μεμονωμένου asset *i* (ή ενός μη-αποτελσματικού χαρτοφυλακίου) οι επενδυτές υπολογίζουν μόνο το βήτα του asset *i*, δηλαδή μόνο το συστηματικό (και όχι τον συνολικό) κίνδυνο του asset *i*. Πώς το CAPM παράγει αυτό το αποτέλεσμα? Αυτό το θέμα αναλύεται στην επόμενη ενότητα. Στο παρον σημείο αρκεί να τονίσουμε ότι το CAPM ήταν το πρώτο μοντέλο στο οποίο η σχέση μεταξύ της τιμής ισορροπίας του asset *i* και του ρίσκου του asset *i* παράγεται από ένα σύνολο υποθέσεων (τις δέκα υποθέσεις πού αναλύσαμε παραπάνω) αντί να τίθεται αυθαίρετα. Επίσης το ποιό ρίσκο υπεισέρχεται στην τιμολόγηση (το συστηματικό και όχι το συνολικό ρίσκο για μεμονωμένα assets ή μη-αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια) είναι και αυτό ένα παραγόμενο συμπέρασμα στο πλαίσιο του CAPM. Όπως σχολιάζει ο William Sharpe στην εισαγωγή τού άρθρου του: "Επί του παρόντος δεν υπάρχει καμμιά θεωρία η οποία να περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η τιμή του ρίσκου προκύπτει από τούς βασικούς παράγοντες πού επηρεάζουν τις προτιμήσεις των επενδυτών, τα φυσικά χαρακτηριστικά των κεφαλαιουχικών αγαθών κλπ. Επιπλέον, εξαιτίας του ότι μιά τέτοια θεωρία δεν υπάρχει, είναι δύσκολο να δοθεί οποιαδήποτε πραγματική ερμηνεία στη σχέση μεταξύ της τιμής ενός asset και του ρίσκου του. Μέσω της διαφοροποίησης, κάποιο από το ρίσκο πού ενυπάρχει στο asset μπορεί να αποφευχθεί, το οποίο σημαίνει ότι το ολικό ρίσκο προφανώς δεν είναι ο σχετικός προσδιοριστικός παράγοντας της τιμής. Δυστυχώς πολύ λίγα πράγματα έχουν ειπωθεί για το ποιά συνιστώσα του ρίσκου είναι σχετική για την τιμολόγηση."

Ένα προκαταρκτικό αποτέλεσμα πού προκύπτει από τις παραπάνω δέκα υποθέσεις είναι ότι όλοι οι επενδυτές αντιμετωπίζουν το ίδιο αποτελεσματικό σύνορο (αφού όλοι οι επενδυτές αντιμετωπίζουν τα ίδια $\boldsymbol{\mu}$, Σ και R_f σύμφωνα με την υπόθεση VII περί ομογενών προσδοκιών). Κατά συνέπεια, κάθε επενδυτής, ανεξαρτήτως του βαθμού αποστροφής του κινδύνου πού επιδεικνύει, θα διακρατεί το ίδιο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο *m* από τα *n* assets με κίνδυνο. Όπως έχουμε πεί ο ένας επενδυτής διαφοροποιείται από τον άλλο αναλόγως με το ποσοστό του κεφαλαίου του πού κατανέμει μεταξύ του asset χωρίς κίνδυνο και του κοινού εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου *m*. Αυτό το κοινό (για όλους τους επενδυτές) εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Το γεγονός ότι το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι κοινό για όλους τους επενδυτές μας επιτρέπει να το ταυτοποιήσουμε χωρίς καν να λύσουμε το πρόβλημα αριστοποίησης (ref: risk_free_p1). Με άλλα λόγια κάθε επενδυτής είναι σε θέση να γνωρίζει ποιό είναι το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο *m* χωρίς να μπεί στη διαδικασία να λύσει το πρόβλημα του Markowitz νοουμένου ότι α) γνωρίζει ότι έχει ομογενείς προσδοκίες με κάθε άλλο επενδυτή β) γνωρίζει ότι όλοι οι επενδυτές συμπεριλαμβανομένου του ίδιου ακολουθούν τη διακδικασία αριστοποίησης του Markowitz, και γ) γνωρίζει ότι η αγορά βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Συνοψίζοντας, αν όλοι οι επενδυτές διακρατούν το ίδιο χαρτοφυλάκιο, *m*, από assets με κίνδυνο και η ζήτηση για αυτά τα assets είναι ίση με την (δεδομένη) προσφορά, τότε αυτό το χαρτοφυλάκιο, *m*, δεν μπορεί να είναι άλλο από το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

Παρατήρηση

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η παρουσία του asset χωρίς κίνδυνο και το γεγονός ότι υποθέσαμε ότι όλοι οι επενδυτές λειτουργούν σύμφωνα με τους κανόνες του

Markowitz συνεπάγονται ότι όλοι οι επενδυτές λύνουν το πρόβλημα (ref: risk_free_p1). Εξαιτίας της υποθεσης των ομογενών προσδοκιών κάθε επενδυτής βρίσκει την ίδια λύση στο πρόβλημα (ref: risk_free_p1). Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όλοι οι επενδυτές ακολουθούν την διαδικασία επιλογής χαρτοφυλακίου σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο κάθε επενδυτής ταυτοποιεί το ίδιο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο, m, από τα n assets με κίνδυνο (αφού όλοι οι επενδυτές έχουν το ίδιο αποτελεσματικό σύνορο) το οποίο όπως είδαμε είναι αυτό πού αποκαλέσαμε χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Στο δέυτερο στάδιο, κάθε επενδυτής αποφασίζει, ανάλογα με τον βαθμό αποστροφής στο κίνδυνο πού επιδεικνύει, τι ποσοστό του κεφαλαίου του θα επενδύσει στο m και τι ποσοστό στο asset χωρίς κίνδυνο.

Ποιό είναι τελικά το χαρτοφυλάκιο της αγοράς m? Ας φανταστούμε προς στιγμή ότι η αγορά των n assets βρίσκεται σε ισορροπία. Ισορροπία σημαίνει ότι η συνολική ζήτηση (η οποία εκφράζεται από το σύνολο των επενδυτών) για το (κάθε) asset i είναι ίση με την συνολική προσφορά για το asset i, η οποία όπως έχουμε υποθέσει είναι εξωγενώς δεδομένη. Η συνολική ζήτηση γιά κάθε asset i υπολογίζεται αν αθροίσουμε (ως προς τον αριθμό των επενδυτών) την ζήτηση για κάθε asset i πού εκφράζει ο κάθε επενδυτής. Αφού ο κάθε επενδυτής διακρατεί το ίδιο χαρτοφυλάκιο m με κάθε άλλο επενδυτή, τότε και το άθροισμα των επενδυτών (η αγορά) θα διακρατεί το χαρτοφυλάκιο m. Επιπλέον αφού όλη η ποσότητα από κάθε asset i διακρατείται, τότε η αγορά διακρατεί τόσο ποσοστό w_i του asset i όσο είναι το ποσοστό της κεφαλαιοποίησης του asset i ως προς τη συνολική κεφαλαιοποίηση όλων των n assets, δηλαδή

$$w_i = \frac{K_i}{TK} \qquad \#$$

όπου K_i είναι η κεφαλαιοποίηση του asset i και TK είναι η συνολική κεφαλαιοποίηση όλων των n assets. Για παράδειγμα, έστω η κεφαλαιοποίηση της εταιρείας i να είναι 10 εκατομμύρια ευρώ, ενώ η συνολική κεφαλαιοποίηση όλων των εταιρειών πού διαπραγματεύονται σε ένα χρηματιστήριο να είναι 50 δισεκατομμύρια. Αυτό σημαίνει ότι η εταιρεία i συμμετέχει στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς, m, με ποσοστό $w_i = 0.0002$. Αυτό το ποσοστό εκφράζει και την ζήτηση ισορροπίας για το asset i. Οποιαδήποτε ζήτηση πάνω από αυτό το ποσοστό θεωρείται υπερβάλλουσα ζήτηση για το asset i ενώ οποιαδήποτε ζήτηση μικρότερη από αυτό το ποσοστό θεωρείται υπερβάλλουσα προσφορά για το asset i. Αυτό σημαίνει ότι είτε λόγω υπερβάλλουσας ζήτησης είτε λόγω υπερβάλλουσας προσφοράς η αγορά για το asset i δεν βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Αντιστρέφοντας τον τελευταίο συλλογισμό, αν υποθέσουμε ότι η αγορά για το asset i βρίσκεται σε ισορροπία, τότε η συνολική ζήτηση για το asset i είναι ίση με 10 εκατομμύρια ευρώ.

Συνοψίζοντας, η υπόθεση των ομογενών προσδοκιών μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όλοι οι επενδυτές έχουν κοινό εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο m. Επιπλέον, κάτω από την υπόθεση ότι η αγορά για κάθε asset i βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το κοινό γιά όλους τους επενδυτές εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο και το χαρτοφυλάκιο της αγοράς όπου κάθε asset i συμμετέχει με ποσοστό (ref: w_mp1), ταυτίζονται.

Ας δούμε το γιατί συμβαίνει αυτό με ένα παράδειγμα. Έστω ότι στην Οικονομία υπάρχουν μόνο τρία assets οι μετοχές Α, Β και Γ. Για την Α υπάρχουν 1000 μετοχές με κάθε μία να έχει τρέχουσα τιμή $P_A = 1$ ευρώ. Για την Β η σταθερή προσφορά είναι 2000 μετοχές με την κάθε μία να έχει τρέχουσα τιμή $P_B = 0.6$ ευρώ. Τέλος γιά την Γ η προσφορά είναι 1500 μετοχές με την κάθε μία να έχει τρέχουσα τιμή

$P_B = 0.4$ ευρώ. Ποιά είναι η συνολική κεφαλαιοποίηση, TK, σε αυτο το Χρηματιστήριο? Είναι προφανές ότι

$$TK = 1000 \times 1 + 2000 \times 0.6 + 1500 \times 0.4 = 2800.$$

Η κεφαλαιοποίηση της κάθε εταιρείας είναι

$$K_A = 1000$$
$$K_B = 1200$$
$$K_\Gamma = 600.$$

Η σχετική κεφαλαιοποίηση της κάθε εταιρείας είναι

$$w_A = \frac{1000}{2800} = 0.358$$
$$w_B = \frac{1200}{2800} = 0.428$$
$$w_\Gamma = \frac{600}{2800} = 0.214.$$

Εμείς τι ισχυριστήκαμε παραπάνω? Ότι αυτές οι σχετικές κεφαλαιοποιήσεις αντιστοιχούν στα σταθμά w_A, w_B και w_Γ του κοινού εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου m για όλους τους επενδυτές (το οποίο αποκαλέσαμε χαρτοφυλάκιο της αγοράς). Γιατί συμβαίνει αυτή η ταύτιση? Ας θεωρήσουμε δύο επενδυτές τον I και τον II. Ας υποθέσουμε ότι όλη η αγορά αποτελείται από αυτούς τους δύο επενδυτές. Σύμφωνα με τις υποθέσεις του CAPM οι επενδυτές I και II έχουν κοινές πεποιθήσεις για το ποιές είναι οι αναμενόμενες αποδόσεις των τριών μετοχών καθώς επίσης και ποιός είναι ο αντίστοιχος πίνακας Σ. Ως εκ τούτου, λύνοντας το πρόβλημα αριστοποίησης κατα Markowitz θα καταλήξουν να έχουν κοινό αποτελεσματικό σύνορο και κοινό εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο (w_A, w_B, w_Γ) αποτελούμενο από τις τρείς μετοχές (assets με κίνδυνο). Αυτό σημαίνει ότι

$$w_{I,A} = w_{II,A} = w_A$$
$$w_{I,B} = w_{II,B} = w_B$$
$$w_{I,\Gamma} = w_{II,\Gamma} = w_\Gamma.$$

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι ο I και II επιθυμούν να επενδύσουν διαφορετικό ποσό χρημάτων στο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο (στο χαρτοφυλάκιο με κίνδυνο). Έστω ότι ο I επενδύει ποσό X_I ευρώ και ο II ποσό X_{II} ευρώ. Αυτό σημαίνει ότι το ποσό (σε ευρώ) πού έχει επενδύσει ο I στις μετοχές Α, Β και Γ είναι $w_A X_I$, $w_B X_I$ και $w_\Gamma X_I$, αντίστοιχα. Τα αντίστοιχα ποσά για τον επενδυτή II είναι $w_A X_{II}$, $w_B X_{II}$ και $w_\Gamma X_{II}$. Κατά συνέπεια, το συνολικό ποσό πού το σύνολο των επενδυτών (εν προκειμένω οι δύο επενδυτές) έχουν επενδύσει στη μετοχή Α είναι $w_A X_I + w_A X_{II}$, στη μετοχή Β είναι $w_B X_I + w_B X_{II}$ και στη μετοχή Γ είναι $w_\Gamma X_I + w_\Gamma X_{II}$. Μέχρι αυτού του σημείου δεν έχουμε προβάλει κανένα επιχείρημα περί της ισορροπίας των αγορών των μετοχών Α, Β και Γ. Τώρα είναι η στιγμή να πούμε (υποθέσουμε) ότι η συνολική ζήτηση $w_A X_I + w_A X_{II}$ για την μετοχή Α είναι ίση με την δεδομένη προσφορά για την μετοχή Α (1000 ευρώ) και το ίδιο για τις μετοχές Β και Γ. Η υπόθεση της ισορροπίας για τις τρείς μετοχές μας επιτρέπει να διατυπώσουμε τις ακόλουθες τρείς ισότητες (συνολική ζήτηση = συνολική προσφορά) μία γιά κάθε μετοχή:

$$
\begin{aligned}
w_A X_I + w_A X_{II} &= 1000 \\
w_B X_I + w_B X_{II} &= 1200 \\
w_\Gamma X_I + w_\Gamma X_{II} &= 600.
\end{aligned}
$$

Βγάζοντας κοινούς παράγοντες,

$$
\begin{aligned}
w_A (X_I + X_{II}) &= 1000 \\
w_B (X_I + X_{II}) &= 1200 \\
w_\Gamma (X_I + X_{II}) &= 600.
\end{aligned}
$$

Επιπλέον αφού δεν υπάρχουν ούτε αδιάθετες μετοχές (υπερβάλουσα προσφορά) ούτε ανικανοποίητη ζήτηση, το άθροισμα των ποσών X_I και X_2 πού οι δύο επενδυτές (εν προκειμένω το σύνολο της αγοράς) έχουν επενδύσει στο χρηματιστήριο θα είναι ίσο με το σύνολο της κεφαλαιοποίησης των τριών εταιρειών, το οποίο εν προκειμένω είναι ίσο με 2800 ευρώ. Άρα έχουμε και μιά επιπλέον ισότητα,

$$
X_I + X_{II} = 2800.
$$

Συνδυάζοντας τις τέσσερις τελευταίες ισότητες, έχουμε

$$
\begin{aligned}
w_A &= \frac{1000}{(X_I + X_{II})} = \frac{1000}{2800} = 0.358 \\
w_B &= \frac{1200}{(X_I + X_{II})} = \frac{1200}{2800} = 0.428 \\
w_A &= \frac{600}{(X_I + X_{II})} = \frac{600}{2800} = 0.214.
\end{aligned}
$$

Άρα δείξαμε ότι όντως κάτω από τις συγκεκριμένες υποθέσεις (ομογενείς προσδοκίες και ισορροπία στις αγορές) τα σταθμά του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου (κοινό και για τους δύο επενδυτές) είναι οι σχετικές κεφαλαιοποιήσεις των αντίστοιχων μετοχών.

Συμπεράσματα του CAPM

Το πρώτο βασικό συμπέρασμα του CAPM αφορά στην τιμολόγηση των **αποτελεσματικών** χαρτοφυλακίων. Ας θυμηθούμε από την ανάλυση του προβλήματος του Markowitz στη περίπτωση της παρουσίας ενός asset χωρίς κίνδυνο ότι το κάθε αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο p με τυπική απόκλιση και αναμενόμενη απόδοση σ_p και $E(R_p)$ αντίστοιχα ικανοποιεί την σχέση (ref: cml2) την οποία επαναδιατυπώνουμε εδώ για λόγους ευκολίας,

$$
E(R_p) = R_f + \frac{[E(R_m) - R_f]}{\sigma_m}\sigma_p. \qquad \#
$$

Σύμφωνα με τς υποθέσεις του CAPM, το χαρτοφυλάκιο m δεν είναι απλώς το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο αλλά το κοινό εφαπτομενο χαρτοφυλάκιο για όλους τους επενδυτές το οποίο είναι το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Η εξίσωση (ref: cml2) μας λέει ότι η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας για το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο p είναι συνάρτηση του συνολικού κινδύνου σ_p του χαρτοφυλακίου p. Από αυτή τη σχέση προκύπτει αμέσως ότι αν το ρίσκο του p ειναι ίσο με το ρίσκο του m, δηλαδή $\sigma_p = \sigma_m$, τότε το ασφάλιστρο κινδύνου $E(R_p) - R_f$ του p είναι ίσο με το ασφάλιστρο κινδύνου $E(R_m) - R_f$ του m.

Ισχύει η σχέση τιμολόγησης (ref: cml2) για την περίπτωση ενός μη-αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου i? Πιό συγκεκριμένα, αν το χαρτοφυλάκιο πού εξετάζουμε δεν είναι αποτελεσματικό (το οποίο σημαίνει ότι δεν είναι άριστα διαφοροποιημένο) τότε ποιά συνιστώσα ρίσκου πρέπει να τιμολογηθεί? Ο ολικός κίνδυνος, όπως είδαμε στην περίπτωση της τιμολόγησης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου, ή κάποιος άλλος τύπος κινδύνου? Μήπως κάποια συνιστώσα κινδύνου πού φέρει το μη-αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο μπορεί να εξαλειφθεί μέσω καλύτερης διαφοροποίησης και άρα αφού αυτή η συνιστώσα είναι εξαλείψιμη να μην πρέπει να τιμολογηθεί? Στη συνέχεια θα επικεντρώσουμε την συζήτηση μας στην περίπτωση της τιμολόγησης ενός μομονωμένου asset i το οποίο φυσικά μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μη-άριστα διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο (ένα χαρτοφυλάκιο για το οποίο $n = 1$).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο p το οποίο αποτελείται από ένα ποσοστό επένδυσης w_i στο asset i και το υπόλοιπο $(1 - w_i)$ αποτελεί επένδυση στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς m. Αυτό το χαρτοφυλάκιο εκφράζει υπερβάλλουσα ζήτηση για το asset i αφού το χαρτοφυλάκιο m εμπεριέχει την ζήτηση για το asset i πού αντιστοιχεί στην κατάσταση ισορροπίας για το i. Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου p είναι

$$E(R_p) = w_i E(R_i) + (1 - w_i)E(R_m).$$

Αντίστοιχα, η διακύμανση της απόδοσης του p είναι

$$\begin{aligned} Var(R_p) &= Var[w_i R_i + (1 - w_i)R_m] = \\ &= w_i^2 Var(R_i) + (1 - w_i)^2 Var(R_m) + 2w_i(1 - w_i)Cov(R_i, R_m) = \\ &= w_i^2\sigma_i^2 + (1 - w_i)^2\sigma_m^2 + 2w_i(1 - w_i)\sigma_{im}. \end{aligned}$$

Η τυπική απόκλιση σ_p του χαρτοφυλακιου είναι

$$\sigma_p = [w_i^2\sigma_i^2 + (1 - w_i)^2\sigma_m^2 + 2w_i(1 - w_i)\sigma_{im}]^{\frac{1}{2}}.$$

Στη συνέχεια, ας εξετάσουμε το πώς μεταβάλλονται η αναμενόμενη απόδοση $E(R_p)$ και το ρίσκο σ_p του χαρτοφυλακίου p όταν μεταβάλλεται το ποσοστό w_i της απευθείας επένδυσης στο asset i. Αυτές οι μεταβολές δίνονται από τις παραγώγους $\frac{dE(R_p)}{dw_i}$ και $\frac{d\sigma_p}{dw_i}$ αντίστοιχα (θεωρώντας τις $E(R_p)$ και σ_p ως συναρτήσεις της μεταβλητής w_i) :

$$\frac{dE(R_p)}{dw_i} = E(R_i) - E(R_m)$$

και

$$\frac{d\sigma_p}{dw_i} = \frac{w_i\sigma_i^2 - (1 - w_i)\sigma_m^2 + (1 - 2w_i)\sigma_{im}}{[w_i^2\sigma_i^2 + (1 - w_i)^2\sigma_m^2 + 2w_i(1 - w_i)\sigma_{im}]^{\frac{1}{2}}} = \frac{w_i\sigma_i^2 - (1 - w_i)\sigma_m^2 + (1 - 2w_i)\sigma_{im}}{\sigma_p}.$$

Διαιρώντας κατά μέλη της δύο τελευταίες σχέσεις, μπορούμε να πάρουμε την μεταβολή $\frac{dE(R_p)}{d\sigma_p}$:

$$\frac{dE(R_p)}{d\sigma_p} = \frac{E(R_i) - E(R_m)}{\frac{w_i\sigma_i^2 - (1-w_i)\sigma_m^2 + (1-2w_i)\sigma_{im}}{\sigma_p}} = \frac{[E(R_i) - E(R_m)]\sigma_p}{w_i\sigma_i^2 - (1-w_i)\sigma_m^2 + (1-2w_i)\sigma_{im}}.$$

Η παράγωγος $\frac{dE(R_p)}{d\sigma_p}$ μας δίνει το ρυθμό μεταβολής της αναμενόμενης απόδοσης του χαρτοφυλακίου p όταν μεταβάλεται το ρίσκο του p. Ποιός είναι ο ρυθμός αυτής της μεταβολής όταν το asset i βρίσκεται σε ισορροπία? Σε ισορροπία η υπεβάλλουσα ζήτηση για το asset i είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι στην ισορροπία, το w_i είναι ίσο με μηδέν. Κατά συνέπεια, αυτό πού θέλουμε να υπολογίσουμε έιναι η παράγωγος $\frac{dE(R_p)}{d\sigma_p}$ με δεδομένη την υπόθεση $w_i = 0$. Ευκολα δείχνεται ότι

$$\frac{dE(R_p)}{d\sigma_p} \mid_{w_i=0} = \frac{[E(R_i) - E(R_m)]\sigma_p}{\sigma_{im} - \sigma_m^2}.$$

Αν όμως $w_i = 0$ τότε το χαρτοφυλάκιο p ταυτίζεται με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς m. Γνωρίζουμε από την (ref: cml2) ότι η κλίση της CML είναι ίση με $\frac{[E(R_m)-R_f]}{\sigma_m}$. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο κλίσεις θα ταυτίζονται όταν $w_i = 0$ (δηλαδή στο σημείο m) και άρα

$$\frac{[E(R_i) - E(R_m)]\sigma_p}{\sigma_{im} - \sigma_m^2} \overset{p=m}{=} \frac{[E(R_m) - R_f]}{\sigma_m}. \qquad \#$$

Με στοιχειώδεις πράξεις (και θέτοντας $\sigma_p = \sigma_m$ αφού $p = m$) έχουμε

$$\begin{aligned}
[E(R_i) - E(R_m)]\sigma_m^2 &= [E(R_m) - R_f](\sigma_{im} - \sigma_m^2) \Rightarrow \\
E(R_i)\sigma_m^2 - E(R_m)\sigma_m^2 &= \sigma_{im}[E(R_m) - R_f] - \sigma_m^2 E(R_m) + \sigma_m^2 R_f \Rightarrow \\
E(R_i)\sigma_m^2 &= E(R_m)\sigma_m^2 - \sigma_m^2 E(R_m) + \sigma_{im}[E(R_m) - R_f] + \sigma_m^2 R_f \Rightarrow \\
E(R_i)\sigma_m^2 &= \sigma_m^2 R_f + \sigma_{im}[E(R_m) - R_f]
\end{aligned}$$

απ'οπου καταλήγουμε στην βασική σχέση του CAPM,

$$E(R_i) = R_f + \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}[E(R_m) - R_f] \qquad \#$$

ή ισοδύναμα

$$E(R_i) = R_f + b_i[E(R_m) - R_f] \qquad \#$$

με

$$b_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}. \qquad \#$$

Η σχέση (ref: capm1b) η οποία αποτελεί το βασικό συμπέρασμα του CAPM μας λέει το εξής: Το ασφάλιστρο κινδύνου,

$$\rho_\iota = E(R_i) - R_f,$$

πού απαιτούν οι επενδυτές για την διακράτηση του asset i (ή του μη-αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου i) όταν η αγορά του asset i είναι σε κατάσταση ισορροπίας (η συνολική ζήτηση είναι ίση με τη συνολική προσφορά) είναι γραμμική συνάρτηση του συστηματικού κινδύνου b_i του asset i. Ο συντελεστής κλίσης σε αυτή τη γραμμική σχέση είναι το ασφάλιστρο κινδύνου

$E(R_m) - R_f$ της αγοράς. Από αυτό το συμπέρασμα καταλαβαίνουμε ότι στη διαμόρφωση του ασφάλιστρου ισορροπίας για το μεμονωμένο asset i, αυτό πού παίζει ρόλο δεν είναι ο ολικός κίνδυνος του asset i (όπως μετριέται από την διακύμανση των αποδόσεων του asset i) αλλά μόνο ο συστηματικός κίνδυνος του asset i. Επιπλέον, ο συστηματικός κίνδυνος συνέεται γραμμικά με την αναμενόμενη απόδοση πού απαιτούν οι επενδυτές για την διακράτηση του asset i. Όσο μεγαλύτερος είναι ο συστηματικός κίνδυνος του i τόσο μεγαλύτερη είναι η απαιτούμενη απόδοση του asset i από τους επενδυτές, δηλαδή τόσο μεγαλύτερο το ασφάλιστρο κινδύνου του i.

Παρατήρηση

Αυτό το συμπέρασμα είναι αντίθετο από αυτό στο οποίο καταλήξαμε για την περίπτωση ενός αποτελσματικού χαρτοφυλακίου στο οποίο η σχέση τιμολόγησης δεν είναι η (ref: capm1b) αλλά η (ref: cml2).

Αυτό το συμπέρασμα έχει έντονη διαισθητική απήχηση. Πράγματι αφού ο μη-συστηματικός κίνδυνος του asset i μπορεί να εξαλειφθεί μέσω αποτελεσματικής διαφοροποίησης (να θυμίσουμε ότι όλοι οι επενδυτές διατηρούν άριστα διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια τύπου Markowitz), οι επενδυτές δεν δικαιούνται να ζητήσουν μια επιπρόσθετη ανταμοιβή (σε όρους αναμενόμενης απόδοσης) για αυτή τη συνιστώσα του ρίσκου. Αντίθετα, ο συστηματικός κίνδυνος δεν μπορεί να εξαλειφθεί μέσω διαφοροποίησης και ως εκ τούτου πρέπει να αντισταθμιστεί απο κάποιο ασφάλιστρο κινδύνου. Όσο μεγαλύτερος είναι ο συτηματικός κίνδυνος (δηλαδή το b_i) του asset i τόσο μεγαλύτερο θα είναι το ασφάλιστρο κινδύνου ισορροπίας.

Η γραμμική σχέση (ref: capm1b) ονομάζεται "Γραμμή Αξιογράφου" (Security Market Line) SML. Η γραφική απεικόνιση της SML στο χώρο (b_i, μ_i) παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 1.

Διάγραμμα 1
Η Γραμμή Αξιογράφου SML

Παρατήρηση

Η γραμμή SML πού αντιστοιχεί στην εξίσωση (ref: capm1b) δεν πρέπει να συγχέεται με τη γραμμή CML πού είδαμε σε προηγούμενη ενότητα και η οποία αντιστοιχεί στη σχέση (ref: eff_front_rf2). Αρκεί να θυμόμαστε ότι στη γραφική απεικόνιση της SML στον οριζόντιο άξονα είναι το μέτρο του συστηματικού κινδύνου b_i τού asset i, ενώ στην αντίστοιχη απεικόνιση της CML στον οριζόντιο άξονα είναι το μέτρο του ολικού κινδύνου σ_{R_p} ενός αποτελεσματικου χαρτοφυλακίου p.

Στο παραπάνω διάγραμμα εμφανίζεται το σημείο $b_i = 1$. Όταν $b_i = 1$, τότε το ασφάλιστρο κινδύνου πού απαιτούν οι επενδυτές για τη διακράτηση του asset i είναι ίσο με το ασφάλιστρο κινδύνου της αγοράς,

$$E(R_i) - R_f = E(R_m) - R_f.$$

Αντίθετα, τα assets για τα οποία $b_i > 1$ ισχύει ότι

$$E(R_i) - R_f > E(R_m) - R_f$$

και για εκείνα τα assets για τα οποία $b_i < 1$ έχουμε ότι

$$E(R_i) - R_f < E(R_m) - R_f.$$

Έχει καθιερωθεί να αποκαλούμε τα assets (π.χ. μετοχές) με $b_i > 1$ "επιθετικά" ενώ εκείνα με $b_i < 1$ "αμυντικά".

Παρατηρήσεις

(i) Από τον ορισμό του b_i στην (ref: capm1c) παρατηρούμε ότι ο συστηματικός κίνδυνος ουσιαστικά προσδιορίζεται από την συνδιακύμανση σ_{im} μεταξύ των αποδόσεων του asset i και των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου της αγοράς και την διακύμανση των αποδόσεων της αγοράς. Αυτό είναι λογικό να συμβαίνει αφού ο συστηματικός κίνδυνος για το asset i δεν είναι άλλος από τον κίνδυνο πού φέρει το asset i εξαιτίας του ότι συμμετέχει στην αγορά m.

(ii) Είναι προφανές ότι στη περίπτωση $b_i = 1$, η συνδιακύμανση σ_{im} είναι ίση με την διακύμανση σ_m^2 των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου της αγοράς.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο της αγοράς, m, στο πλαίσο του CAPM συντίθεται από όλα τα assets με κίνδυνο πού υπάρχουν στην Οικονομία και όχι μόνο από μετοχές. Για παράδειγμα, στο χαρτοφυλάκιο m πρέπει να συμμετέχουν assets όπως ομόλογα, εμπορεύματα, ακίνητα, ακόμα και έργα τέχνης ή και ανθρώπινο κεφάλαιο. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι το m είναι πολύ δύσκολο να ταυτοποιηθεί στην πράξη. Ως εκ τούτου στούς εμπειρικούς ελέγχους του CAPM χρησιμοποιούνται διάφορες "προσεγγίσεις" του m οι οποίες τις περισσότερες φορές είναι κάποιος μετοχικός δείκτης όπως για παράδειγμα ο SP500.

Ας συνοψίσουμε το τι μας λέει το CAPM και τις συνέπειες πού έχει για την διαμόρφωση της τρέχουσας τιμής P_0 τού asset i: Το βασικό συμπέρασμα του CAPM είναι ότι η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας για το asset i είναι συνάρτηση του b_i. Έστω λοιπόν ότι το R_f είναι 2%, η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς είναι $E(R_m) = 5\%$ και το βήτα της μετοχής i είναι $b_i = 1.2$. Το CAPM μας λέει ότι η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας για τη μετοχή i είναι

$$\begin{aligned} E(R_i) &= R_f + b_i[E(R_m) - R_f] = \\ &= 2 + 1.2 \times [5 - 2] = 5.6\%. \end{aligned}$$

Όταν η τρέχουσα τιμή διαμορφωθεί σε εκείνο το επίπεδο P_0, για το οποίο η αναμενόμενη απόδοση είναι ίση με 5.6% τότε η αγορά για τη μετοχή i θα ισορροπήσει. Αυτό προυποθέτει ότι οι επενδυτές έχουνε διαμορφώσει μία προσδοκία (κοινή για όλους) σχετικά με την τιμή P_1 της μετοχής i στο τέλος της (μοναδικής) περιόδου καθώς και για το μέρισμα d_1, δηλαδή όλοι οι επενδυτές έχουν κοινές προσδοκίες $E(P_1)$ και $E(d_1)$. Έστω ότι $E(P_1) = 120$ ευρώ και $E(d_1) = 6$ ευρώ. Από την σχέση πού περιγράφει την απόδοση R_1,

$$R_1 = \frac{d_1 + (P_1 - P_0)}{P_0} = \frac{d_1}{P_0} + \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$E(R_1) = \frac{1}{P_0}E(d_1) + \frac{1}{P_0}E(P_1) - 1. \qquad \#$$

Αφού σύμφωνα με το CAPM, η $E(R_1) = 5.6\%$ και επιπλέον σύμφωνα με τις υποθέσεις πού κάναμε ότι $E(P_1) = 120$ και $E(d_1) = 6$ συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} E(R_1) &= \frac{1}{P_0}E(d_1) + \frac{1}{P_0}E(P_1) - 1 \Rightarrow \\ 0.056 &= \frac{1}{P_0} \times 6 + \frac{1}{P_0} \times 120 - 1, \end{aligned}$$

απ' όπου λύνοντας ως προς P_0 προκύπτει, ότι $P_0 = 119.32$. Άρα τελικά η τρέχουσα τιμή καθορίζεται από α) την αναμενόμενη απόδοση πού απαιτούν οι επενδυτές με βάση το συστηματικό κίνδυνο πού χαρακτηρίζει την μετοχή και β) τις προσδοκίες πού έχουν διαμορφώσει σχετικά με την τιμή της μετοχής στο τέλος της επενδυτικής περιόδου καθώς επίσης και σχετικά με το μέρισμα πού θα λάβουν στο τέλος της περιόδου.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η τρέχουσα τιμή ισορροπίας $P_0 = 119.32$ είναι ίση με την παρούσα αξία του αθροίσματος της αναμενόμενης τιμής $E(P_1)$ και του αναμενόμενου μερίσματος $E(d_1)$ με συντελεστή προεξόφλησης το $(1 + E(R_1))$ όπου $E(R_1)$ είναι η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας. Να θυμίσουμε ότι η $E(R_1)$ είναι ίση με την απόδοση R_f του asset χωρίς κίνδυνο συν το ασφάλιστρο κινδύνου ρ. Πράγματι,

$$\frac{E(P_1)}{(1 + E(R_1))} + \frac{E(d_1)}{(1 + E(R_1))} = \frac{120}{(1 + 0.056)} + \frac{6}{(1 + 0.056)} = 119.32 = P_0.$$

Βλέπουμε λοιπόν το πώς το CAPM συνδυάζεται με το υπόδειγμα της παρούσας αξίας πού αναλύσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο προκειμένου να καθοριστεί η τρέχουσα τιμή ισορροπίας P_0 της μετοχής i. Συνοπτικά, η διαδικασία έχει ως εξής: Πρώτον, υποθέτουμε ότι οι επενδυτές έχουν διαμορφώσει προσδοκίες για την μελλοντική τιμή $E(P_1)$ και το μελλοντικό μέρισμα $E(d_1)$ της μετοχής. Να σημειωθεί ότι αφού το CAPM είναι υπόδειγμα μιάς περιόδου, οι προσδοκίες των επενδυτών δεν επεκτείνονται πέραν της μιάς περιόδου. Δεύτερον, οι επενδυτές αποφασίζουν για το ποιά είναι η απόδοση ισορροπίας, $E(R_1)$, πού απαιτούν για να διακρατήσουν την μετοχή. Σύμφωνα με το CAPM η απόδοση ισορροπίας είναι συνάρτηση του βήτα, b_i, της μετοχής. Τρίτον, γνωρίζοντας αφενός μεν τα $E(P_1)$

και $E(d_1)$ πού οι ίδιοι διαμόρφωσαν, αφετέρου δε την απόδοση $E(R_1)$ πού θεωρούν ικανοποιητική για την διακράτηση της μετοχής i, διαμορφώνουν την τρέχουσα τιμή σε εκείνο το επίπεδο P_0 το οποίο αντιστοιχεί σε αναμενόμενη απόδοση $E(R_1)$. Με άλλα λόγια, λύνουν την εξίσωση (ref: capm_eq3) ως προς P_0.

Μένοντας στα πλαίσια του παραπάνω παραδείγματος, ας δούμε τον μηχανισμό προσαρμογής της τρέχουσας τιμής αν υποθέσουμε προς στιγμή ότι η τρέχουσα τιμή είναι $P_0 = 115$. Στην τρέχουσα αυτή τιμή, οι επενδυτές αντιλαμβάνονται ότι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής (με σταθερές τις προσδοκίες τους για τα $E(P_1)$ και $E(d_1)$) είναι

$$\begin{aligned} E(R_1) &= \frac{1}{P_0}E(d_1) + \frac{1}{P_0}E(P_1) - 1 = \\ &= \frac{1}{115}6 + \frac{1}{115}120 - 1 = 0.0956 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, 9.56%. Πλην όμως με βάση το συστηματικό ρίσκο της μετοχής, οι επενδυτές είναι ικανοποιημένοι με μιά αναμενόμενη απόδοση $E(R_1) = 5.6\%$ προκειμένου να διακρατήσουν τη μετοχή. Άρα με παρούσα τιμή $P_0 = 115$ οι επενδυτές διαπιστώνουν ότι η μετοχή i τους προσφέρει υπερβάλλουσα αναμενόμενη απόδοση ίση με $9.56\% - 5.6\% = 3.96\%$. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι θα αυξήσουν τη ζήτηση τους για την μετοχή i. Η αύξηση της ζήτησης θα προκαλέσει αύξηση της τιμής της μετοχής i. Μέχρι ποιού σημείου θα αυξηθεί η τιμή της μετοχής? Μέχρι το επίπεδο $P_0 = 119.32$ στο οποίο η αναμενόμενη απόδοση έχει πέσει στο επίπεδο του 5.6% πού είναι η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ενώ η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας καθορίζεται αμιγώς απο το CAPM χωρίς καμμιά αναφορά στις μελλοντικές χρηματοροές της εταιρείας i, η τρέχουσα τιμή P_0 διαμορφώνεται με βάση τον συνδυασμό της απαιτούμενης αναμενόμενης απόδοσης από το CAPM και των προσδοκιών $E(P_1)$ και $E(d_1)$ για την τιμή και το μέρισμα, αντίστοιχα στο τέλος της περιόδου.

Τελειώνοντας αυτή την ενότητα, θα πρέπει να σχολιάσουμε το γεγονός ότι έχουμε αποκαλέσει το βήτα, b_i, τού asset i "συστηματικό κίνδυνο". Γιατί του δώσαμε αυτή την ονομασία? Υπό ποιά έννοια το b_i μετρά ή αποτυπώνει το συστηματικό κίνδυνο του asset i και ποιός είναι ο μη-συστηματικός και ο συνολικός κίνδυνος του asset i? Αυτές οι ερωτήσεις αναλύονται στην επόμενη ενότητα στα πλαίσια ενός στατιστικού μοντέλου πού ονομάζεται "μοντέλο της αγοράς". Πρίν όμως εξετάσουμε το μοντέλο της αγοράς ας συνοψίσουμε επιγραμματικά τα δύο βασικά συμπεράσματα τιμολόγησης του CAPM:

(i) **Τιμολόγηση Αποτελεσματικών Χαρτοφυλακίων**: Τα άριστα χαρτοφυλάκια είναι επαρκώς διαφοροποιημένα. Ως εκ τούτου το συνολικό ρίσκο τους δεν μπορεί να μειωθεί μέσω περαιτέρω διαφοροποίησης. Κατά συνέπεια η τιμολόγηση τους θα πρέπει να γίνει με βάση το συνολικό τους ρίσκο σ_p. Η σχέση πού περιγράφει την τιμολόγηση ενός αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου, p, σε ισορροπία είναι η

$$E(R_p) = R_f + \frac{\sigma_p}{\sigma_m}[E(R_m) - R_f]. \qquad \#$$

(ii) **Τιμολόγηση Μη-Αποτελεσματικών Χαρτοφυλακίων** (**και μεμονωμένων assets**): Τα μη-αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια δεν είναι επαρκώς διαφοροποιημένα. Αυτό σημαίνει ότι ένα κομμάτι του συνολικού τους ρίσκου μπορεί να εξαλειφθεί μέσω περαιτέρω διαφοροποίησης. Ως εκ τούτου η τιμολόγησης τους δεν πρέπει να γίνει με βάση το συνολικό τους ρίσκο σ_i αλλά με βάση τη μη-εξαλείψιμη συνιστώσα του ρίσκου πού δεν είναι άλλη από το συστηματικό ρίσκο. Η σχέση πού περιγράφει την τιμολόγηση ενός μη-αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου i (ή ενός μεμονωμένου asset) σε ισορροπία είναι η

$$E(R_i) = R_f + \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}[E(R_m) - R_f] \qquad \#$$

ή εναλλακτικά

$$E(R_i) = R_f + b_i[E(R_m) - R_f]. \qquad \#$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω σχέσεις, παρατηρούμε ότι το ασφάλιστρο κινδύνου $E(R_p) - R_f$ για την περίπτωση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου είναι ίσο με το γινόμενο του ασφάλιστρου κινδύνου $E(R_m) - R_f$ του χαρτοφυλακίου της αγοράς, επί τον συντελεστή $\frac{\sigma_p}{\sigma_m}$. Αντίθετα, το ασφάλιστρο κινδύνου $E(R_i) - R_f$ για την περίπτωση του μη-αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου (ή του μεμονωμένου asset i) είναι ίσο με το γινόμενο του ασφάλιστρου κινδύνου $E(R_m) - R_f$ του χαρτοφυλακίου της αγοράς, επί τον συντελεστή b_i, όπου $b_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$. Παρατηρούμε ότι η βασική διαφορά στους παραπάνω δύο τύπους τιμολόγησης έγκειται στον συντελεστή πού πολλαπλασιάζει το ασφάλιστρο κινδύνου της αγοράς. Στην περίπτωση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου p, ο συντελεστής πού πολλαπλασιάζει το $[E(R_m) - R_f]$ είναι ο λόγος των τυπικών αποκλίσεων $\frac{\sigma_p}{\sigma_m}$, ενώ στην περίπτωση του μη-αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου i ο συντελεστής πού πολλαπλασιάζει το ασφάλιστρο κινδύνου της αγοράς είναι το b_i δηλαδή ο λόγος της συνδιακύμανσης, σ_{im}, των αποδόσεων του i με τις αποδόσεις της αγοράς προς την διακύμανση σ_m^2 του χαρτοφυλακίου της αγοράς.

Οι δύο παραπάνω σχέσεις (η μία για την τιμολόγηση των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων και η άλλη για την τιμολόγηση των μη-αποτελσματικών) μπορούν να συνδυαστούν σε μία ενιαία σχέση. Ως γνωστόν, ο συντελεστής συσχέτισης ρ_{im} μεταξύ των αποδόσεων του asset i και των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου της αγοράς είναι,

$$\rho_{im} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_i \sigma_m}.$$

Επαναδιατυπώνοντας την σχέση (ref: ineff_pric1) κάνοντας χρήση του ρ_{im} αντί της σ_{im} έχουμε,

$$E(R_i) = R_f + \frac{\rho_{im}\sigma_i\sigma_m}{\sigma_m^2}[E(R_m) - R_f] \Rightarrow \qquad \#$$

$$E(R_i) = R_f + \frac{\rho_{im}\sigma_i}{\sigma_m}[E(R_m) - R_f]. \qquad \#$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει τόσο για αποτελεσματικά όσο και για μη-αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια i. Αν το i είναι αποτελεσματικό, τότε θα βρίσκεται πάνω στο αποτελεσματικό σύνορο το οποίο σημαίνει ότι το ποσοστό των assets με κίνδυνο πού περιέχει θα αποτελείται εξ'ολοκλήρου από το χαρτοφυλάκιο της αγοράς m. Ως εκ τούτου, ο συντλεστής συσχέτισης κάθε αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου με το m είναι ίσος με την μονάδα. Σε αυτή τη περίπτωση, η σχέση (ref: gen_pric1) γίνεται,

$$E(R_i) = R_f + \frac{\sigma_i}{\sigma_m}[E(R_m) - R_f]$$

η οποία δεν είναι άλλη από την (ref: eff_pric1) με $i = p$.

Το Μοντέλο της Αγοράς

Αυτό πού πρέπει να ξεκαθαρίσουμε εξ’αρχής (και το οποίο δεν είναι πάντα σαφές στη βιβλιογραφία) είναι ότι το μοντέλο της αγοράς είναι ένα στατιστικό μοντέλο. Αντίθετα το CAPM είναι ένα θεωρητικό (οικονομικό) μοντέλο το οποίο περιγράφει την συμπεριφορά των επενδυτών η οποία καθορίζει τις τιμές των assets. Τα δύο μοντέλα συνδέονται μέσω της ταυτοποίησης των περιορισμών στις παραμέτρους του μοντέλου της αγοράς (του στατιστικού μοντέλου) πού επιβάλλει το CAPM (το θεωρητικό μοντέλο). Η σύγχυση πού προκαλείται σχετικά με την ερμηνεία και την σύνδεση των δύο μοντέλων οφείλεται μεταξύ άλλων και στην κοινή σημειογραφία πού τα δύο μοντέλα υιοθετούν.

Ο καλύτερος τρόπος να οδηγηθούμε στο μοντέλο της αγοράς (και ταυτόχρονα να αντιληφθούμε πλήρως τη στατιστική του φύση) είναι να υποθέσουμε ότι η από-κοινού κατανομή των αποδόσεων των n assets με κίνδυνο είναι η Κανονική, με διάνυσμα μέσων, $\boldsymbol{\mu}$, και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων, Σ,

$$\mathbf{R} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma). \qquad \#$$

Παρατηρήσεις

(i) Όπως παρατηρούμε η υπόθεση (ref: multi_nor1) είναι μιά αμιγώς στατιστική υπόθεση, η οποία εμπλέκει τυχαίες μεταβλητές και την από-κοινού κατανομή τους. Πουθενά ως τώρα δεν έχουμε κάνει κάποια θεωρητική υπόθεση σχετικά με την συμπεριφορά των επενδυτών η οποία παρήγαγε αυτές τις αποδόσεις.

(ii) Στο σημείο αυτό αξίζει να θυμηθούμε ότι την υπόθεση της από κοινού Κανονικότητας των n assets με κίνδυνο την έχουμε ήδη επικαλεστεί ως αιτιολογία της υπόθεσης ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του (κάθε) επενδυτή είναι συνάρτηση μόνο του μέσου και της διακύμανσης των αποδόσεων. Εναλλακτικά, είχαμε αιτιολογήσει αυτή την ιδιότητα επικαλούμενοι την τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας.

Η υπόθεση (ref: multi_nor1) συνεπάγεται τα εξής: (a) Η κατανομή των αποδόσεων R_m του χαρτοφυλακίου της αγοράς m,

$$R_m = w_1R_1 + w_2R_2 + \ldots + w_nR_n$$

είναι κανονική με μέσο $E(R_m)$ και διακύμανση $Var(R_m)$,

$$E(R_m) = \sum_{i=1}^{n} w_i\mu_i = \mathbf{w}^\top\boldsymbol{\mu}$$

$$Var(R_m) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_iw_j\sigma_{ij} = \mathbf{w}^\top\Sigma\mathbf{w}.$$

b) Η από-κοινού (διμεταβλητή) κατανομή των R_i και R_m είναι Κανονική γιά όλα τα $i = 1,2,\ldots,n$. Συγκεκριμένα,

$$\begin{bmatrix} R_i \\ R_m \end{bmatrix} \sim N\left[\begin{bmatrix} E(R_i) \\ E(R_m) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Var(R_i) & Cov(R_i,R_m) \\ Cov(R_i,R_m) & Var(R_m) \end{bmatrix}\right], \; i = 1,2,\ldots,n \qquad \#$$

ή σε πιό οικονομική σημειογραφία,

$$\begin{bmatrix} R_i \\ R_m \end{bmatrix} \sim N\left[\begin{bmatrix} \mu_i \\ \mu_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{im} \\ \sigma_{im} & \sigma_{mm} \end{bmatrix}\right], \ i = 1,2,\ldots,n. \qquad \#$$

Η από-κοινού Κανονικότητα των R_i και R_m συνεπάγεται με τη σειρά της τα εξής: a) Ο δεμευμένος μέσος $E(R_i \mid R_m)$ είναι ίσος με

$$E(R_i \mid R_m) = a_i + b_i R_m \qquad \#$$

όπου

$$a_i = \mu_i - b_i \mu_m \qquad \#$$

και

$$b_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_{mm}}. \qquad \#$$

b) Η δεσμευμένη διακύμανση $Var(R_i \mid R_m)$ είναι ίση με

$$Var(R_i \mid R_m) = \sigma_{0i}^2 \qquad \#$$

όπου

$$\sigma_{0i}^2 = \sigma_{ii} - \frac{\sigma_{im}^2}{\sigma_{mm}}. \qquad \#$$

Στη συνέχεια, με δεδομένα τα (ref: biv_reg1) - (ref: biv_reg3) και (ref: biv_v1) - (ref: biv_v2) η σχέση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών R_i και R_m μπορεί να εκφραστεί μέσω του ακόλουθου "μοντέλου παλινδρόμησης":

$$R_i = E(R_i \mid R_m) + u_i = a_i + b_i R_m + u_i \qquad \#$$

με

$$u_i \sim N(0, \sigma_{0i}^2). \qquad \#$$

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι η μη συστηματική συνιστώσα u_i και η εξαρτημένη μεταβλητή R_m είναι ανεξάρτητες, δηλαδή

$$u_i, R_m \sim I. \qquad \#$$

Το μοντέλο παλινδρόμησης (ref: mm_1) - (ref: mm2) είναι το μοντέλο της αγοράς.

Παρατηρήσεις

(i) Στη βιβλιογραφία είχε αρχικά προκαλέσει σύγχυση η υπόθεση (ref: mm3) σύμφωνα με την οποία η μη-συστηματική συνιστώσα u_i είναι ανεξάρτητη των αποδόσεων R_m. Ο ίδιος ο Eugene Fama στο άρθρο του "Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments" πού δημοσιεύτηκε στο Journal of Finance το 1968 είχε υποπέσει στο λάθος να ισχυριστεί ότι η υπόθεση αυτή δεν είναι δυνατόν να ισχύει αφού το u_i μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του R_i ($u_i = R_i - a_i - b_i R_m$) και το R_i συμμετέχει στο R_m. Πλην όμως η υπόθεση αυτή ισχύει αν η βασική εξίσωση του μοντέλου παλινδρόμησης (ref: mm_1) περιέχει τον πραγματικό δεσμευμένο μέσο $E(R_i \mid R_m)$. Αντίθετα, αν είχαμε υποθέσει ότι

$$R_i = a_i + \delta_i R_m + \varepsilon_i$$

δηλαδή η παράμετρος κλίσης δ_i στο μοντέλο παλινδρόμησης δεν ήταν η παράμετρος b_i πού αντιστοιχεί στον δεσμευμένο μέσο $E(R_i \mid R_m)$, τότε η μη-συστηματική συνιστώσα ε_i θα ήταν συσχετιζόμενη με την εξαρτημένη μεταβλητή R_m. Σε αυτή τη περίπτωση, θα ίσχυε ότι

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_{\varepsilon_i,R_m}}{\sigma_{mm}} R_m + u_i$$

και άρα

$$R_i = a_i + \delta_i R_m + \frac{\sigma_{\varepsilon_i,R_m}}{\sigma_{mm}} + u_i = a_i + \left(\delta_i + \frac{\sigma_{\varepsilon_i,R_m}}{\sigma_{mm}}\right) R_m + u_i = a_i + b_i R_m + u_i.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η όποια αρχική συσχέτιση μεταξύ των ε_i και R_m αποτυπώνεται στο συντελεστή b_i του μοντέλου παλινδρόμησης, νοουμένου ότι ο τελευταίος είναι ο πραγματικός συντελεστής του δεσμευμένου μέσου.

(ii) Το μοντέλο της αγοράς (ref: mm_1) - (ref: mm2) είναι μοντέλο μιάς περιόδου. Στη βιβλιογραφία, το μοντέλο αυτό μετατρέπεται σε μοντέλο πολλών περιόδων απλά θεωρώντας ότι η υπόθεση για την από-κοινού Κανονικότητα των R_i και R_m ισχύει σε κάθε περίοδο, $t \in T$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί υιοθετώντας ως βασική υπόθεση ότι η διανυσματική στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων $\{\mathbf{R}_t, t \in T\}$ είναι ανεξάρτητη και ταυτόνομη, με από-κοινού κατανομή σε κάθε περίοδο να δίνεται από

$$\mathbf{R}_t \sim NIID(\boldsymbol{\mu}, \Sigma). \qquad \#$$

Σε αυτή τη περίπτωση, στο μοντέλο της αγοράς εμφανίζεται και ο χρονικός δείκτης t, οπότε έχουμε

$$R_{it} = E(R_{it} \mid R_{mt}) + u_i = a_i + b_i R_{mt} + u_{it} \qquad \#$$

με

$$u_{it} \sim NIID(0, \sigma_{0i}^2). \qquad \#$$

Το Μοντέλο της Αγοράς και η Σχέση του με το CAPM

Τώρα είμαστε πλέον σε θέση να συζητήσουμε το πώς το στατιστικό μοντέλο (ref: mm_1) - (ref: mm2) πού ονομάσαμε μοντέλο της αγοράς σχετίζεται με το θεωρητικό μοντέλο CAPM. Το ερώτημα είναι το εξής: Αν υποθέσουμε ότι το CAPM ισχύει, τότε αυτή η υπόθεση τι συνέπειες έχει για το στατιστικό μοντέλο της αγοράς? Συγκεκριμένα, η ισχύς του CAPM επιφέρει κάποιους περιορισμούς τις παραμέτρους a_i και b_i του μοντέλου της αγοράς?

Προκειμένου να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, ξεκινάμε από την βασική εξίσωση του μοντέλου της αγοράς (ref: mm_1) και παίρνουμε τον μέσο $E()$ και στα δύο μέλη αυτής της εξίσωσης,

$$E(R_i) = a_i + b_i E(R_m) + E(u_i) = a_i + b_i E(R_m). \qquad \#$$

Η βασική εξίσωση του CAPM δηλώνει τη σχέση

$$E(R_i) = R_f + b_i [E(R_m) - R_f]. \qquad \#$$

Το αριστερό μέλος και των δύο τελευταίων εξισώσεων είναι το ίδιο, $E(R_i)$. Άρα εξισώνοντας τα δύο δεξιά μέλη (και άρα επιβάλλοντας τους περιορισμούς του CAPM στο μοντέλο της αγοράς) έχουμε,

$$a_i + b_i E(R_m) = R_f + b_i[E(R_m) - R_f] \Rightarrow$$
$$a_i + b_i E(R_m) = R_f + b_i E(R_m) - b_i R_f \Rightarrow$$
$$a_i = R_f - b_i R_f$$

και τελικά

$$a_i = (1 - b_i)R_f \qquad \#$$

Η εξίσωση (ref: capm_mm_res) εκφράζει τον περιορισμό πού επιθέτει στις παραμέτρους a_i και b_i του μοντέλου της αγοράς το CAPM. Συγκεκριμένα, το CAPM απαιτεί από τις a_i και b_i να είναι τέτοιες ώστε ο λόγος $a_i/(1 - b_i)$ να ισούται με την απόδοση R_f του asset χωρίς κίνδυνο.

Μέχρι τώρα είδαμε το πώς ξεκινώντας από το μοντέλο της αγοράς (το στατιστικό μοντέλο) επιβάλουμε τους περιορισμούς του CAPM καταλήγοντας έτσι στο "περιορισμένο" μοντέλο της αγοράς στο οποίο έχει πειβληθεί ο περιορισμός (ref: capm_mm_res). Μπορούμε εναλλακτικά, να ξεκινήσουμε από το CAPM και να καταλήξουμε στο περιοριστικό μοντέλο της αγοράς χωρίς να συναντήσουμε πουθενά το αρχικό μοντέλο της αγοράς (ref: mm_1) - (ref: mm2). Αρχικά ξεκινάμε από την βασική σχέση του CAPM (ref: capm_mm1) την οποία επαναδιατυπώνουμε ως

$$E(R_i) = (1 - b_i)R_f + b_i E(R_m),$$

Από την Θεωρία Πιθανοτήτων γνωρίζουμε ότι η παραπάνω σχέση μεταξύ των μέσων των τυχαίων μεταβλητών R_i και R_m σημαίνει ότι οι δύο αυτές τυχαίες μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$R_i = (1 - b_i)R_f + b_i R_m + u_i \qquad \#$$

με την τυχαία μεταβλητή u_i να είναι ανεξάρτητη της R_m και ακόμα $E(u_i) = 0$.

Στη συνέχεια, αφού είδαμε τη σύνδεση μεταξύ του στατιστικού μοντέλου της αγοράς και του θεωρητικού CAPM θα εξετάσουμε το γιατί ο συντελεστής b_i στο μοντέλο της αγοράς πού έχει την ίδια ερμηνεία με το συντελεστή b_i στο CAPM θεωρείται μέτρο του συστηματικού κινδύνου του asset i. Λειτουργώντας με τον τελεστή $Var()$ και στα δύο μέλη της εξίσωσης (ref: mm_restr1) του περιορισμένου μοντέλου της αγοράς (πού προήλθε μόνο από τις υποθέσεις του CAPM) έχουμε,

$$Var(R_i) = b_i^2 Var(R_m) + Var(u_i) + 2b_i Cov(R_m, u_i).$$

Όπως είπαμε παραπάνω, τυχαίες μεταβλητές R_m και u_i είναι ανεξάρτητες, το οποίο σημαίνει ότι $Cov(R_m, u_i) = 0$. Κατά συνέπεια,

$$Var(R_i) = b_i^2 Var(R_m) + Var(u_i). \qquad \#$$

Η τελευταία σχέση αναλύει τον συνολικό κίνδυνο του asset i όπως μετριέται από την $Var(R_i)$ σε δύο συνιστώσες, την $b_i^2 Var(R_m)$ και την $Var(u_i)$. Η πρώτη συνιστώσα ονομάζεται "συστηματικός κίνδυνος" (κίνδυνος της αγοράς) και η δεύτερη "μη-συστηματικός ή ιδιοσυγκρατικός κίνδυνος" (κίνδυνος του asset i). Είναι εμφανές ότι ο συστηματικός κίνδυνος για κάθε asset i εξαρτάται από το συντελεστή b_i και γι'αυτό το λόγο θεωρούμε το b_i ως μέτρο του συστηματικού κινδύνου του asset i.

Μιά Αμφιλεγόμενη Υπόθεση του Μοντέλου της Αγοράς

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε μιά επιπλέον υπόθεση η οποία αφορά στο μοντέλο της αγοράς και η οποία είναι αμφιλεγόμενη. Συγκεκριμένα, συχνά υιοθετείται η υπόθεση

$$Cov(u_i, u_j) = 0, \; i \neq j \qquad \#$$

η οποία ουσιαστικά δηλώνει ότι η συσχέτιση μεταξύ όλων των ανα δύο μη-συστηματικών συνιστωσών u_i και u_j των R_i και R_j αντίστοιχα είναι ίση με μηδέν. Είναι δυνατόν να ισχύει αυτή η υπόθεση και ταυτοχρόνως να ισχύουν όλες οι προηγούμενες υποθέσεις πού κάναμε σχετικά με το μοντέλο της αγοράς? Ή μήπως αντίθετα, οι ήδη υφιστάμενες υποθέσεις έρχονται σε αντίθεση με την υπόθεση (ref: mm_new)? Προκειμένου να απαντήσουμε σε αυτή την ερώτηση, ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό των αποδόσεων R_m του χαρτοφυλακίου της αγοράς,

$$R_m = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

και ας αντικαταστήσουμε τις αποδόσεις R_i με τη σχέση (ref: mm_1) του μοντέλου της αγοράς:

$$R_m = \sum_{i=1}^{n} w_i (a_i + b_i R_m + u_i).$$

Αμέσως προκύπτει ότι

$$R_m = \sum_{i=1}^{n} w_i (a_i + b_i R_m + u_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i + \sum_{i=1}^{n} w_i b_i R_m + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i.$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τους συντελεστές a_i και b_i από τις σχέσεις (ref: biv_reg2) και (ref: biv_reg3), αντίστοιχα,

$$R_m = \sum_{i=1}^{n} w_i (\mu_i - b_i \mu_m) + \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\sigma_{im}}{\sigma_{mm}} R_m + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i$$

ή αντικαθιστώντας το b_i με το ίσο του από την (ref: biv_reg3),

$$R_m = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\mu_i - \frac{\sigma_{im}}{\sigma_{mm}} \mu_m \right) + \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\sigma_{im}}{\sigma_{mm}} R_m + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i.$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε,

$$R_m = \mu_m - \frac{\sigma_{mm}}{\sigma_{mm}} \mu_m + \frac{\sigma_{mm}}{\sigma_{mm}} R_m + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i$$

ή

$$R_m = \mu_m - \mu_m + R_m + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i$$

και τέλος,

$$R_m = R_m + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i.$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} w_i u_i = 0. \qquad \#$$

Η τελευταία σχέση υποδηλώνει ότι οι μη-συστηματικές συνιστώσες $u_1, u_2, \ldots, u_n$ συνδέονται με μιά ακριβή μαθηματική σχέση. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπρούν όλες οι συνδιακυμάνσεις $Cov(u_i, u_j)$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,\ldots,n$ να είναι ταυτόχρονα ίσες με το μηδέν. Κατά συνέπεια η υπόθεση (ref: mm_new) έρχεται σε αντίφαση με την σχέση (ref: final1_mm) η οποία με τη σειρά της προέκυψε από τις υποθέσεις του μοντέλου της αγοράς.

Ερωτήσεις Επανάληψης

1) Ποιό είναι το βασικό ερώτημα πού καλείται να απαντήσει το CAPM? Γιατί το CAPM αποκαλείται "μοντέλο τιμολόγησης"?

2) Να παραθέσετε και να σχολιάσετε τις βασικές υποθέσεις του CAPM. Πώς σχολιάζετε το γεγονός ότι οι υποθέσεις του CAPM είναι προφανώς μη-ρεαλιστικές?

3) Να σχολιάσετε την ακόλουθη πρόταση: "Κάτω από τις υποθέσεις του CAPM, όλοι οι επενδυτές αντιμετωπίζουν το ίδιο αποτελεσματικό σύνορο και το ίδιο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο".

4) Να αναλύσετε το λόγο για τον οποίο το κοινό για όλους τους επενδυτές εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο ταυτίζεται με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Κάτω από ποιές ακριβώς υποθέσεις συμβαίνει αυτή η ταύτιση?

5) Ποιά είναι τα βασικά συμπεράσματα του CAPM? Ποιά είναι η σχέση τιμολόγησης ενός αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου και πώς διαφέρει από την αντίστοιχη σχέση τιμολόγησης ενός μη-αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου.

6) Να περιγράψετε το τι θα συμβεί (σύμφωνα με το CAPM) στη τρέχουσα τιμή μιάς μετοχής αν το βήτα της μετοχής αυτής αυξηθεί.