Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

Αποτίμηση Αξιογράφων

Φεβρουάριος 2020

©Δημήτρης Μαλλιαρόπουλος
Καθηγητής
e-mail: dmalliaropulos@bankofgreece.gr

Μερικά από τα ερωτήματα στα οποία η θεωρία αποτίμησης αξιογράφων προσπαθεί να δώσει απαντήσεις:

- Ποιοι παράγοντες καθορίζουν τις τιμές και τις αποδόσεις μετοχών, ομολόγων, εντόκων γραμματίων του δημοσίου και άλλων αξιογράφων;
- Πως αλλάζουν τιμές και αποδόσεις στη διάρκεια του οικονομικού κύκλου;
- Γιατί κάποια αξιόγραφα δίνουν μεγαλύτερες αποδόσεις από άλλα;

- **CAPM, I-CAPM, APT, Παραγοντικά υποδείγματα:**
- διαφορετικές εκδόσεις ενός βασικού υποδείγματος αποτίμησης, του Consumption Capital Asset Pricing Model (CCAPM).

- **CCAPM (Το υπόδειγμα του καταναλωτή):**
- η αξία ενός τίτλου καθορίζεται από την οριακή χρησιμότητα του καταναλωτή από την κατανάλωση των αναμενόμενων πληρωμών του τίτλου.
- Στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης.

Το CCAPM ως βασικό υπόδειγμα αποτίμησης:

Αρκετά από τα γνωστά υποδείγματα αποτίμησης μπορούν να αναχθούν σε ειδικές περιπτώσεις του CCAPM.
Η σημασία αυτής της πρότασης είναι πολλαπλή.

1. Τα διάφορα υποδείγματα αποτίμησης δένουν μεταξύ τους πάνω σε μια συμπαγή θεωρητική βάση. Ως αποτέλεσμα, η επιλογή των παραγόντων κινδύνου που καθορίζουν τις αποδόσεις δεν είναι αυθαίρετη, αλλά συνδέεται με την οριακή χρησιμότητα, δηλαδή τις προτιμήσεις του καταναλωτή.

2. Όλα τα γνωστά υποδείγματα αποτίμησης έχουν κληρονομήσει το DNA του CCAPM. Κατά συνέπεια, δεν μπορεί κανείς εύκολα να απορρίψει εμπειρικά το CCAPM χωρίς να απορρίψει και τα υποδείγματα που βασίζονται σε αυτό.

Σχηματικά, η θεωρία αποτίμησης βασίζεται σε μια κεντρική αρχή:

<u>Τιμή = προεξοφλημένη αξία μελλοντικών πληρωμών</u>

Όλα τα υπόλοιπα είναι υποθέσεις όσον αφορά τον συντελεστή προεξόφλησης, τον ορίζοντα του επενδυτή και μαθηματικοί μετασχηματισμοί.

Μπορούμε να συνοψίσουμε την θεωρία αποτίμησης σε δύο εξισώσεις:

$$P_t = E_t(M_{t+1}X_{t+1}) \qquad (1)$$
$$M_{t+1} = f(F_{t+1}) \qquad (2)$$

όπου P: τιμή αξιόγραφου, X: πληρωμή του αξιόγραφου, M: στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης και F ένας παράγοντας (ή ένα σετ παραγόντων) κινδύνου.

Κάθε ειδικό υπόδειγμα μπορεί να θεωρηθεί ως μια υπόθεση σχετικά με την συνάρτηση $f(.)$. Παίρνοντας μια γραμμική προσέγγιση της (2), έχουμε:

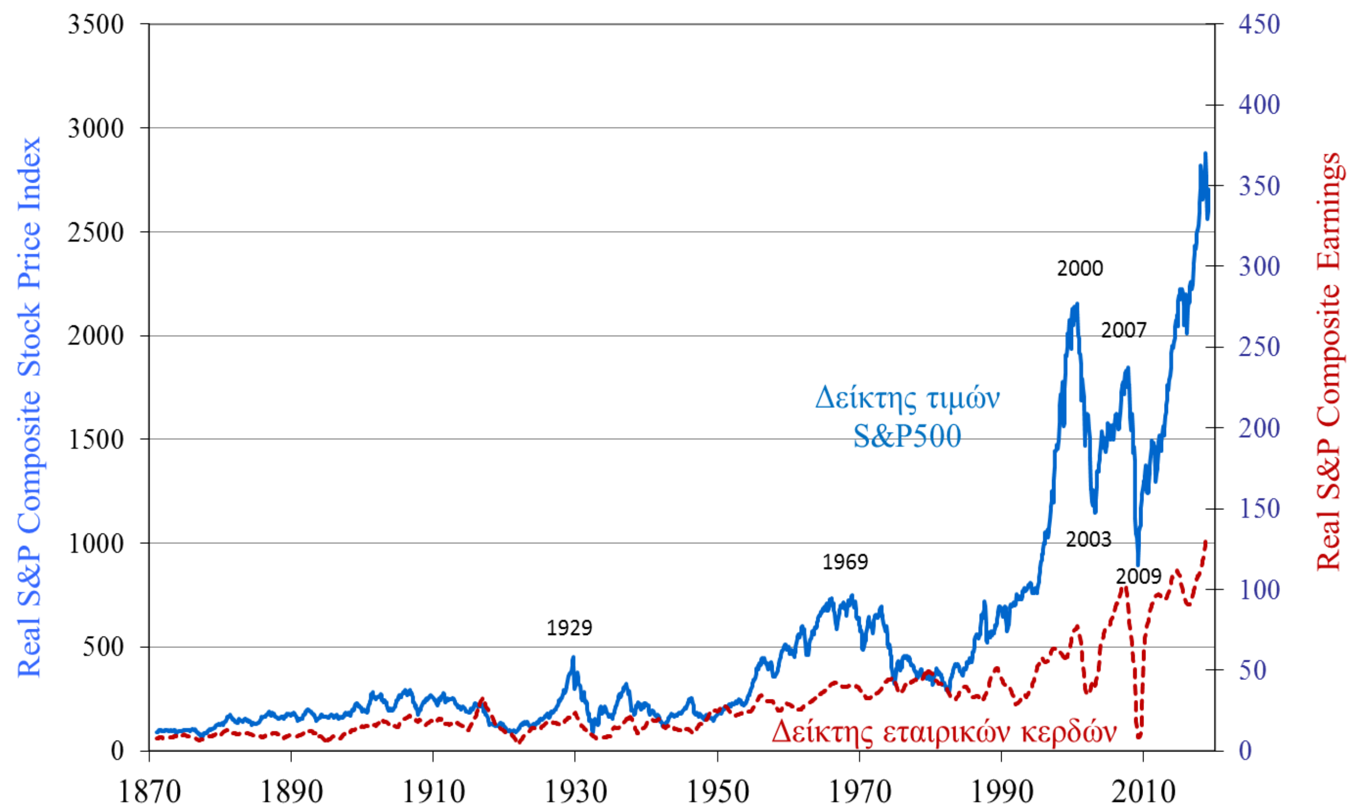
$$M_{t+1} = a + bF_{t+1} \qquad (2')$$

Τα επιμέρους υποδείγματα διαφοροποιούνται ως προς το F. Έτσι για παράδειγμα,

- το CCAPM υποθέτει ότι: F = ρυθμός μεταβολής κατανάλωσης, Δc,
- το CAPM υποθέτει ότι: F = απόδοση χαρτοφυλακίου πλούτου (αγοράς),
- το ICAPM υποθέτει ότι: F = απόδοση χαρτοφυλακίου πλούτου + μεταβλητές κατάστασης.

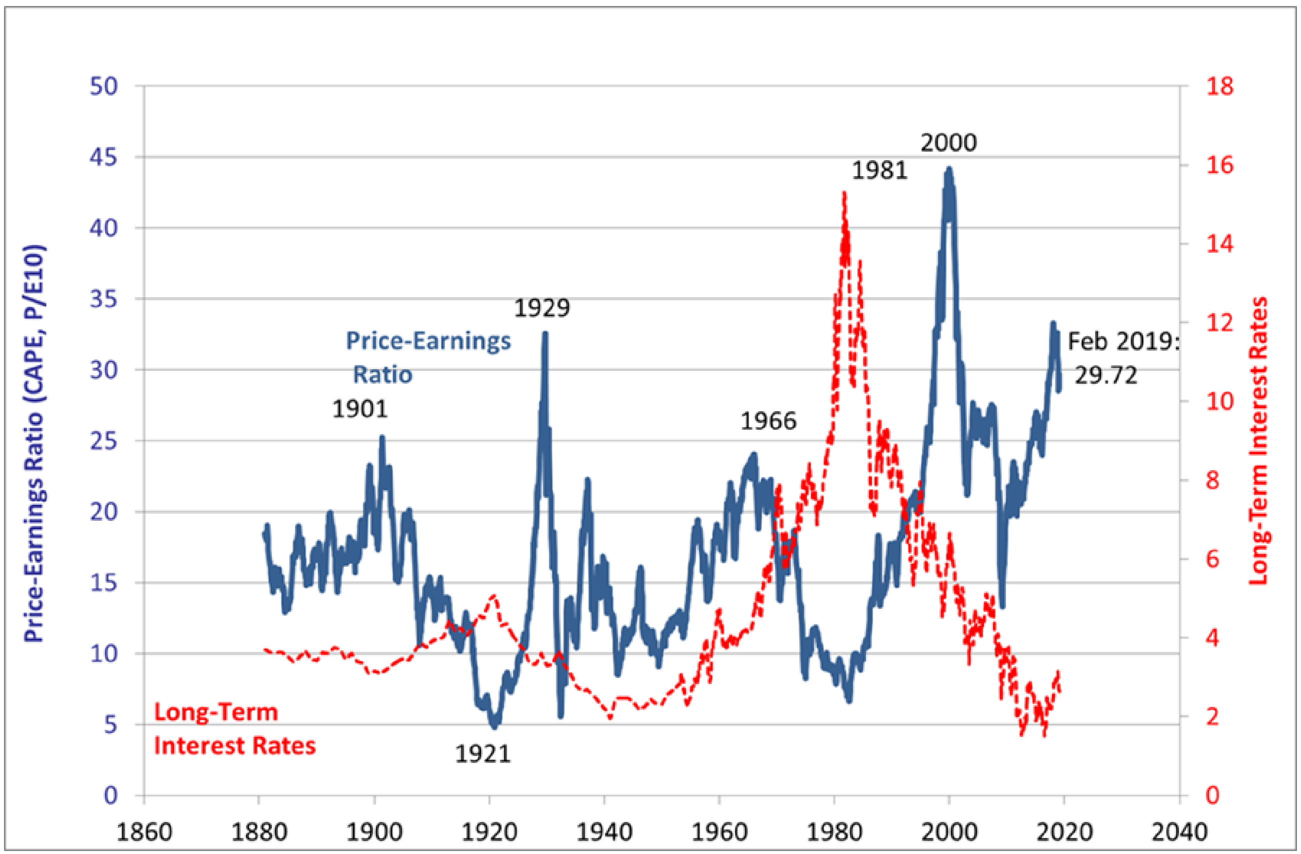
Δείκτης Τιμών του S&P500 και Δείκτης Κερδών των εταιριών που συμμετέχουν στον S&P500

- Ακολουθούν οι τιμές των μετοχών την πορεία των εταιρικών κερδών?
- Τι εξηγεί την εκρηκτική αύξηση των τιμών την περίοδο 1981-1999 σε σχέση με την αύξηση των εταιρικών κερδών? (great moderation? Dot-com mania?)
- Τι εξηγεί την κρίση του 2000-2003? (Φούσκα του NASDAQ). Του 2007-2009? (subprime crisis).
- Τι εξηγεί την εκρηκτική αύξηση των τιμών μετά το 2009? (Ποσοτική χαλάρωση?)

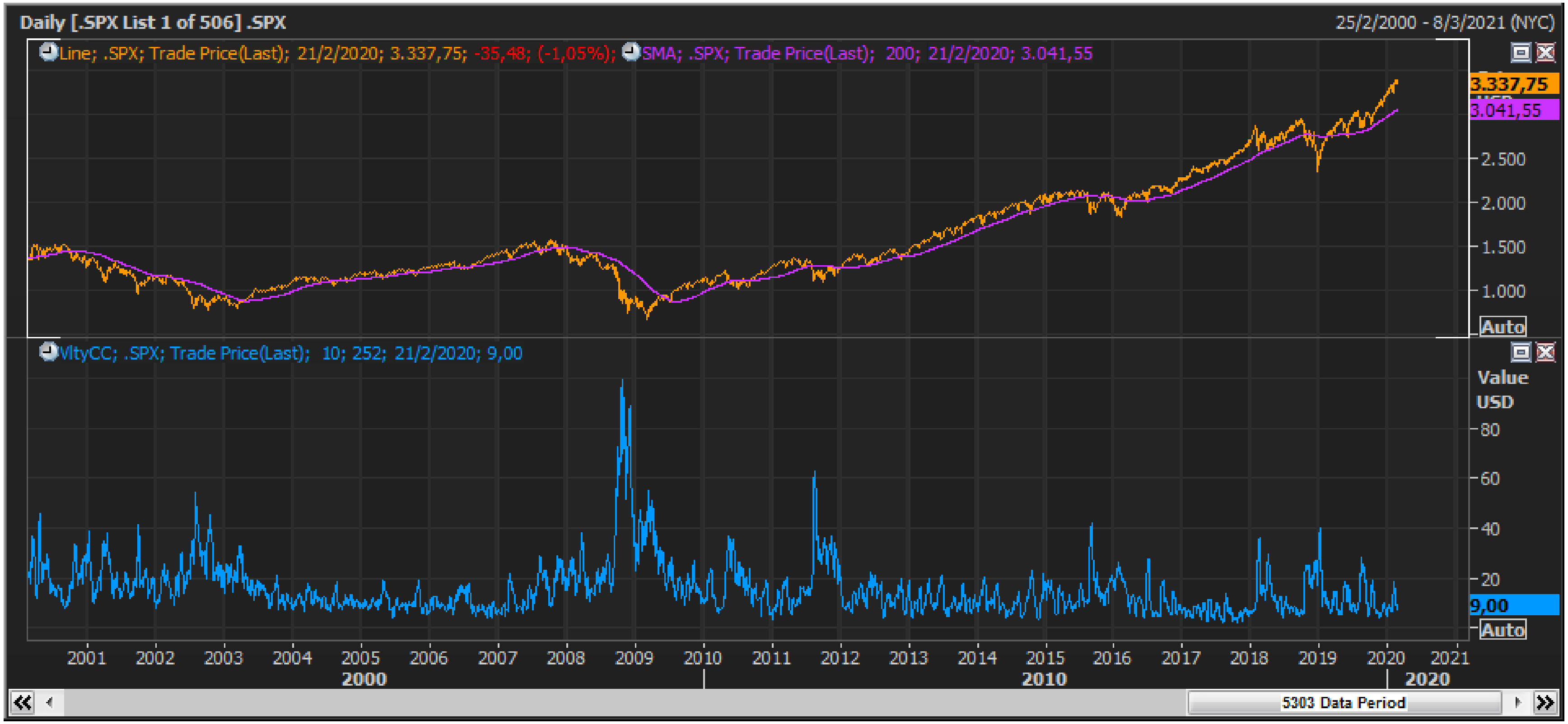


Λόγος Τιμής-προς-Κέρδη (P/E) του S&P500 και μακροχρόνια επιτόκια ομολόγων του Αμερικανικού Δημοσίου

- Τι αντανακλούν οι ισχυρές διακυμάνσεις του P/E στο χρόνο?
- Είναι το P/E ένας δείκτης αποτίμησης (αξίας) των μετοχών?
- Γιατί συνδέεται η μείωση των επιτοκίων μετά το 1981 με μια ισχυρή αύξηση του P/E? Η μείωση των επιτοκίων αυξάνει την αξία των μετοχών? Γιατί?
- Τι σημαίνει για το μέλλον των χρηματιστηρίων ότι το P/E10 αυξήθηκε το 2018-19 σε επίπεδα ανάλογα εκείνων πριν το χρηματιστηριακό κραχ του 1929?



S&P500 και διακύμανση



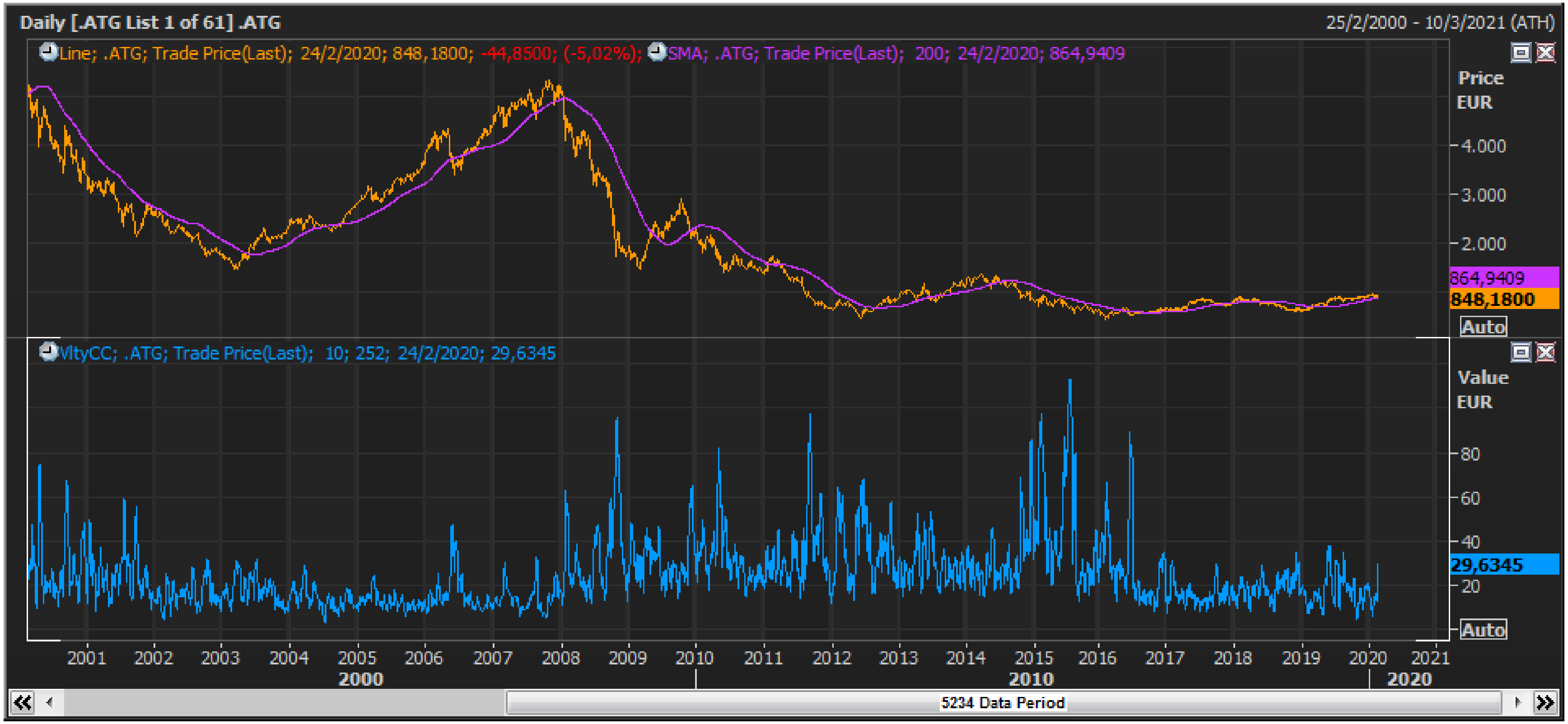
9/3/2009-25/2/2020: Το μακρύτερο ανοδικό ράλι των μετοχών (132 μήνες)

2nd longest US equity bull market of all time

Chart 8: History of US Equity bull markets

History of US Equity bull markets							
Start	**End**	**Start Price**	**End Price**	**Total price return**	**Annualized price return**	**Duration (months)**	**Prior Bear Market**
6/1/1932	3/5/1937	4	19	323%	35%	57	-86%
4/29/1942	5/29/1946	8	19	153%	26%	49	-54%
6/14/1949	8/2/1956	14	50	265%	20%	86	-30%
10/22/1957	12/12/1961	39	73	86%	16%	50	-22%
6/27/1962	2/9/1966	53	94	79%	17%	44	-28%
10/7/1966	11/29/1968	73	108	48%	20%	25	-22%
5/26/1970	1/11/1973	69	120	74%	23%	32	-36%
10/3/1974	11/28/1980	62	141	126%	14%	73	-48%
8/12/1982	8/25/1987	102	337	229%	27%	60	-27%
12/4/1987	7/16/1990	224	369	65%	21%	31	-34%
10/11/1990	3/24/2000	295	1527	417%	19%	113	-20%
10/9/2002	10/9/2007	777	1565	101%	15%	60	-49%
3/9/2009	2/23/2018	677	2873 **#2**	325%	17%	108 **#2**	-57%
Average				**174%**	**21%**	**61**	**-39%**

Χρηματιστήριο Αθηνών: Τιμές και διακύμανση



Αποτίμηση Μετοχών

Ορολογία:

P: Τιμή μετοχής

D: Μέρισμα

r: Απόδοση

$\beta = \frac{1}{1+r}$ (υποκειμενικός) συντελεστής προεξόφλησης

- Προσοχή: Όλες οι μεταβλητές είναι εκφρασμένες σε πραγματικούς όρους (σταθερές τιμές), δηλαδή αποπληθωρισμένες με τον Γενικό Δείκτη Τιμών Καταναλωτή.

- Για λόγους απλούστευσης θα ασχοληθούμε κατ' αρχήν με τα πιο απλά υποδείγματα με σταθερό συντελεστή προεξόφλησης.

Σταθερός διαχρονικά συντελεστής προεξόφλησης

Το υπόδειγμα υποθέτει ότι η αναμενόμενη πραγματική απόδοση της μετοχής, Ε(r), είναι σταθερή διαχρονικά, Ε(r)=r. Το r αποτελείται από δύο μέρη:

$$r = r^f + z, \text{ όπου}$$

- r^f : πραγματικό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (ίδιο με το ρ)
- z : ασφάλιστρο κινδύνου

Υποθέσεις :

- Το μέρισμα D καταβάλλεται μια φορά το χρόνο (στο τέλος του έτους)
- Το r είναι σταθερό διαχρονικά
- Ερώτηση: Ποια είναι η τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο επενδυτής σήμερα για την μετοχή (fair price);
- Η απάντηση εξαρτάται από τον επενδυτικό ορίζοντα.

Επενδυτικός ορίζοντας = 1 περίοδος (έτος)
Η τιμή (fair price) την οποία είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένας επενδυτής σήμερα ("σήμερα"= χρόνος t) για μια μετοχή που σκοπεύει να κρατήσει μια περίοδο (έως το t+1) είναι:

$$P_t = \frac{E_t(D_{t+1})}{1+r} + \frac{E_t(P_{t+1})}{1+r} \qquad (1)$$

Όπου $E_t(x)$ είναι η αναμενόμενη τιμή της *x* με βάση την διαθέσιμη πληροφόρηση στο χρόνο *t (δεσμευμένος μέσος της x – conditional mean)*.

Σύμφωνα με την (1): $P_t \uparrow$ όταν $E_t(P_{t+1}) \uparrow$ ή/και $E_t(D_{t+1}) \uparrow$

- Ο όρος $\frac{1}{1+r}$ καλείται συντελεστής προεξόφλησης. Ο ρόλος του έγκειται στο να μεταφράζει μελλοντικά έσοδα σε σημερινές αξίες.

- Σύμφωνα με την (1), η τιμή την οποία ένας επενδυτής είναι διατεθειμένος να πληρώσει σήμερα για μια μετοχή ισούται με το άθροισμα του αναμενόμενου μερίσματος και της αναμενόμενης τιμής πώλησης, μεταφρασμένα σε σημερινές τιμές με ένα σταθερό συντελεστή προεξόφλησης.

Επενδυτικός ορίζοντας = 2 περίοδοι (έτη)

Από την (1), $P_t = \frac{E_t(D_{t+1})}{1+r} + \frac{E_t(P_{t+1})}{1+r} \Rightarrow$

$$P_{t+1} = \frac{E_t(D_{t+2})}{1+r} + \frac{E_t(P_{t+2})}{1+r} \qquad (2)$$

(2) στην (1) $\Rightarrow$

$$P_t = \frac{E_t(D_{t+1})}{1+r} + \frac{E_t(D_{t+2})}{(1+r)^2} + \frac{E_t(P_{t+2})}{(1+r)^2} \qquad (3)$$

Επενδυτικός ορίζοντας = Τ περίοδοι (έτη)

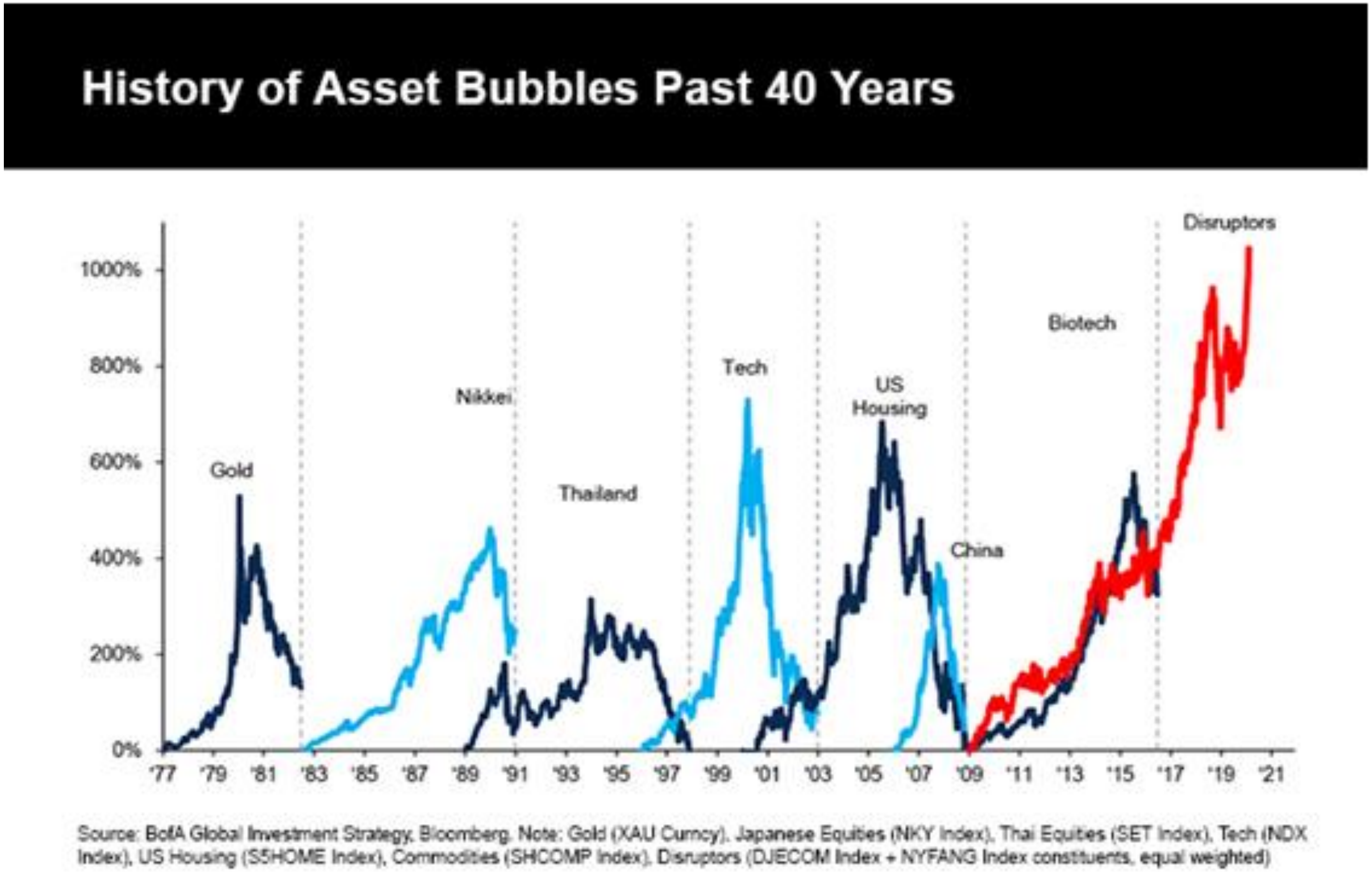
Αυξάνοντας τον επενδυτικό ορίζοντα μέχρι Τ =>

$$P_t = \sum_{j=1}^{T} \frac{E_t\left(D_{t+j}\right)}{(1+r)^j} + \frac{E_t(P_{t+T})}{(1+r)^T} \qquad (4)$$

Η (4) εκφράζει την τιμή ισορροπίας ως το άθροισμα των προεξοφλημένων αναμενόμενων μερισμάτων (πρώτος όρος) και της προεξοφλημένης αναμενόμενης μελλοντικής τιμής της μετοχής (δεύτερος όρος).

Ο τελευταίος όρος ονομάζεται συχνά «κερδοσκοπική φούσκα» (speculative bubble”).

Κερδοσκοπικές φούσκες τα τελευταία 40 χρόνια



Πηγή: Bank of America
Disruptors: NYFANG+DJECOM (Δείκτης τιμών εταιριών ίντερνετ και τεχνολογίας).
NYFANG: Δείκτης NYSE εταιριών τεχνολογίας (Facebook, Apple, Amazon, Netflix, Google)
DJECOM: Δείκτης Dow Jones εταιριών ίντερνετ (e-Commerce stocks) (AMZN, NFLX, GOOG, TWTR, EBAY, FB)

Κερδοσκοπική φούσκα:

Η λογική μιας κερδοσκοπικής φούσκας είναι ότι η τιμή ανεβαίνει σήμερα όταν οι επενδυτές προσδοκούν άνοδο της τιμής στο μέλλον: $P_t \uparrow$ αν $E_t(P_{t+T}) \uparrow$ καθώς $\frac{E_t(P_{t+T})}{(1+r)^T} \uparrow$

- Η σημασία του κερδοσκοπικού παράγοντα στον καθορισμό της τιμής ενός

αξιογράφου είναι συνάρτηση του ορίζοντα του επενδυτή. Για να εξαλείψουμε την κερδοσκοπική φούσκα, υποθέτουμε ότι ο ορίζοντας του επενδυτή είναι άπειρος, δηλαδή αφήνουμε το T να πάει στο άπειρο, $T \to \infty$. Τότε, από την (4):

$$P_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_t(D_{t+j})}{(1+r)^j} + \lim_{T\to\infty} \left[\frac{E_t(P_{t+T})}{(1+r)^T}\right] \quad \Rightarrow \quad (5)$$

$$P_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_t(D_{t+j})}{(1+r)^j} \quad \text{εάν} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{E_t(P_{t+T})}{(1+r)^T}\right) = 0 \quad (6)$$

Η κερδοσκοπική φούσκα εξαφανίζεται υπό την προϋπόθεση ότι $\lim_{T\to\infty} E_t(P_{t+T}) < \infty$, δηλαδή όταν η αναμενόμενη τιμή δεν τείνει στο άπειρο όταν $T \to \infty$.

- Προσέξτε ότι ο όρος $(1+r)^T$ τείνει στο άπειρο όταν $T \to \infty$ εφόσον $r > 0$.

$$P_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_t(D_{t+j})}{(1+r)^j} \qquad (6)$$

- Η σχέση (6) εκφράζει την τιμή της μετοχής ως την παρούσα αξία όλων των αναμενόμενων μερισμάτων με προεξοφλητικό επιτόκιο r.
- Η παρούσα άξια της μετοχής (τιμή) είναι αρνητική συνάρτηση του επιτοκίου προεξόφλησης.
- Ο λόγος είναι ότι ένα υψηλότερο επιτόκιο προεξόφλησης σηματοδοτεί ότι οι επενδυτές προσδίδουν μικρότερη αξία στα μελλοντικά έσοδα τους σε σύγκριση με έσοδα σήμερα.
- Καθώς $r = \rho + z$ η τιμή μιας μετοχής είναι τόσο μικρότερη, όσο υψηλότερο είναι το πραγματικό επιτόκιο, ρ, και όσο υψηλότερο είναι το ασφάλιστρο κινδύνου, z.

Σημείωση 1: Η αξία της μετοχής καθορίζεται αποκλειστικά από την ικανότητα της να πληρώνει μερίσματα. Αν υποθέσουμε στην $P_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_t(D_{t+j})}{(1+r)^j}$ ότι $E_t(D_{t+j}) = 0,\ j = 1, \ldots \infty$ τότε $P_t = 0$.

- Γενικά: Η αξία κάθε τίτλου καθορίζεται αποκλειστικά από την ικανότητά του να δημιουργεί εισόδημα στο μέλλον για τον επενδυτή (όχι κέρδη για την επιχείρηση).

Σημείωση 2: Ο συντελεστής προεξόφλησης στο παραπάνω υπόδειγμα θεωρείται σταθερός διαχρονικά.

- Η υπόθεση αυτή είναι μη ρεαλιστική καθώς τόσο το πραγματικό επιτόκιο, ρ, όσο και το ασφάλιστρο κινδύνου, z, αλλάζουν στο χρόνο.
- Αργότερα θα γνωρίσουμε υποδείγματα αποτίμησης τα οποία προσπαθούν να εξηγήσουν την μεταβλητότητα του συντελεστή προεξόφλησης στο χρόνο.

- Πρακτικά η σχέση (6), $P_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_t(D_{t+j})}{(1+r)^j}$, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό της σημερινής τιμής ισορροπίας P_t καθώς περιέχει προσδοκίες μελλοντικών μερισμάτων.
- Για να καθορίσουμε το P_t πρέπει να εξαλείψουμε τις προσδοκίες μελλοντικών μερισμάτων, $E_t(D_{t+j})$, και να τις αντικαταστήσουμε με μετρήσιμα μεγέθη.
- Για το σκοπό αυτό πρέπει να κάνουμε μια υπόθεση σχετικά με την στοχαστική διαδικασία του D_t. Η υπόθεση ενός γενεσιουργού μηχανισμού του D_t (Data Generating Process) θα μας επιτρέψει να κάνουμε προβλέψεις για τα μελλοντικά επίπεδα του D_{t+j} με βάση σημερινή πληροφόρηση.

Στοχαστική διαδικασία μερίσματος

1. Τυχαίος περίπατος

Ας υποθέσουμε ότι το μέρισμα ακολουθεί την στοχαστική διαδικασία ενός τυχαίου περίπατου (random walk):

$$D_{t+1} = D_t + \varepsilon_{t+1} \qquad (7)$$

όπου ε_{t+1} τυχαία διαταραχή με μέσο 0 και σταθερή διακύμανση.

Τότε το αναμενόμενο μέρισμα για κάθε μελλοντικό χρόνο *t+j*, δεδομένης της σημερινής πληροφόρησης, είναι ίσο με το σημερινό μέρισμα: $E_t\left(D_{t+j}\right) = D_t$. Κατά συνέπεια, από την (6) προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
P_t &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_t(D_{t+j})}{(1+r)^j} \\
&= D_t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^j} \\
&= D_t \frac{1}{(1+r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^j} \\
&= D_t \frac{1}{(1+r)} \left(1 + \frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots \right) \\
&= D_t \frac{1}{(1+r)} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} \right) \\
&= D_t \frac{1}{(1+r)} \left(\frac{1+r}{r} \right) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
P_t = \frac{D_t}{r} \qquad (8)
$$

- Καθώς το μέρισμα αναμένεται να παραμείνει σταθερό, η τιμή είναι ένα πολλαπλάσιο του σημερινού μερίσματος.
- Με άλλα λόγια, η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής, r, είναι ίση με τη μερισματική της απόδοση σήμερα, $r=D_t/P_t$.

Στοχαστική διαδικασία της τιμής της μετοχής

- Τι προκύπτει από την (7) σχετικά με την στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί η τιμή P_t;

- Από την (1) $\Rightarrow E_t(P_{t+1}) = (1+r)P_t - E_t(D_{t+1})$ όπου $E_t(P_{t+1})$ είναι ο δεσμευμένος μέσος (αναμενόμενη τιμή) του P_{t+1} με βάση την πληροφόρηση στο χρόνο t.

Αλλά από την (7) $\Rightarrow E_t(D_{t+1}) = D_t$ και από την (8)$\Rightarrow D_t = r \cdot P_t$.

Επομένως :

$$E_t(P_{t+1}) = (1+r)P_t - rP_t = P_t$$

- Γενικά ισχύει $E_t\left(P_{t+j}\right) = P_t$, *j=1,2,3,…*∞, δηλαδή η τιμή ακολουθεί και αυτή μια στοχαστική διαδικασία τυχαίου περίπατου, όπως και το μέρισμα. Η καλύτερη πρόβλεψη της μελλοντικής τιμής είναι ότι θα μείνει σταθερή στα σημερινά της επίπεδα.

2. Τυχαίος περίπατος με τάση: το υπόδειγμα Gordon

Ας υποθέσουμε ότι ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης του μερίσματος είναι σταθερός και ισούται με g. Αυτό αντιστοιχεί σε μια στοχαστική διαδικασία τυχαίου περίπατου με τάση (random walk with drift):

$$E_t(D_{t+1}) = (1+g)D_t$$

$$E_t\left(D_{t+j}\right) = (1+g)^j D_t, \quad j>1$$

Αντικαθιστώντας στην (6), $P_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_t\left(D_{t+j}\right)}{(1+r)^j}$:

$$P_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+g)^j D_t}{(1+r)^j} = D_t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+g)^j}{(1+r)^j}$$

$$= D_t \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j$$

όπου $\delta = \frac{(1+g)}{(1+r)}$.

2. Τυχαίος περίπατος με τάση: το υπόδειγμα Gordon

Επομένως:

$$P_t = D_t \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j = D_t \delta (1 + \delta + \delta^2 + \ldots) = D_t \delta \left(\frac{1}{1-\delta} \right)$$

$$= D_t \frac{1+g}{1+r} \left(\frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+r}} \right)$$

$$\Rightarrow$$

$$P_t = D_t \frac{1+g}{r-g} \qquad (10)$$

Η σχέση (10) είναι το υπόδειγμα του Gordon.

$$P_t = D_t \frac{1+g}{r-g} \qquad (10)$$

- Σύμφωνα με το υπόδειγμα του Gordon, η τιμή μιας μετοχής είναι θετική συνάρτηση του μερίσματος και του αναμενόμενου ρυθμού αύξησης του μερίσματος και αρνητική συνάρτηση της απαιτούμενης πραγματικής απόδοσης.

- Η τιμή είναι υψηλή σε σχέση με το σημερινό μέρισμα όταν ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής του μερίσματος είναι υψηλός ή όταν η αναμενόμενη απόδοση είναι χαμηλή.

- Μετοχές με αναμενόμενη υψηλή κερδοφορία στο μέλλον (g) έχουν υψηλά P/D. Παράδειγμα: μετοχές τεχνολογίας.

- Μεταξύ δυο μετοχών με ίδια κερδοφορία (g) η μετοχή που έχει υψηλότερο ασφάλιστρο κινδύνου (δηλ. υψηλότερο r) έχει χαμηλότερο P/D.

Εφαρμογές

Το παρακάτω γράφημα δείχνει τον

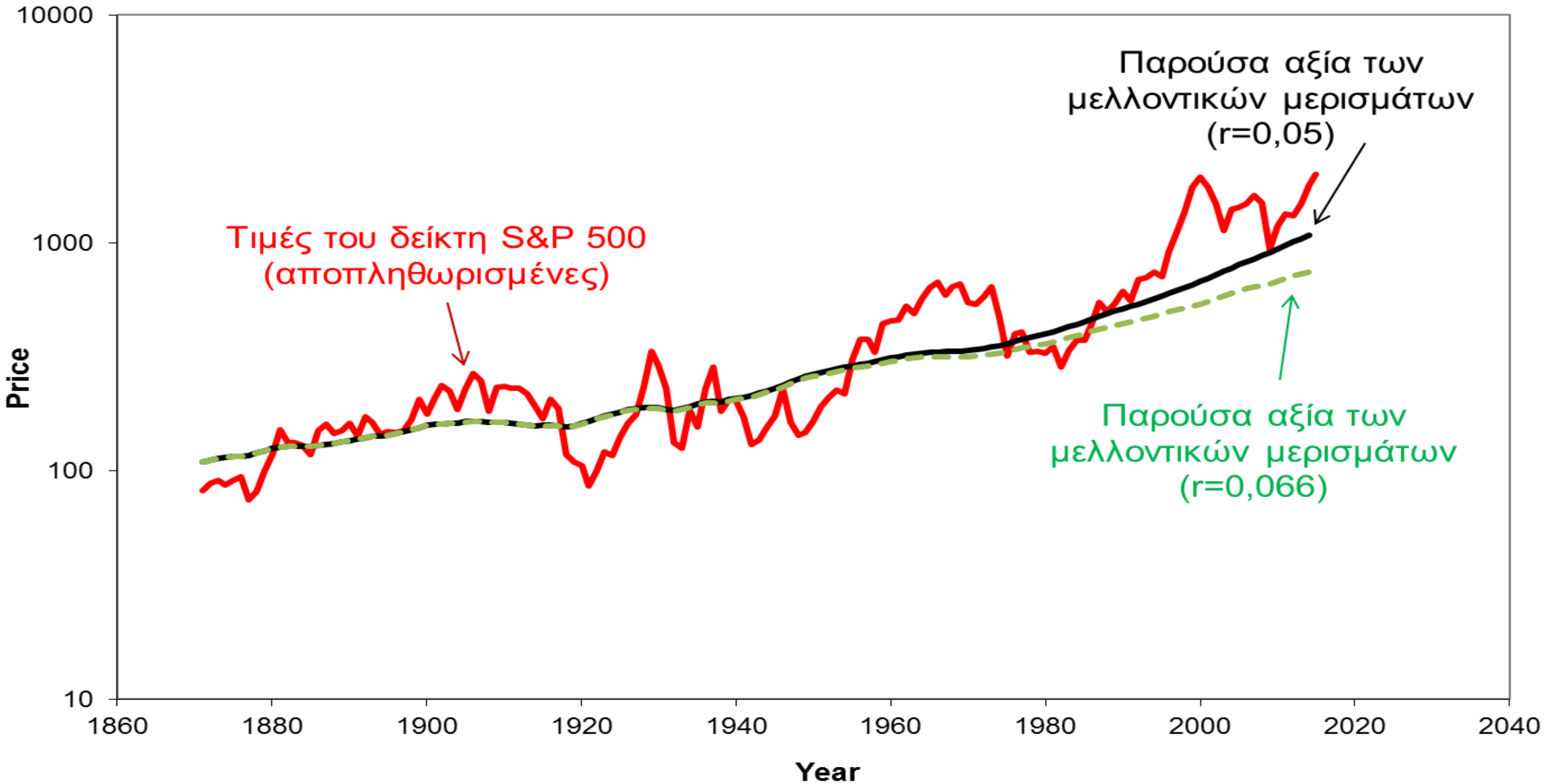
1. **S&P 500**: αποπληθωρισμένος δείκτης τιμών του χρηματιστηρίου των ΗΠΑ (S&P 500) για το διάστημα 1871-2014 (κόκκινη γραμμή).
2. **Παρούσα αξία των μελλοντικών μερισμάτων** με σταθερό συντελεστή προεξόφλησης. Η αξία αυτή εκτιμάται για κάθε σημείο στο χρόνο (t=1871-2013) ως:

$$P_t^* = \left(\frac{1}{1+r}\right) \quad (D_{t+1} + P_{t+1})$$

όπου r η μέση αποπληθωρισμένη λογαριθμική απόδοση του S&P 500 στο διάστημα 1871-2014.

Η τελική τιμή (το 2014) εκτιμάται σύμφωνα με το υπόδειγμα Gordon ως D(2014)*(1+g)/(r-g), όπου g ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής των μερισμάτων και r η αναμενόμενη απόδοση.

Ως μελλοντικό μέσο ρυθμό μεταβολής των μερισμάτων (g) και μέση αναμενόμενη πραγματική απόδοση του S&P 500 μετά το 2014 (r) υποθέσαμε g=0.014 (δειγματικός μέσος 1870-2014) και r=0.05 (μαύρη γραμμή) ή, εναλλακτικά, r=0.066 (πράσινη διακεκομμένη γραμμή).



Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις της παρούσας αξίας αλλάζουν ανάλογα με την υπόθεση που θα κάνουμε σχετικά με τη μελλοντική αναμενόμενη απόδοση του δείκτη (r). Όσο υψηλότερη είναι η αναμενόμενη μελλοντική απόδοση, τόσο χαμηλότερη η παρούσα αξία. Η διαφορά στην εκτίμηση αυξάνει με τον χρόνο και είναι μέγιστη στις τελευταίες παρατηρήσεις.

Το ίδιο θα συνέβαινε και αν αλλάζαμε την υπόθεση για το g. Όσο υψηλότερο το g, τόσο υψηλότερη η παρούσα αξία.

Οι παρατηρήσεις αυτές δείχνουν ότι εκτιμήσεις της παρούσας αξίας μπορεί να διαφέρουν σημαντικά ανάλογα με τις υποθέσεις σχετικά με την αναμενόμενη απόδοση και τον ρυθμό μεταβολής των μερισμάτων στο μέλλον.

Υπόδειγμα Gordon με βάση τα κέρδη

Συχνά το υπόδειγμα Gordon ορίζεται με βάση τα κέρδη (E) των εταιρειών και όχι με βάση τα μερίσματα. Ο λόγος είναι ότι τα κέρδη αντικατοπτρίζουν καλύτερα την ικανότητα των εταιρειών να προσδίδουν μελλοντική αξία στις μετοχές τους.

Το υπόδειγμα (10) μπορεί να μεταφραστεί εύκολα σε όρους E , αν υποθέσουμε ότι το μέρισμα είναι ένα σταθερό ποσοστό, τ, των κερδών (τ: payout ratio).

$$D_t = \tau E_\tau \qquad (11)$$

Αντικαθιστώντας την (11) στην (10) και διαιρώντας και τις δυο πλευρές με E_t :

$$\frac{P_t}{E_t} = \tau \frac{1+g}{r-g} \qquad (12)$$

- Σύμφωνα με την (12), εταιρείες που έχουν υψηλά P/E πρέπει να έχουν υψηλούς αναμενόμενους ρυθμούς μεταβολής των κερδών τους (με σταθερό r και t).

Η υπόθεση μιας σταθερής σχέσης μεταξύ μερισμάτων και εταιρικών κερδών είναι αρκετά γενναία. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ότι ο λόγος αυτός έχει μεγάλες διακυμάνσεις στο χρόνο. Μακροχρόνια, οι εταιρείες φαίνεται να πληρώνουν ένα σχετικά σταθερό ποσοστό των κερδών τους σε μερίσματα.

Όμως βραχυχρόνια (για λόγους εταιρικής πολιτικής, signaling κλπ) τείνουν να κρατούν τα μερίσματα σταθερά με αποτέλεσμα να αλλάζει ο λόγος μερίσματος προς κέρδη, ιδιαίτερα σε περιόδους ύφεσης, όταν τα εταιρικά κέρδη μειώνονται σημαντικά (βλέπε στο διάγραμμα την μεγάλη ύφεση/αποπληθωρισμό της περιόδου 1922-1933 και την ύφεση του 2008).

Στοχαστική διαδικασία της τιμής

Τι συνεπάγεται η υπόθεση ενός σταθερού ρυθμού ανόδου των μερισμάτων για την στοχαστική διαδικασία που ακολουθούν οι τιμές των μετοχών ;

Από την (1): $\Rightarrow E_t(P_{t+1}) = (1+r)P_t - E_t(D_{t+1})$
Αλλά από την (9) $\Rightarrow E_t(D_{t+1}) = (1+g)D_t$

Επομένως:

$$E_t(P_{t+1}) = (1+r)P_t - (1+g)D_t$$

Από την (10) έχουμε $P_t = D_t\frac{1+g}{r-g}$. Επομένως :
$E_t(P_{t+1}) = (1+r)P_t - (r-g)P_t = (1+g)P_t$.

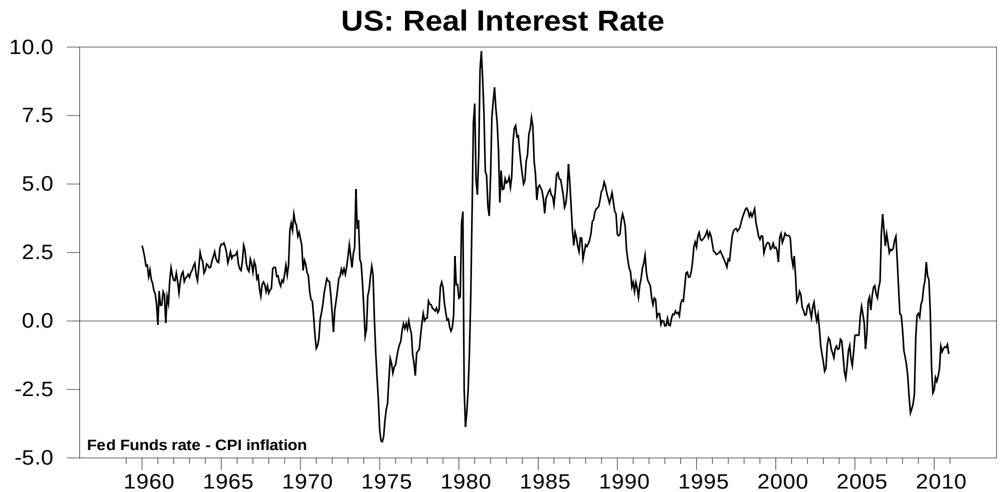
Γενικά, για κάθε μελλοντικό χρόνο *t+j*:
$E_t\left(P_{t+j}\right) = (1+g)^j P_t$.

- Η τιμή ακολουθεί επίσης έναν τυχαίο περίπατο με τάση σε λογάριθμους,
$E_t\left(\ln\left(P_{t+j}\right)\right) = \ln(P_t) + jg$.

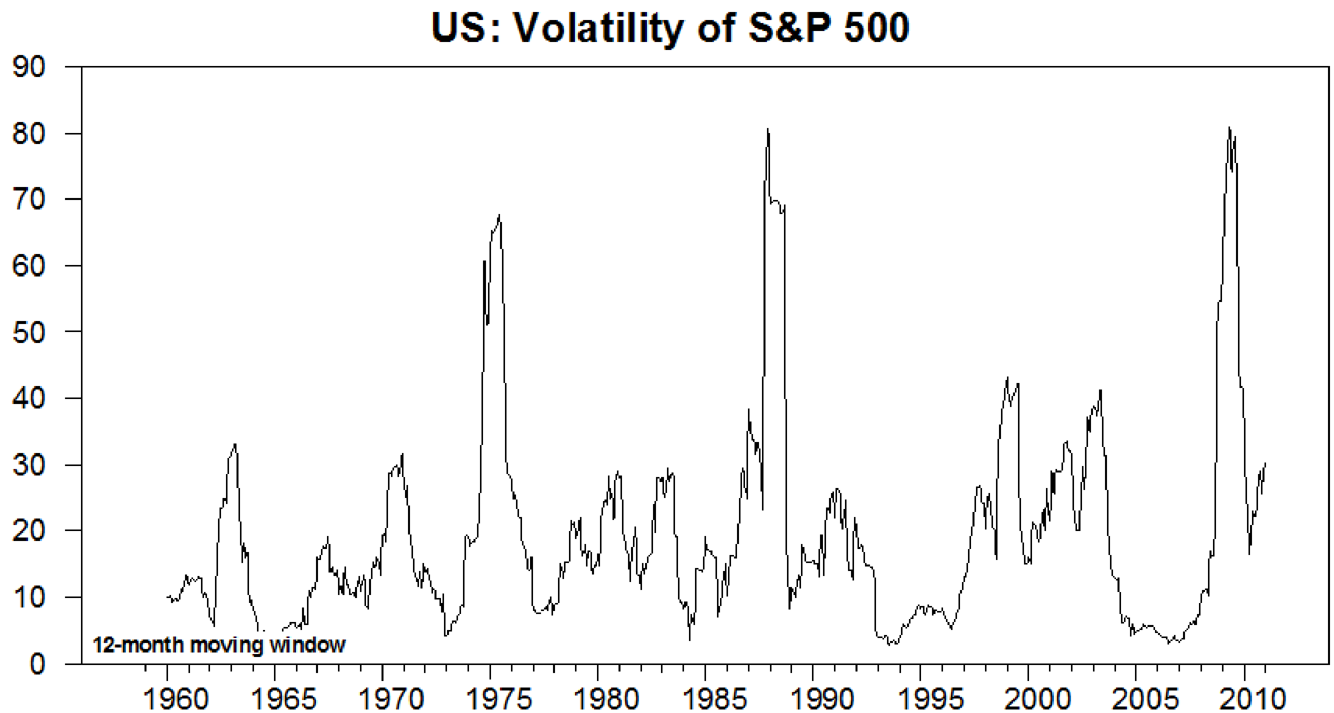
    - Οι τιμές βραχυχρόνια δεν είναι προβλέψιμες.
    - Μακροχρόνια όμως αναμένεται να αυξάνονται με ρυθμό g.

Κυμαινόμενος συντελεστής προεξόφλησης

Τόσο τα επιτόκια μηδενικού κινδύνου όσο και τα ασφάλιστρα κινδύνου κυμαίνονται στο χρόνο. Όταν η οικονομία βρίσκεται σε τροχιά ανάπτυξης, η κεντρική τράπεζα αυξάνει τα επιτόκια παρέμβασης για να τιθασεύσει τον αυξανόμενο πληθωρισμό. Τα πραγματικά επιτόκια αυξάνουν. Όταν, αντίθετα, η οικονομία μπαίνει σε ύφεση, η κεντρική τράπεζα μειώνει τα επιτόκια για να βοηθήσει την πραγματική οικονομία να ανακάμψει. Τα πραγματικά επιτόκια μειώνονται. Στο παρακάτω διάγραμμα, φαίνεται η πορεία του πραγματικού επιτοκίου στις ΗΠΑ (Fed Funds rate – Πληθωρισμός ΔΤΚ).



Τα ασφάλιστρα κινδύνου έχουν επίσης μεγάλη διακύμανση στο χρόνο καθώς η διακύμανση των αποδόσεων μεταβάλλεται. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει την πορεία της τυπικής απόκλισης των αποδόσεων του S&P 500 στο χρόνο. Η πετρελαϊκή κρίση του 1975, η απότομη διόρθωση της αγοράς το 1987 και η πρόσφατη χρηματοοικονομική κρίση του 2008 οδήγησαν σε σημαντική αύξηση της διακύμανσης των χρηματιστηρίων. Γενικά, σε περιόδους ανοδικών αγορών η διακύμανση είναι χαμηλή, ενώ σε περιόδους πτωτικών αγορών η διακύμανση αυξάνεται απότομα.



Κατά συνέπεια, οι αναμενόμενες αποδόσεις των μετοχών μεταβάλλονται στο χρόνο. Ας υποθέσουμε ότι οι επενδυτές απαιτούν μια διαφορετική απόδοση σε κάθε μελλοντικό χρονικό σημείο για να είναι διατεθειμένοι να κρατήσουν μια μετοχή. Τότε, το επιτόκιο προεξόφλησης μελλοντικών μερισμάτων (αναμενόμενη απόδοση) μεταβάλλεται στο χρόνο:

$$r_t = \rho_t + z_t$$
$$\beta_t = \frac{1}{1 + r_t}$$

Αποτίμηση

Επενδυτικός ορίζοντας 1 **περίοδος (έτος).**

Η τιμή (fair value) την οποία είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένας επενδυτής σήμερα για μια μετοχή που σκοπεύει να κρατήσει μια περίοδο είναι:

$$P_t = \frac{E_t(D_{t+1})}{1+r_{t+1}} + \frac{E_t(P_{t+1})}{1+r_{t+1}} = \beta_{t+1}\big(E_t(D_{t+1}) + E_t(P_{t+1})\big)$$

Επενδυτικός ορίζοντας 2 περίοδοι (έτη).

$$P_t = \frac{E_t(D_{t+1})}{1+r_{t-1}} + \frac{E_t(P_{t+1})}{1+r_{t+1}} = \beta_{t+1}\big(E_t(D_{t+1}) + E_t(P_{t+1})\big)$$

$$P_{t+1} = \frac{E_t(D_{t+2})}{1+r_{t+2}} + \frac{E_t(P_{t+2})}{1+r_{t+2}} = \beta_{t+2}\big(E_t(D_{t+2}) + E_t(P_{t+2})\big)$$

$$\Rightarrow$$

$$P_t = \beta_{t+1}E_t(D_{t+1}) + \beta_{t+1}\beta_{t+2}\big(E_t(D_{t+2}) + E_t(P_{t+2})\big)$$

Άπειρος επενδυτικός ορίζοντας

Αυξάνοντας τον επενδυτικό ορίζοντα μέχρι το άπειρο και παραβλέποντας την κερδοσκοπική φούσκα, προκύπτει:

$$P_t = \beta_{t+1}E_t(D_{t+1}) + \beta_{t+1}\beta_{t+2}E_t(D_{t+2}) + \beta_{t+1}\beta_{t+2}\beta_{t+3}E_t(D_{t+3}) + \ldots$$

$$\Rightarrow$$

$$P_t = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{j}\beta_{t+i}\right]E_t\left(D_{t+j}\right)$$

Για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί το υπόδειγμα προεξόφλησης για τον καθορισμό της τιμής, πρέπει να προβλεφθούν τόσο τα μελλοντικά μερίσματα όσο και οι μελλοντικοί συντελεστές προεξόφλησης.

- Σκοπός των υποδειγμάτων αποτίμησης (''asset pricing models ''), όπως CAPM, Intertemporal CAPM, Consumption CAPM, APT κλπ είναι να «ανακαλύψουν» τους παράγοντες που καθορίζουν τις αναμενόμενες αποδόσεις, δηλ. τους συντελεστές προεξόφλησης τόσο μεταξύ διαφορετικών κεφαλαιακών στοιχείων όσο και στο χρόνο.

Η παραπάνω φόρμουλα είναι περίπλοκη καθώς περιλαμβάνει αθροίσματα γινομένων. Για να την απλοποιήσουμε, μπορούμε να πάρουμε μια γραμμική προσέγγιση της απόδοσης. Αυτό θα μας δώσει ένα γραμμικό υπόδειγμα προεξόφλησης.

Γραμμική προσέγγιση του υποδείγματος παρούσας αξίας με κυμαινόμενο συντελεστή προεξόφλησης

Οι Campbel και Shiller (1989) προτείνουν μια γραμμική προσέγγιση του υποδείγματος παρούσας αξίας με κυμαινόμενους συντελεστές προεξόφλησης, η οποία βασίζεται σε μια λογαριθμική προσέγγιση της απόδοσης. Η απόδοση μιας μετοχής ορίζεται ως:

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$1 = \frac{R_{t+1}}{R_{t+1}} = \frac{1}{R_{t+1}} \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}$$

και πολλαπλασιάζοντας και τις δυο πλευρές με $\frac{P_t}{D_t}$:

$$\frac{P_t}{D_t} = \frac{1}{R_{t+1}} \left(1 + \frac{P_{t+1}}{D_{t+1}}\right) \frac{D_{t+1}}{D_t}$$

Παίρνοντας λογαρίθμους (που συμβολίζονται με μικρά γράμματα), έχουμε:

$$p_t - d_t = -r_{t+1} + \Delta d_{t+1} + \ln\left(1 + e^{p_{t+1} - d_{t+1}}\right) \qquad \text{(A)}$$

$$p_t - d_t = -r_{t+1} + \Delta d_{t+1} + \ln\left(1 + e^{p_{t+1} - d_{t+1}}\right) \qquad \text{(A)}$$

Προσεγγίζουμε γραμμικά τον τελευταίο όρο χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση Taylor πρώτου βαθμού γύρω από το σημείο $P/D = e^{p-d}$. Το σημείο αυτό μπορεί να είναι ο δειγματικός μέσος της μερισματικής απόδοσης.

> Μια γραμμική προσέγγιση Taylor 1ου βαθμού μιας συνάρτησης $f(x_t)$ γύρω από ένα σημείο x γράφεται:
> $$f(x_t) = f(x) + f'(x)(x_t - x)$$

Παίρνοντας μια γραμμική προσέγγιση Taylor του τελευταίου όρου της (A), $f(x_t) = \ln\left(1 + e^{p_{t+1} - d_{t+1}}\right)$, έχουμε:

$f(x) = \ln\left(1 + e^{p-d}\right)$ και $f'(x) = (\frac{1}{1+e^{p-d}})e^{p-d} = \frac{P/D}{1+(P/D)}$.

Κατά συνέπεια, η προσέγγιση 1ου βαθμού γύρω από το μέσο δειγματικό *p-d* είναι:

$$p_t - d_t = -r_{t+1} + \Delta d_{t+1} + \frac{P/D}{1 + (P/D)}[p_{t+1} - d_{t+1} - (p - d)]$$
$$= -r_{t1} + \Delta d_{t+1} + \rho[p_{t+1} - d_{t+1}] + k$$

όπου $\rho = \frac{P/D}{1+P/D}$ είναι ένας σταθερός συντελεστής προεξόφλησης (0< ρ < 1) και k μια σταθερά.

Λύνοντας προς τα εμπρός, παίρνουμε:

$$p_t - d_t = \text{const.} + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \left(\Delta d_{t+j} - r_{t+j} \right)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η φούσκα εξαφανίζεται μακροπρόθεσμα, δηλαδή $\lim_{j\to\infty} \rho^j \left(p_{t+j} - d_{t+j}\right) = 0$.

Αυτή η ταυτότητα ισχύει ex-post (εκ των υστέρων) και ex-ante (υπό μορφή προσδοκιών).

Παίρνοντας τον δεσμευμένο μέσο της προηγούμενης εξίσωσης, η **ex-ante** εκδοχή είναι:

$$E_t(p_t - d_t) \equiv p_t - d_t = const + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \left(\Delta d_{t+j} - r_{t+j} \right)$$

όπου *const* μια σταθερά.

Η εξίσωση αυτή είναι το υπόδειγμα παρούσας αξίας με κυμαινόμενους συντελεστές προεξόφλησης (πραγματικές αποδόσεις). Όταν ο λόγος της τιμής προς μέρισμα είναι πάνω από το μέσο του (*const*), η αγορά αναμένει ότι η μετοχή θα έχει στο μέλλον υψηλούς ρυθμούς μεταβολής των μερισμάτων ή χαμηλές αποδόσεις ή και τα δύο.

Σύμφωνα με το υπόδειγμα

$$p_t - d_t = const + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \left(\Delta d_{t+j} - r_{t+j} \right):$$

- Αν αποδόσεις και μεταβολές των μερισμάτων είναι μη προβλέψιμες (τιμές και μερίσματα είναι τυχαίοι περίπατοι), τότε ο λόγος τιμής προς μέρισμα είναι σταθερός (καθώς ο τελευταίος όρος της εξίσωσης είναι μηδέν).
- Αν ο λόγος τιμής προς μέρισμα είναι κυμαινόμενος στο χρόνο, τότε

○ Ή οι αποδόσεις είναι προβλέψιμες, δηλ. $E_t(r_{t+j})\neq 0$για κάποιο j

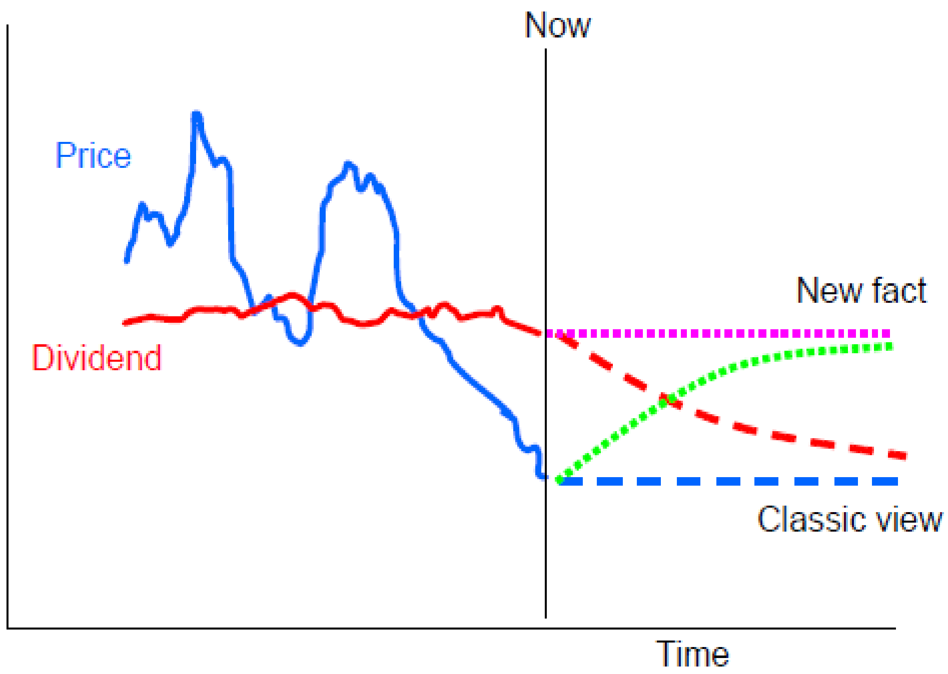
○ Ή τα μερίσματα είναι προβλέψιμα, δηλ. $E_t(\Delta d_{t+j})\neq 0$για κάποιο j

Με άλλα λόγια, ο λόγος τιμής προς μέρισμα αντανακλά προσδοκίες για μελλοντικά μερίσματα ή/και μελλοντικές αποδόσεις.

Σημείωση: Μια τρίτη εκδοχή είναι ότι η διακύμανση του λόγου τιμής προς μέρισμα οφείλεται σε κερδοσκοπικές προσδοκίες μελλοντικής αλλαγής της τιμής (κερδοσκοπικές φούσκες) χωρίς να μεταβάλλονται οι προσδοκίες για μελλοντικές αποδόσεις και μερίσματα.

Μια σειρά ερευνητών ισχυρίζονται ότι ο λόγος τιμής προς μέρισμα (ή το P/E) έχουν προβλεπτική ικανότητα για τις μελλοντικές αποδόσεις των μετοχών και όχι για τα μερίσματα. O Cochrane (2010) ισχυρίζεται ότι η προβλεπτική ικανότητα του λόγου τιμής προς μέρισμα για μελλοντικές αποδόσεις αλλάζει δραματικά τον τρόπο σκέψης στην χρηματοοικονομική.

Το παρακάτω διάγραμμα (από τον Cochrane 2010) δείχνει σχηματικά την αλλαγή στον τρόπο σκέψης. Η κλασσική θεώρηση του υποδείγματος προεξόφλησης με σταθερές αναμενόμενες αποδόσεις είναι ότι όταν η τιμή είναι χαμηλή σε σχέση με το μέρισμα, η αγορά προεξοφλεί ότι τα μελλοντικά μερίσματα θα μειωθούν (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή στο διάγραμμα) ενώ οι τιμές θα μείνουν σταθερές (μπλε διακεκομμένη γραμμή). Βλέπε, μεταξύ άλλων, Rozeff (1984), Keim and Stambaugh (1986), Fama and French (1991), Campbell and Shiller (1989), Cochrane (2008).

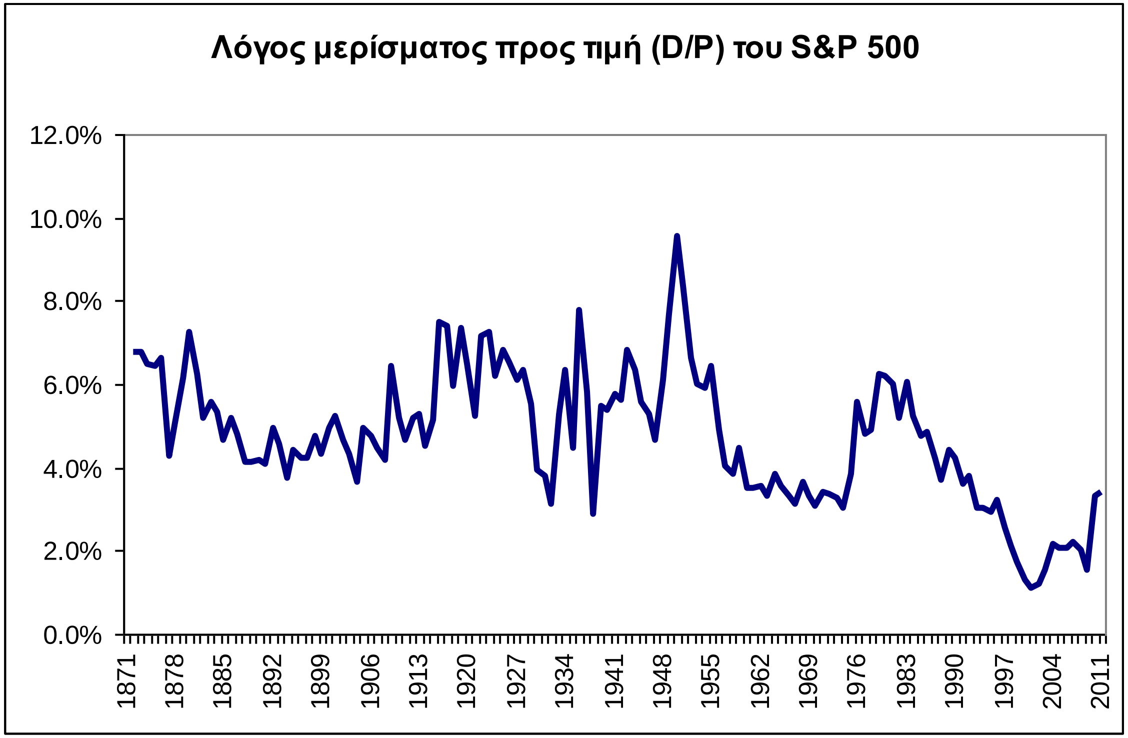


Η νέα θεώρηση της χρηματοοικονομικής σύμφωνα με τον Cochrane είναι το ακριβώς αντίθετο: όταν η τιμή είναι χαμηλή σε σχέση με το μέρισμα, η αγορά προεξοφλεί ότι οι αποδόσεις (άρα οι τιμές) θα αυξηθούν στο μέλλον (πράσινη διακεκομμένη γραμμή στο διάγραμμα) ενώ τα μερίσματα θα μείνουν σταθερά (μοβ διακεκομμένη γραμμή).

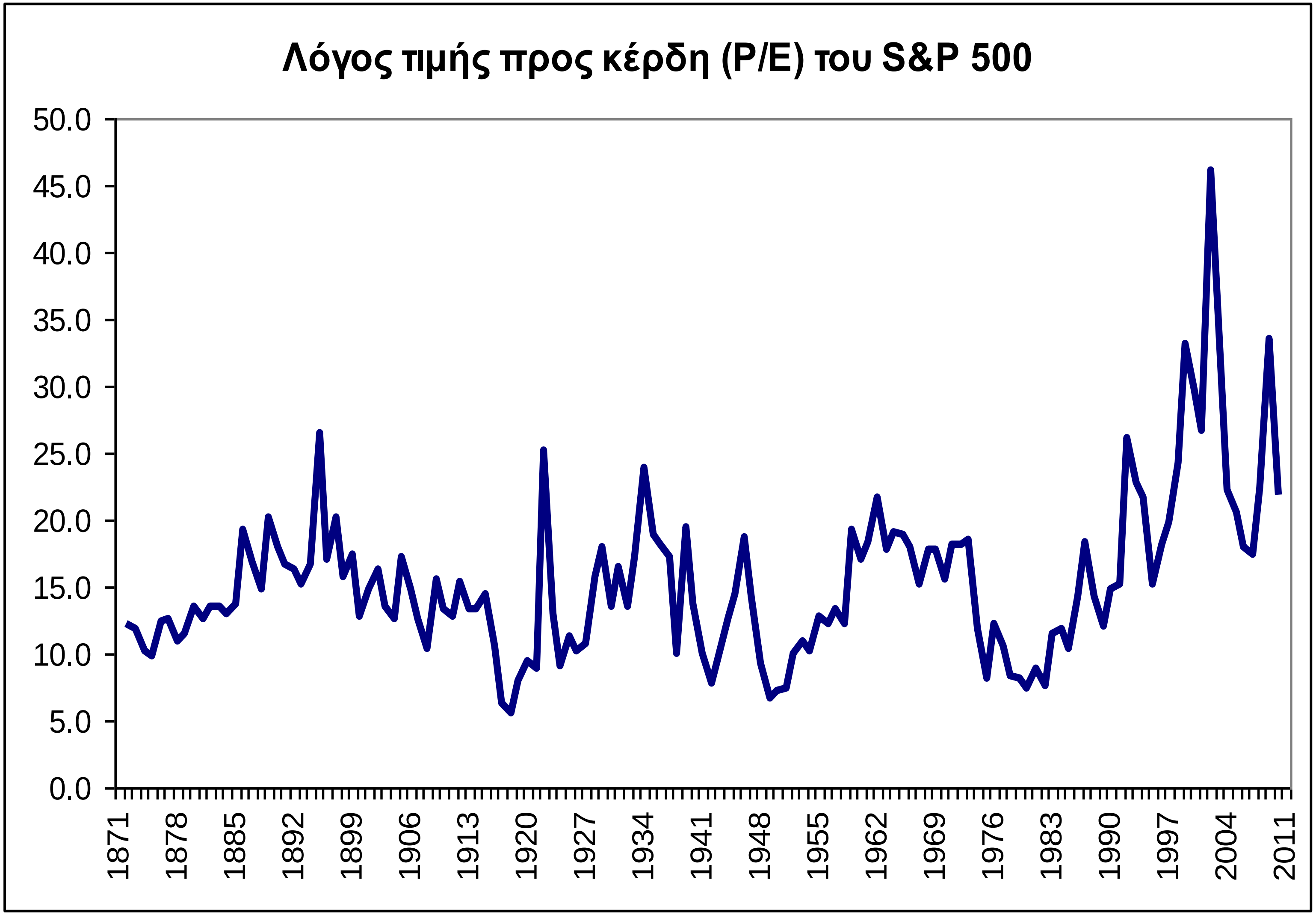
Η προβλεπτική ικανότητα του λόγου τιμής προς μέρισμα. Εμπειρικοί έλεγχοι:

Σύμφωνα με το υπόδειγμα παρούσας αξίας με κυμαινόμενους συντελεστές προεξόφλησης, ο λόγος τιμής προς μέρισμα έχει προβλεπτική ικανότητα για τις μελλοντικές αποδόσεις ή/και για τους μελλοντικούς ρυθμούς μεταβολής των μερισμάτων.

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τον λόγο μερίσματος προς τιμή (D/P) του S&P 500 από το 1871 έως το 2010 (παρόμοια εικόνα προκύπτει χρησιμοποιώντας το E/P).



Ο λόγος D/P υφίσταται μεγάλες διακυμάνσεις στο χρόνο. Οι διακυμάνσεις αυτές έχουν μεγάλη διάρκεια, δηλ. παίρνει αρκετά χρόνια για να επιστρέψει ο λόγος στο μέσο του. Ο ίδιος ο μέσος φαίνεται να μεταβάλλεται διαχρονικά. Μετά τον 2^{o} παγκόσμιο πόλεμο ο μέσος είναι χαμηλότερος.


Λόγος τιμής προς κέρδη (P/E) του S&P 500
50.0
45.0
40.0
35.0
30.0
25.0
20.0
15.0
10.0
5.0
0.0
1871
1878
1885
1892
1899
1906
1913
1920
1927
1934
1941
1948
1955
1962
1969
1976
1983
1990
1997
2004
2011

Η προβλεπτική ικανότητα του λόγου τιμής προς μέρισμα μπορεί να ελεγχθεί εμπειρικά με τις παρακάτω παλινδρομήσεις:

$$\sum_{j=1}^{k} \rho^j \left(\Delta d_{t+j}\right) = \alpha_d + b_d(p_t - d_t)$$
$$\sum_{j=1}^{k} \rho^j \left(r_{t+j}\right) = a_r + b_r(p_t - d_t)$$

για $k = 1, \ldots, K$. Καθώς το ρ είναι λίγο μικρότερο από τη μονάδα (αλλά κοντά στη μονάδα), οι ανεξάρτητες μεταβλητές μπορούν να προσεγγιστούν με την αλλαγή του μερίσματος και της σωρευτικής απόδοσης μεταξύ t και $t+k$:

$\sum_{j=1}^{k} \rho^j \left(\Delta d_{t+j}\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(\Delta d_{t+j}\right) = d_{t+k} - d_{t,}$
$\sum_{j=1}^{k} \rho^j \left(r_{t+j}\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(r_{t+j}\right).$

Κατά συνέπεια, οι εμπειρικοί έλεγχοι προβλεψιμότητας μπορούν να γίνουν με τις παλινδρομήσεις (για k=1,2,3,…):

$$d_{t+k} - d_t = a_d + b_d(p_t - d_t)$$

$$\sum_{j=1}^{k}\left(r_{t+j}\right) = a_r + b_r(p_t - d_t)$$

$$d_{t+k} - d_t = a_d + b_d(p_t - d_t)$$
$$\sum_{j=1}^{k}\left(r_{t+j}\right) = a_r + b_r(p_t - d_t)$$

- Στις παλινδρομήσεις αυτές ελέγχουμε αν οι συντελεστές b είναι στατιστικά σημαντικοί, δηλ. διαφορετικοί του μηδενός.
- **Σημείωση:** Γενικά δεν ισχύει $\sum_{j=1}^{k}\left(r_{t+j}\right) = p_{t+k} - p_t$. Το άθροισμα των λογαριθμικών αποδόσεων είναι ίσον με την μεταβολή της τιμής μόνο όταν οι αποδόσεις είναι οι κεφαλαιακές αποδόσεις χωρίς τα μερίσματα. Καθώς η απόδοση έχει ορισθεί ως η ολική απόδοση (συμπεριλαμβανομένων των μερισμάτων), η τελευταία εξίσωση δεν ισχύει (Βλέπε επόμενο κεφάλαιο για περαιτέρω ανάλυση αυτού του θέματος).
- Τα αποτελέσματα εμπειρικών ερευνών δείχνουν ότι ο λόγος τιμής προς μέρισμα έχει μακροπρόθεσμα προβλεπτική ικανότητα για τις αποδόσεις και όχι για τα μερίσματα (Fama and French (1991), Campbell and Shiller (1989), Cochrane (2008)).

Πίνακας: Παλινδρομήσεις αποδόσεων και μεταβολής μερισμάτων στο δείκτη τιμής προς μερίσματα

OLS regressions of excess returns and dividend growth on VW P/D ratio

Horizon k (years)	$R_{t\to t+k} = a + b(P_t/D_t)$			$D_{t+k}/D_t = a + b(P_t/D_t)$		
	b	$\sigma(b)$	R^2	b	$\sigma(b)$	R^2
1	−1.04	(0.33)	0.17	−0.39	(0.18)	0.07
2	−2.04	(0.66)	0.26	−0.52	(0.40)	0.07
3	−2.84	(0.88)	0.38	−0.53	(0.43)	0.07
5	−6.22	(1.24)	0.59	−0.99	(0.47)	0.15

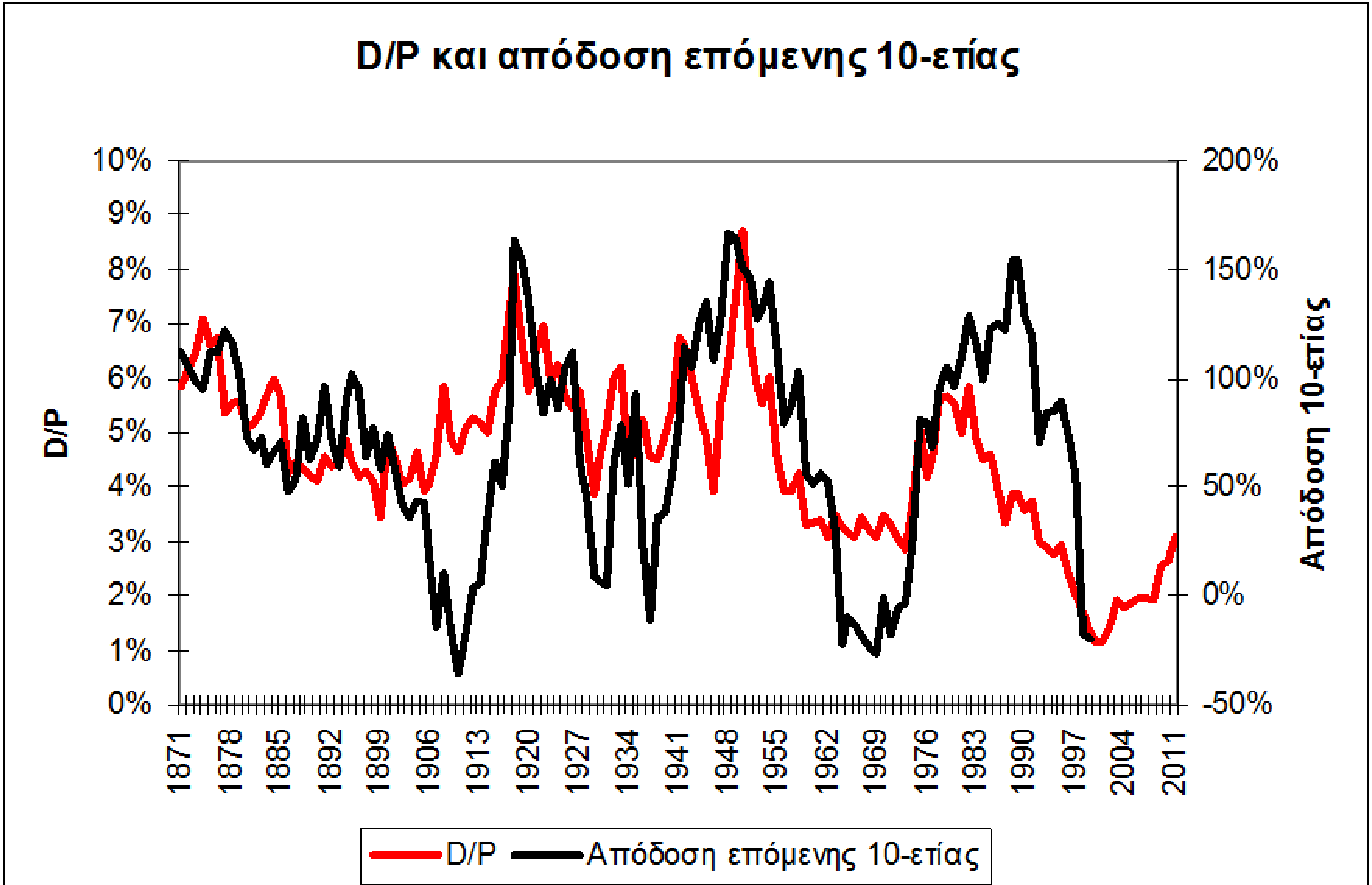
Notes: $R_{t\to t+k}$ indicates the k year return on the value weighted NYSE portfolio less the k year return from continuously reinvesting in Treasury bills; b = regression slope coefficient (defined by the regression equation above); $\sigma(b)$ = standard error of regression coefficient. Standard errors in parentheses use GMM to correct for heteroscedasticity and serial correlation.

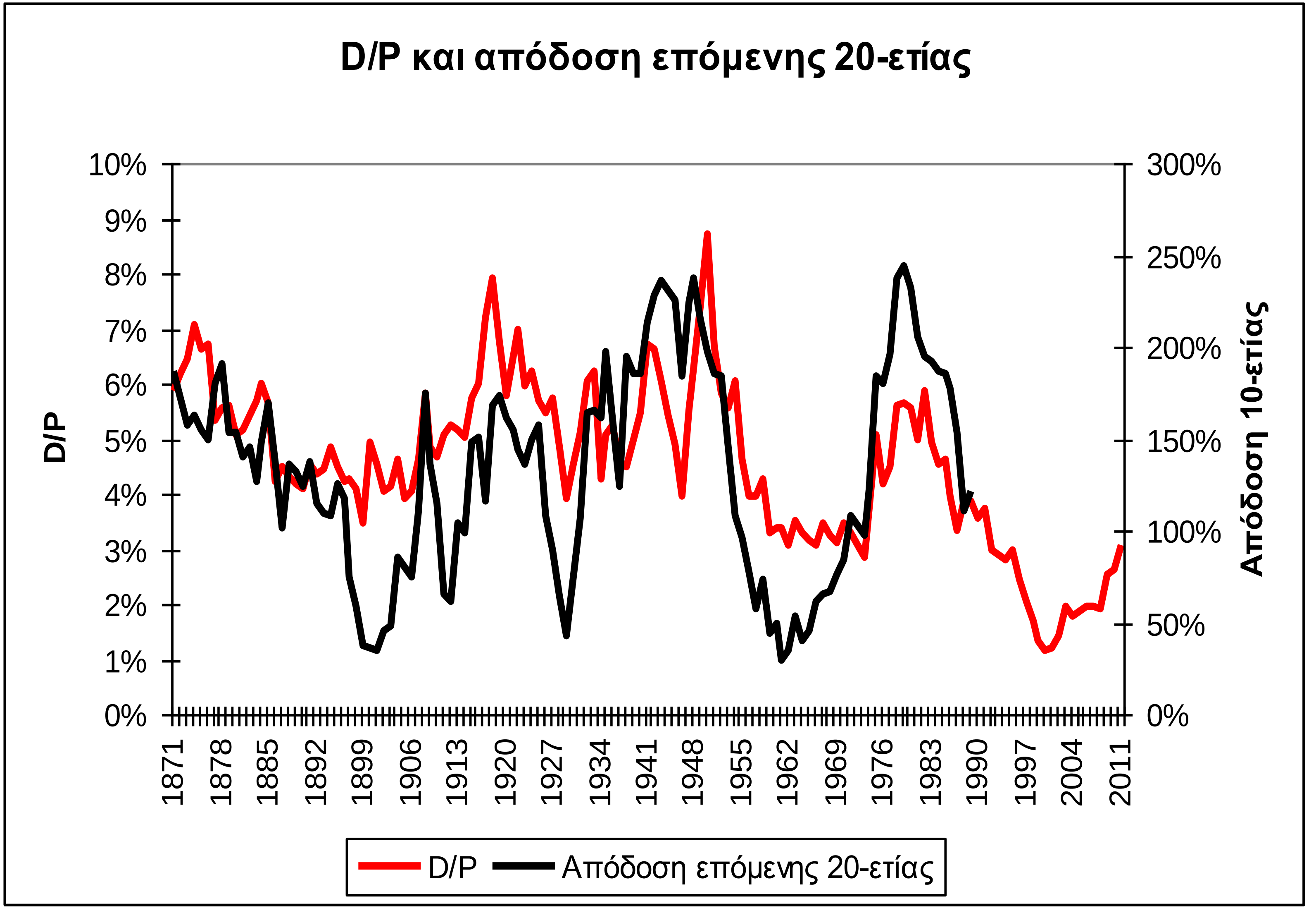
- Τα R^2 της παλινδρόμησης των σωρευτικών αποδόσεων αυξάνουν με τον ορίζοντα και τα b_r είναι αρνητικά (όπως αναμένεται από τη θεωρία) και στατιστικά σημαντικά (καθώς το t-statistic, t=b/σ(b), είναι σε απόλυτη τιμή >2).
- Τα R^2 της παλινδρόμησης των σωρευτικών μεταβολών των μερισμάτων είναι μικρά, δεν αυξάνουν με τον ορίζοντα και τα b_d είναι αρνητικά (αντίθετα από τη θεωρία) και στατιστικά μη σημαντικά.
- Ως αποτέλεσμα, καταλήγουμε στον εξής κανόνα, ο οποίος χρησιμοποιείται από τους αναλυτές: όταν ο λόγος τιμής προς μέρισμα (ή το P/E) είναι μεγαλύτερος από το μακροπρόθεσμο μέσο του, τότε οι τιμές αναμένεται να υποχωρήσουν (και αντίθετα).

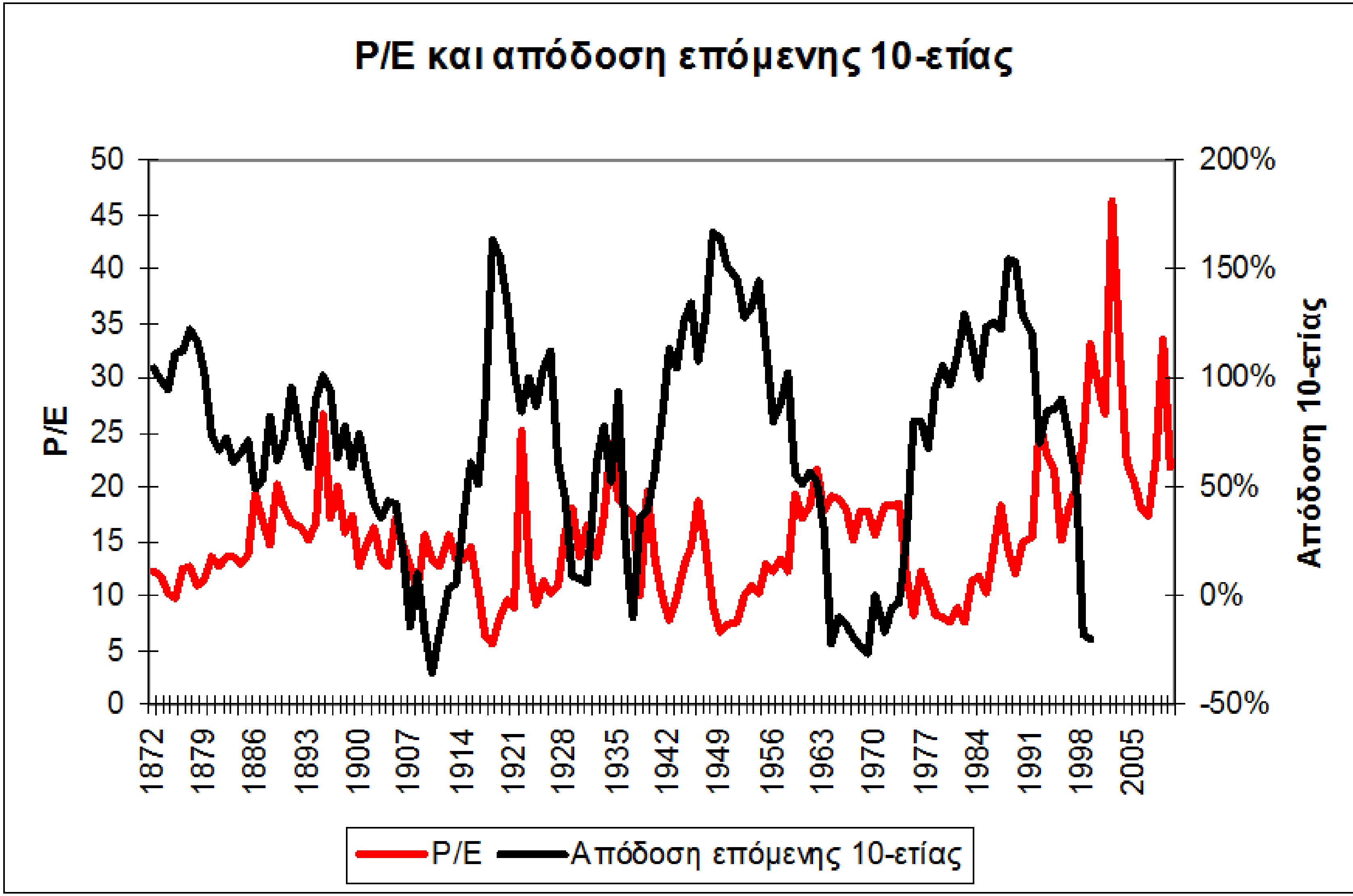
- **Σημείωση:** Οι παραπάνω παλινδρομήσεις παρουσιάζουν σημαντικά στατιστικά προβλήματα καθώς ο λόγος τιμής προς μέρισμα είναι μια μεταβλητή με μεγάλη εμμονή (persistence), ή με άλλα λόγια μια μεταβλητή με χαρακτηριστικά τυχαίου περίπατου. Κατά συνέπεια, οι συντελεστές της παλινδρόμησης δεν ακολουθούν κανονική κατανομή και οι συνήθεις έλεγχοι σημαντικότητας δεν μπορούν να εφαρμοσθούν. Ακόμη χειρότερα, οι συνήθεις εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων δεν είναι αμερόληπτοι σε μικρά δείγματα καθώς οι διαταραχές των αποδόσεων και του d-p έχουν υψηλή συσχέτιση (Stambaugh 1986, 1999). Συγκεκριμένα, παρουσιάζουν θετική μεροληψία, δηλ. είναι υψηλότεροι από τους πραγματικούς. Επιπλέον, η τυπική απόκλιση των συντελεστών της παλινδρόμησης είναι χαμηλότερη από την πραγματική και το αντίθετο συμβαίνει με το R^2. Ως αποτέλεσμα, οι συνήθεις εμπειρικοί έλεγχοι μέσω παλινδρομήσεων συχνά δείχνουν ότι οι αποδόσεις είναι προβλέψιμες χωρίς αυτό να ισχύει.

- Ο Valkanov (2003), Journal of Empirical Finance, μεταξύ άλλων, προτείνει διορθωμένες στατιστικές t για τον έλεγχο σημαντικότητας αυτών των παλινδρομήσεων.

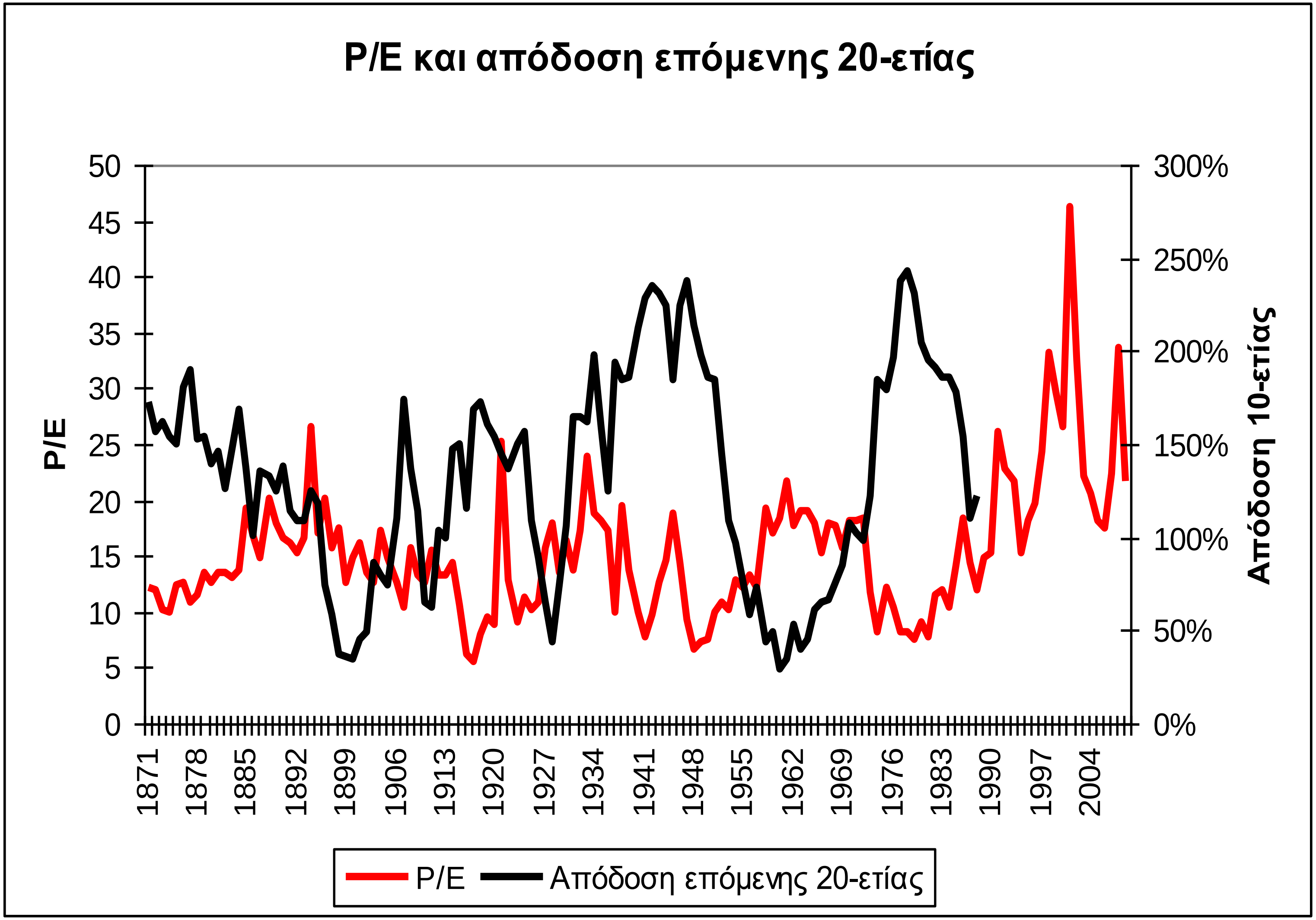
- Διορθώνοντας για τα στατιστικά προβλήματα σε μικρά δείγματα, η προβλεπτική ικανότητα του p-d για τις μελλοντικές αποδόσεις είναι πολύ χαμηλή, τουλάχιστον σε βραχυχρόνιους ορίζοντες 1-5 ετών. Ένα αποτέλεσμα της εμπειρικής βιβλιογραφίας είναι ότι το p-d μπορεί να προβλέψει τις αποδόσεις σε μακροχρόνιους ορίζοντες, 10-20 ετών (Cochrane 2008). Τα παρακάτω διαγράμματα δείχνουν ότι πράγματι υπάρχει κάποια (αν και σχετικά αδύναμη) σχέση μεταξύ του D/P και των αποδόσεων της επόμενης 10-ετίας και 20-ετίας.


D/P και απόδοση επόμενης 10-ετίας
10%
9%
8%
7%
6%
5%
4%
3%
2%
1%
0%
D/P
200%
150%
100%
50%
0%
-50%
Απόδοση 10-ετίας
1871
1878
1885
1892
1899
1906
1913
1920
1927
1934
1941
1948
1955
1962
1969
1976
1983
1990
1997
2004
2011
D/P
Απόδοση επόμενης 10-ετίας


D/P και απόδοση επόμενης 20-ετίας
10%
9%
8%
7%
6%
5%
4%
3%
2%
1%
0%
D/P
300%
250%
200%
150%
100%
50%
0%
Απόδοση 10-ετίας
1871
1878
1885
1892
1899
1906
1913
1920
1927
1934
1941
1948
1955
1962
1969
1976
1983
1990
1997
2004
2011
D/P
Απόδοση επόμενης 20-ετίας

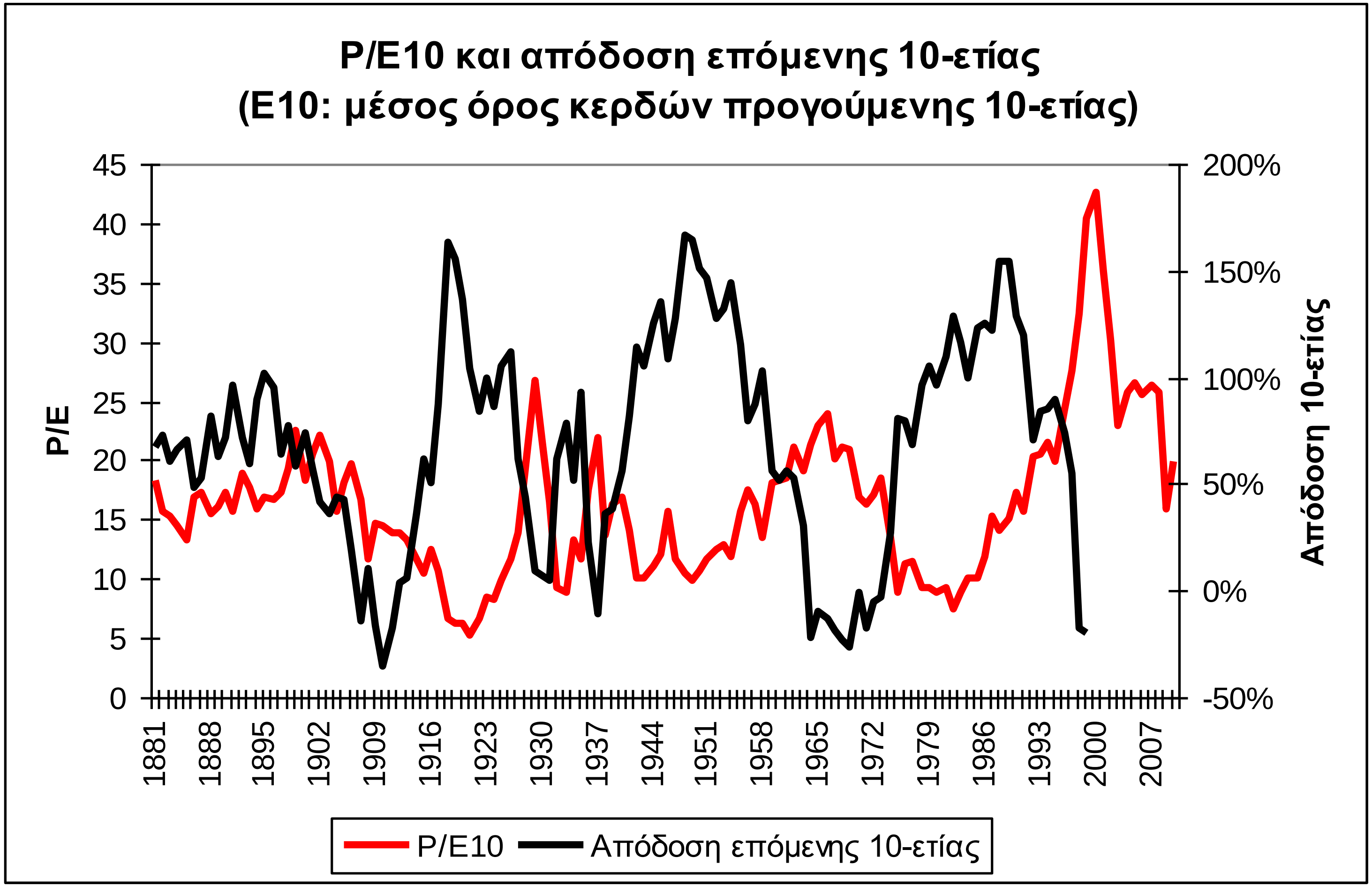


P/E και απόδοση επόμενης 10-ετίας
P/E
Απόδοση 10-ετίας
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
200%
150%
100%
50%
0%
-50%
1872
1879
1886
1893
1900
1907
1914
1921
1928
1935
1942
1949
1956
1963
1970
1977
1984
1991
1998
2005
P/E
Απόδοση επόμενης 10-ετίας



P/E και απόδοση επόμενης 20-ετίας
P/E
Απόδοση 10-ετίας
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
0%
50%
100%
150%
200%
250%
300%
1871
1878
1885
1892
1899
1906
1913
1920
1927
1934
1941
1948
1955
1962
1969
1976
1983
1990
1997
2004
P/E
Απόδοση επόμενης 20-ετίας

Ο Shiller προτείνει τον λόγο τιμής προς τα μέσα κέρδη της προηγούμενης 10-ετίας. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ότι ο δείκτης αυτός έχει καλύτερη προβλεπτική ικανότητα για τις μακροχρόνιες αποδόσεις.



Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της εμπειρικής βιβλιογραφίας, μπορούμε να πούμε ότι

- Η μεταβλητότητα του λόγου τιμής προς μέρισμα οφείλεται κατά κύριο λόγο σε αλλαγές των προσδοκιών της αγοράς για τις μελλοντικές αποδόσεις.
- Ο λόγος τιμής προς μέρισμα (ή το αντίστροφό του) και το P/E έχουν προβλεπτική ικανότητα για τις μακροχρόνιες αποδόσεις, όχι για τις βραχυχρόνιες.

Καθώς οι αναμενόμενες πραγματικές αποδόσεις είναι το άθροισμα του αναμενόμενου πραγματικού επιτοκίου μηδενικού κινδύνου και του ασφάλιστρου κινδύνου, η διακύμανση του λόγου τιμής προς μέρισμα αντανακλά αλλαγές των προσδοκιών της αγοράς είτε για τα επιτόκια (νομισματική πολιτική, πληθωρισμός) είτε για τα ασφάλιστρα κινδύνου.

- Αυτό το ερώτημα έχει μελετηθεί εμπειρικά από μια σειρά αναλυτές [βλέπε, μεταξύ άλλων, Campbell and Ammer (1993), EJ για τις ΗΠΑ, Malliaropulos (1998), European Financial Management για μια σειρά ευρωπαϊκών αγορών]. Τα αποτελέσματα αυτών των μελετών είναι:
- Το μεγαλύτερο μέρος της διακύμανσης του λόγου τιμής προς μέρισμα οφείλεται σε διακύμανση των αναμενόμενων ασφάλιστρων κινδύνου.
- Η διακύμανση των αναμενόμενων ασφάλιστρων κινδύνου οφείλεται σε αλλαγές των προσδοκιών της αγοράς για τα ασφάλιστρα αυτά.

Η σύνδεση των μη αναμενόμενων αλλαγών στις αποδόσεις με τις αλλαγές στις προσδοκίες της αγοράς γίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Αποδόσεις και προσδοκίες της αγοράς

Για να σπάσουμε τις μη αναμενόμενες αποδόσεις σε αλλαγές προσδοκιών της αγοράς για μελλοντικές αποδόσεις και μερίσματα, γράφουμε το υπόδειγμα παρούσας αξίας μια περίοδο πίσω:

$$p_{t-1} - d_{t-1} = const. + E_t \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \left(\Delta d_{t+j} - r_{t+j}\right)$$

Παίρνουμε αλλαγές στις προσδοκίες μεταξύ t και t-1 (innovations):

$$(E_t - E_{t-1})(p_{t-1} - d_{t-1}) = (E_t - E_{t-1}) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \left(\Delta d_{t+j} - r_{t+j}\right)$$

Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι = 0 καθώς $E_t(p_{t-1} - d_{t-1}) = E_{t-1}(p_{t-1} - d_{t-1}) = p_{t-1} - d_{t-1}$. Κατά συνέπεια:

$$0 = (E_t - E_{t-1}) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \left(\Delta d_{t+j} - r_{t+j}\right)$$

Μεταφέροντας τον όρο $(E_t - E_{t-1})r_t$ στην αριστερή πλευρά, παίρνουμε για τις μη αναμενόμενες αποδόσεις:

$$r_t - E_{t-1}(r_t) = (E_t - E_{t-1})\left[\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \Delta d_{t+j}\right] - (E_t - E_{t-1})\left[\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{t+j}\right]$$

Μη αναμενόμενη απόδοση = Νέα πληροφόρηση για μελλοντικά μερίσματα

\- Νέα πληροφόρηση για μελλοντικές αποδόσεις

Ένα θετικό σοκ στις αποδόσεις (δηλαδή μια πραγματοποίηση πάνω από τις προσδοκίες) οφείλεται

- Είτε σε μια αλλαγή προς τα πάνω των αναμενόμενων ρυθμών μεταβολής των μερισμάτων,
- Είτε σε μια αλλαγή προς τα κάτω των αναμενόμενων αποδόσεων,
- Είτε και στα δύο.

Καθώς η πραγματική απόδοση είναι το άθροισμα του αναμενόμενου πραγματικού επιτοκίου μηδενικού κινδύνου και του ασφάλιστρου κινδύνου, μη αναμενόμενες αλλαγές των αποδόσεων μπορούν να σπάσουν σε

- Νέα πληροφόρηση για μελλοντικά επιτόκια μηδενικού κινδύνου και
- Νέα πληροφόρηση για μελλοντικά ασφάλιστρα κινδύνου:

$$(E_t - E_{t-1})\left[\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{t+j}\right] = (E_t - E_{t-1})\left[\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{t+j}^f\right] + (E_t - E_{t-1})\left[\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \, r_{t+j}^e\right]$$

Όπου r_t^f είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και r_t^e είναι το ασφάλιστρο κινδύνου.

- Στο προηγούμενο κεφάλαιο υποστηρίξαμε ότι, σύμφωνα με τα εμπειρικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας, το μεγαλύτερο μέρος της διακύμανσης των τιμών οφείλεται στη διακύμανση των αναμενόμενων αποδόσεων. Τώρα μπορούμε να απαντήσουμε στο πιο συγκεκριμένο ερώτημα αν η διακύμανση των τιμών οφείλεται στη διακύμανση των αναμενόμενων επιτοκίων ή στη διακύμανση των αναμενόμενων ασφάλιστρων κινδύνου.

- Οι Campbell (1991) EJ, Campbell και Ammer (1993), EJ, και Malliaropulos (1998), European Financial Management, μεταξύ άλλων, βρίσκουν ότι το μεγαλύτερο μέρος της διακύμανσης του λόγου τιμής προς μέρισμα οφείλεται σε διακύμανση των αναμενόμενων ασφάλιστρων κινδύνου και όχι σε διακύμανση των μερισμάτων ή σε διακύμανση των πραγματικών επιτοκίων.

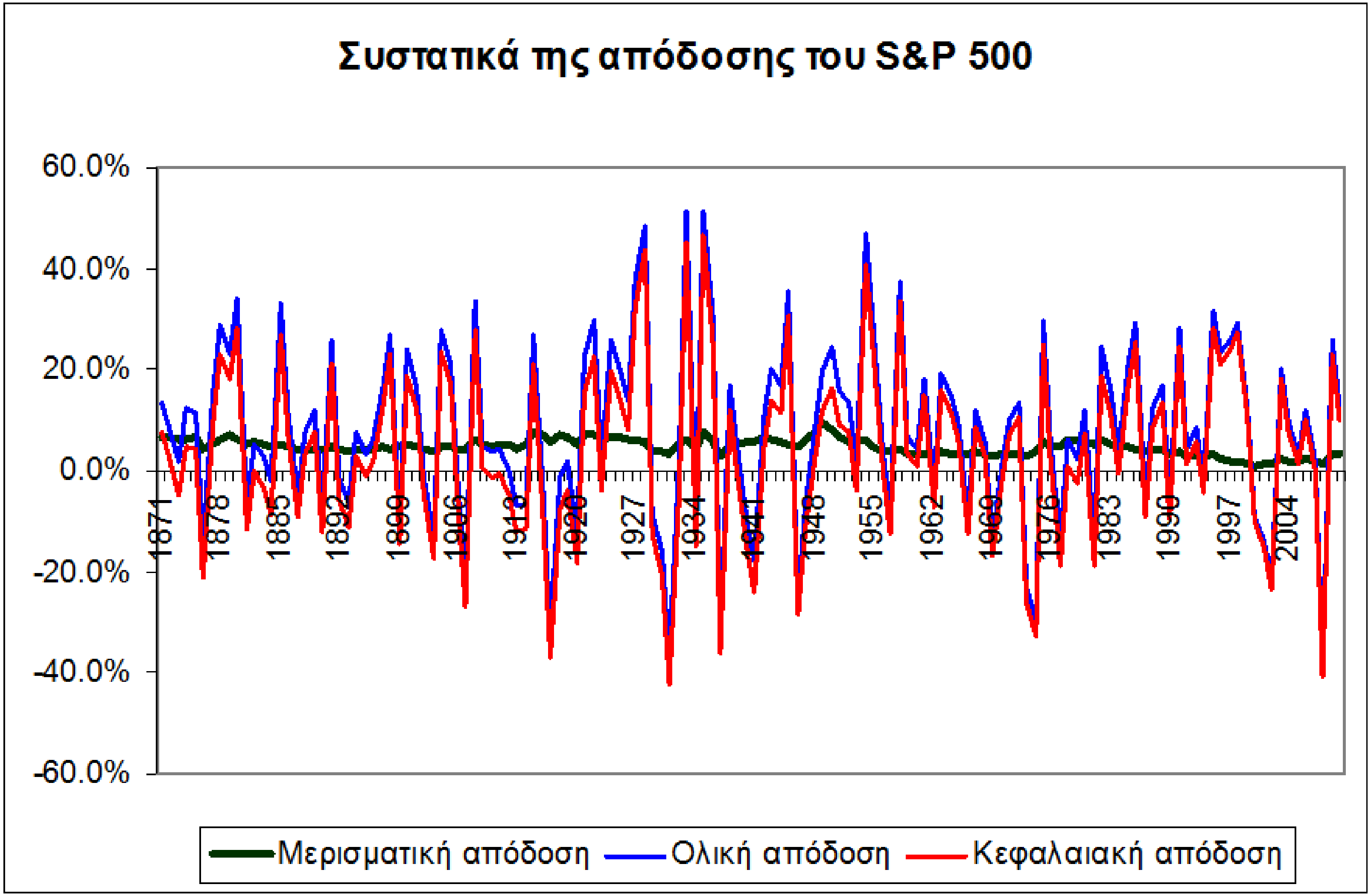
Τιμές, αποδόσεις και μερισματικές αποδόσεις: Μια εναλλακτική ερμηνεία / «τρίτη άποψη»

Νεότερες μελέτες (Malliaropulos & Priestley (2011): Stock prices, returns and dividend yields), επανεξετάζουν την προβλεπτική ικανότητα του λόγου μερίσματος προς τιμή για τις μελλοντικές αποδόσεις χρηματιστηριακών δεικτών και συμπεραίνουν ότι ο λόγος μερίσματος προς τιμή δεν έχει προβλεπτική ικανότητα για τις μελλοντικές τιμές των μετοχών παρά μόνο για τις μερισματικές αποδόσεις. Η ανάλυση στηρίζεται στην παρατήρηση ότι η απόδοση αποτελείται από δυο κομμάτια, την κεφαλαιακή απόδοση (ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της μετοχής) και την μερισματική απόδοση.

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1}+D_{t+1}}{P_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t} + \frac{D_{t+1}}{P_t}$$

1+Απόδοση = (1+κεφαλαιακή απόδοση) + (μερισματική απόδοση)

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει την συνολική απόδοση του S&P 500 και τα συστατικά της. Σε αντίθεση με την κεφαλαιακή απόδοση, η μερισματική απόδοση έχει πολύ χαμηλή μεταβλητότητα.



Συστατικά της απόδοσης του S&P 500
60.0%
40.0%
20.0%
0.0%
-20.0%
-40.0%
-60.0%
1871
1878
1885
1892
1899
1906
1913
1920
1927
1934
1941
1948
1955
1962
1969
1976
1983
1990
1997
2004
Μερισματική απόδοση
Ολική απόδοση
Κεφαλαιακή απόδοση

Γράφοντας την απόδοση ως

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t}\left(1 + \frac{D_{t+1}}{P_{t+1}}\right)$$

και παίρνοντας λογαρίθμους, έχουμε:

$$r_{t-1} = \Delta p_{t+1} + (1-\rho)(d_{t+1} - p_{t+1}) + k$$

Όπου Δp_{t+1} είναι η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής (κεφαλαιακή απόδοση), $(1-\rho)(d_{t+1} - p_{t+1})$ είναι μια προσέγγιση της μερισματικής απόδοσης και ρ και k δυο σταθερές με ρ=1/(1+(D/P))<1 (με D/P την μέση μερισματική απόδοση).

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα στατιστικά χαρακτηριστικά των αποδόσεων. Η μέση μερισματική απόδοση είναι 60% της συνολικής απόδοσης και έχει την χαμηλότερη τυπική απόκλιση. Η μερισματική απόδοση είναι το κομμάτι της απόδοσης με το χαμηλότερο ρίσκο για τους επενδυτές. Κατά συνέπεια, είναι το «πλέον προβλέψιμο» κομμάτι της απόδοσης και έχει αξία για επενδυτές που αποστρέφονται τον κίνδυνο.

Ετήσιες αποδόσεις S&P 500 1926-2004

	Μέσος	*Τυπική απόκλιση*	*Min*	*Max*
Συνολική απόδοση	6.60%	19.80%	-49%	44.50%
Κεφαλαιακή απόδοση	2.60%	20%	-55%	40.60%
Μερισματική απόδοση	4%	1.40%	1.10%	6.90%

- Καθώς μπορούμε να γράψουμε την απόδοση ως

$$r_{t+1} = \Delta p_{t+1} + (1-\rho)(d_{t+1} - p_{t+1}) + k,$$

η μερισματική απόδοση είναι μια γραμμική συνάρτηση του λόγου μερίσματος προς τιμή, $(1-\rho)(d_{t+1} - p_{t+1})$.

- Καθώς ο λόγος μερίσματος προς τιμή έχει υψηλή αυτοσυσχέτιση, έχει προβλεπτική ικανότητα για την μερισματική απόδοση.
  - Για παράδειγμα, αν το d-p ακολουθεί ένα αυτοπαλίνδρομο σχήμα

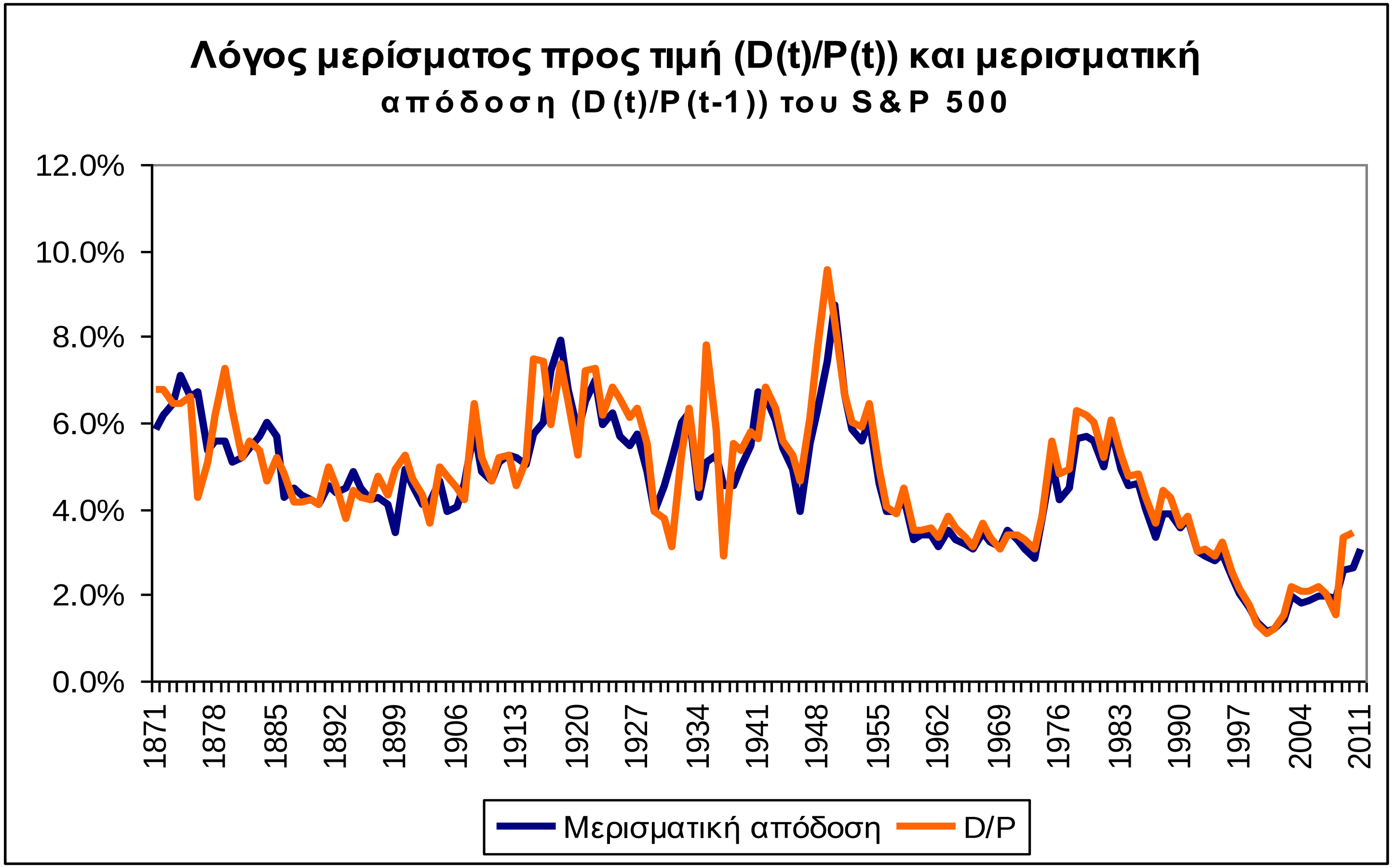
$$d_{t+1} - p_{t+1} = \phi(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1},$$

  τότε $E_t\,(d_{t+1} - p_{t+1}) = \phi(d_t - p_t)$ και η αναμενόμενη απόδοση είναι

$$E_t(r_{t+1}) = E_t(\Delta p_{t+1}) + (1-\rho)\phi(d_t - p_t) + k.$$

- Κατά συνέπεια, μια παλινδρόμηση της συνολικής απόδοσης πάνω σε παρελθούσες τιμές του λόγου μερίσματος προς τιμή (d-p) δείχνει προβλεπτική ικανότητα για τις αποδόσεις ακόμη και αν η μεταβολή της τιμής (κεφαλαιακή απόδοση) είναι μη προβλέψιμη με βάση το d-p, δηλ. $E_t(\Delta p_{t+1}) = 0$, επειδή έχει υψηλή συσχέτιση με την μερισματική απόδοση.

Η στενή συσχέτιση της μερισματικής απόδοσης με το D/P φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Η συσχέτιση είναι υψηλή και φαίνεται να αυξάνεται μετά το 1945. Επιπλέον, οι δυο σειρές έχουν μεγάλη αυτοσυσχέτιση, δηλ. είναι κοντά στη στοχαστική διαδικασία ενός τυχαίου περίπατου. Αυτό σημαίνει ότι παρελθούσες τιμές του D/P έχουν προβλεπτική ικανότητα για την μερισματική απόδοση.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα αποτελέσματα απλών παλινδρομήσεων των πραγματικών (δηλ. αποπληθωρισμένων) αποδόσεων και της μεταβολής των αποπληθωρισμένων μερισμάτων στον λόγο μερίσματος προς τιμή (d-p, σε λογαρίθμους) της προηγούμενης περιόδου.

Table 2: Predictive regressions

Panel A: Not bias corrected

Regression	b	$t-stat.$	R^2	$S.E.$
$r_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.097	1.92	4.0%	0.197
$\Delta d_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.007	0.17	0.0%	0.141
$\Delta p_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.066	1.29	1.8%	0.200
$r_{t+1} - \Delta p_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.030	14.20	77.0%	0.007
$d_{t+1} - p_{t+1} = \varphi\,[d_t - p_t] + \varepsilon^{dp}_{t+1}$	0.941	20.20	86.0%	0.154

Panel B: Bias corrected

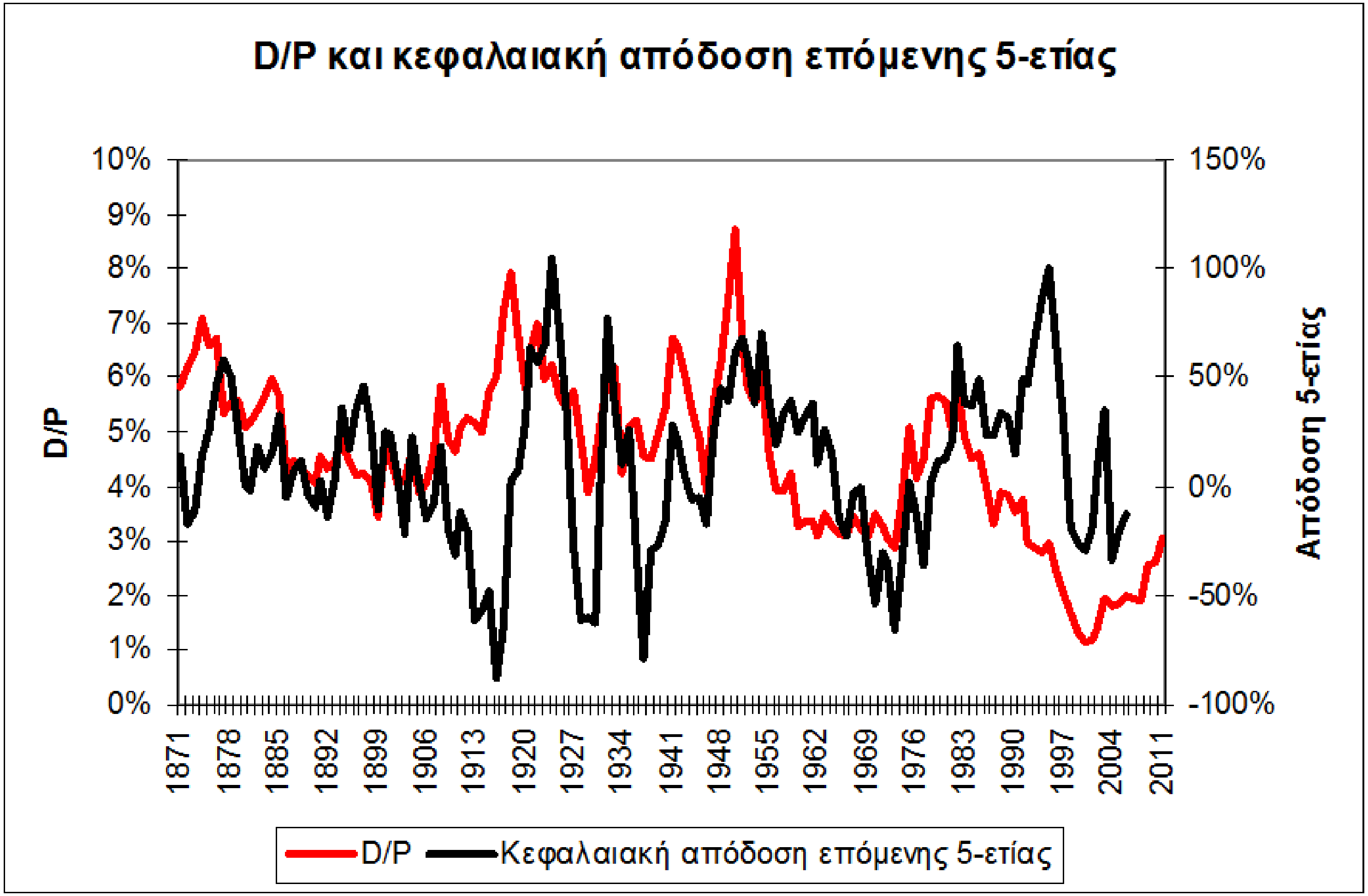
Regression	b	$t-stat.$	$\frac{\widehat{cov}(\varepsilon_{t+1},\varepsilon^{dp}_{t+1})}{\widehat{var}(\varepsilon^{dp}_{t+1})}$
$r_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.053	0.97	−0.89
$\Delta p_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.021	0.37	−0.93
$r_{t+1} - \Delta p_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.032	17.00	0.037
$\Delta d_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.011	0.28	0.068
$d_{t+1} - p_{t+1} = \varphi\,[d_t - p_t] + \varepsilon^{dp}_{t+1}$	0.991	23.00	–

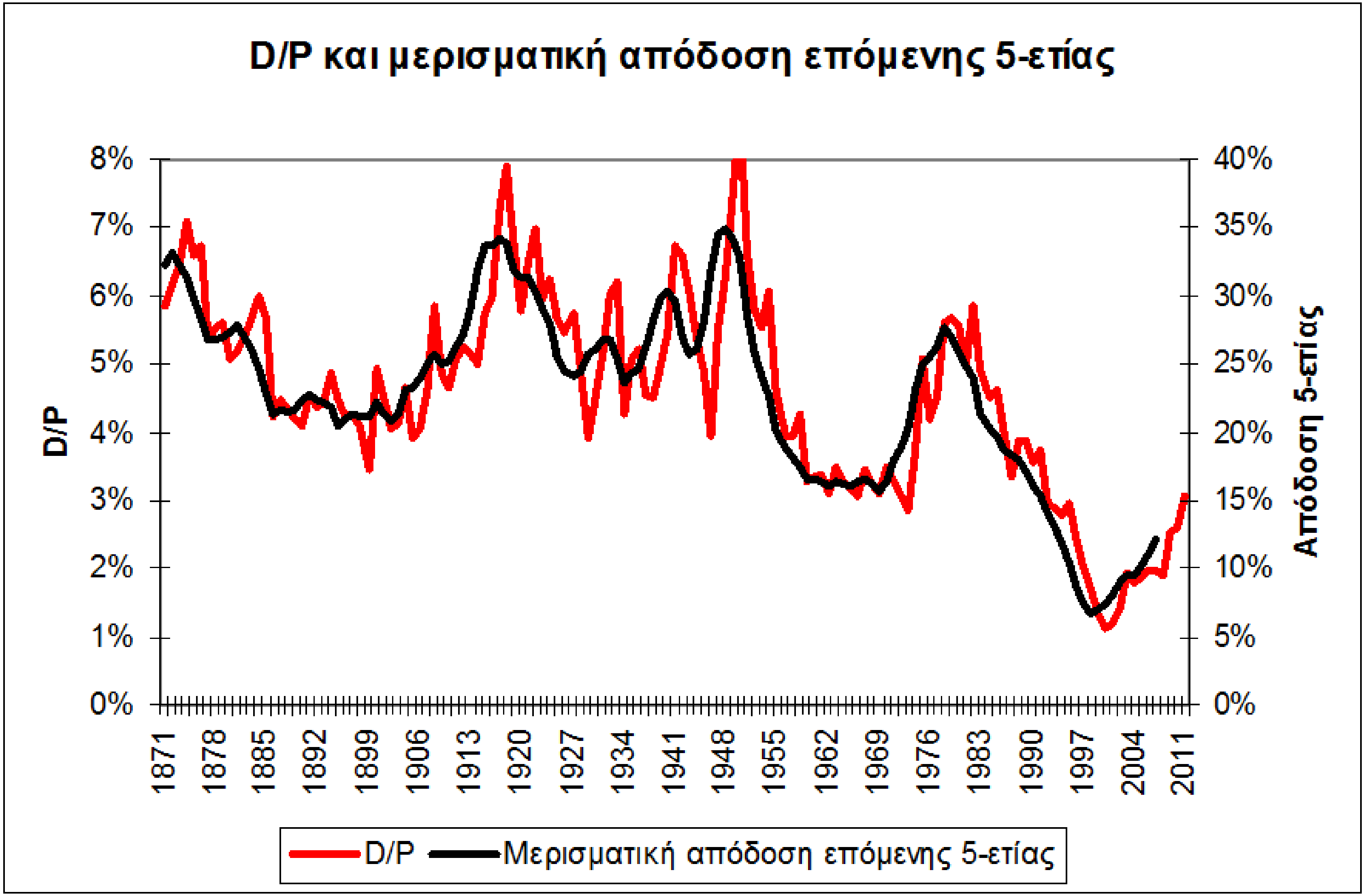
Data are annual observations over the period 1926-2004 from the CRSP data tape. r_{t+1} is the real log return including dividends, Δp_{t+1} is the real log return without dividends (capital gain), $r_{t+1} - \Delta p_{t+1}$ is the dividend yield component of the real return, Δd_{t+1} is real dividend growth and $d_{t+1} - p_{t+1}$ is the log dividend-price ratio.

Συμπεράσματα από τον πίνακα:

- Το d-p φαίνεται να έχει κάποια προβλεπτική ικανότητα για τις συνολικές αποδόσεις (1η σειρά του Panel A). Το d-p δεν έχει προβλεπτική ικανότητα για τη μεταβολή των μερισμάτων (2η σειρά του Panel A). Το d-p δεν έχει προβλεπτική ικανότητα για την κεφαλαιακή απόδοση (3η σειρά του Panel A). Το d-p έχει ισχυρή προβλεπτική ικανότητα για την μερισματική απόδοση (4η σειρά του Panel A).
- Τα αποτελέσματα αυτά είναι ακόμη πιο δυνατά με στατιστικές διορθώσεις για το μικρό μέγεθος του δείγματος (Panel B).
- Με τη χρήση προσομοιώσεων Monte Carlo, η μελέτη Malliaropulos & Priestley (2011) δείχνει ότι η πιθανότητα να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση της μη προβλεψιμότητας των αποδόσεων των μετοχών είναι τόσο ψηλότερη όσο μεγαλύτερη είναι η μέση μερισματική απόδοση και όσο υψηλότερος είναι ο βαθμός εμμονής του λόγου μερίσματος προς τιμή. Με βάση τις εμπειρικές εκτιμήσεις των παραμέτρων αυτών από τα εμπειρικά δεδομένα (μέση μερισματική απόδοση = 4%, βαθμός εμμονής d-p = 0,94 – 0,99), η μελέτη δείχνει ότι κλασσικές προσομοιώσεις Monte Carlo, στις οποίες οι τιμές των μετοχών είναι τυχαίοι περίπατοι, δηλ. μη προβλέψιμες, παράγουν δεδομένα στα οποία οι συντελεστές παλινδρόμησης των αποδόσεων στο λόγο μερίσματος προς τιμή είναι πολύ κοντά στις εκτιμήσεις της βιβλιογραφίας (~ 0,10).
- Κατά συνέπεια, συμπεραίνουμε ότι τα ευρήματα της βιβλιογραφίας σχετικά με την ικανότητα του λόγου μερίσματος προς τιμή να προβλέπει μελλοντικές αποδόσεις δεν αντανακλούν προβλεψιμότητα των τιμών των μετοχών αλλά προβλεψιμότητα των μελλοντικών μερισματικών αποδόσεων.

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ότι ο λόγος μερίσματος προς τιμή είχε στο παρελθόν υψηλή προβλεπτική ικανότητα για τις μερισματικές αποδόσεις των επόμενων 5 ετών αλλά όχι για την μεταβολή των τιμών των μετοχών στα επόμενα 5 έτη. Η ίδια εικόνα ισχύει και για ορίζοντες 2 ετών καθώς επίσης και για μακροχρόνιους ορίζοντες 7-10 ετών.




D/P και μερισματική απόδοση επόμενης 5-ετίας
8%
7%
6%
5%
4%
3%
2%
1%
0%
D/P
40%
35%
30%
25%
20%
15%
10%
5%
0%
Απόδοση 5-ετίας
1871
1878
1885
1892
1899
1906
1913
1920
1927
1934
1941
1948
1955
1962
1969
1976
1983
1990
1997
2004
2011
D/P
Μερισματική απόδοση επόμενης 5-ετίας

- Τα ευρήματα αυτά έχουν σημαντικές συνέπειες για την ερμηνεία του υποδείγματος παρούσας αξίας, τον τρόπο λειτουργίας των αγορών και την αποτίμηση αξιογράφων. Στο υπόδειγμα παρούσας αξίας προκύπτει ένας τρίτος παράγοντας, πέρα από τις προεξοφλημένες μελλοντικές αποδόσεις και τα προεξοφλημένα μερίσματα.
- Συγκεκριμένα, ο λόγος τιμής προς μέρισμα αντανακλά τρεις παράγοντες: 1. Προσδοκίες για μελλοντικά μερίσματα. 2. Προσδοκίες για μελλοντικές κεφαλαιακές αποδόσεις και 3. Προσδοκίες για μελλοντικές μερισματικές αποδόσεις.
- Όσο πιο κοντά είναι ο λόγος τιμής προς μέρισμα σε έναν τυχαίο περίπατο, τόσο μεγαλύτερο ποσοστό της διακύμανσής του οφείλεται σε προσδοκίες για τον ίδιο του τον εαυτό.
- Το ερώτημα που προκύπτει είναι τι μας λέει τελικά ο λόγος D/P για τις προσδοκίες της αγοράς σύμφωνα με το υπόδειγμα παρούσας αξίας. Ας υποθέσουμε ότι η τιμή σήμερα πέφτει και ο λόγος D/P αυξάνει πάνω από τον ιστορικό μέσο του. Ας υποθέσουμε ότι η τιμή αυτή είναι μια τιμή ισορροπίας, δηλ. αντανακλά πλήρως τις προσδοκίες της αγοράς για τις μελλοντικές τιμές, τα μελλοντικά μερίσματα και τις μελλοντικές αποδόσεις. Το σημαντικό ερώτημα είναι, γιατί είναι διατεθειμένοι οι επενδυτές να κρατήσουν το χαρτοφυλάκιο αγοράς στη χαμηλότερη τιμή; Ποιες είναι οι απαντήσεις της χρηματοοικονομικής στο ερώτημα αυτό;

Σύμφωνα με την **κλασσική θεώρηση** (σταθερές αναμενόμενες αποδόσεις), διότι περιμένουν ότι το μέρισμα θα μειωθεί στο μέλλον. Άρα η χαμηλότερη τιμή αντανακλά προσδοκίες για χαμηλότερα μερίσματα. Χαμηλότερα μερίσματα στο μέλλον μειώνουν τις τιμές σήμερα. Στη θεώρηση αυτή, η τιμή είναι τυχαίος περίπατος, δηλ. μη προβλέψιμη. Ενώ τα μερίσματα είναι προβλέψιμα.

Πρόβλημα: Αυτό όμως σημαίνει ότι, με σταθερούς συντελεστές προεξόφλησης, η τιμή ακολουθεί την ίδια στοχαστική διαδικασία με το μέρισμα. Άρα δεν μπορεί να είναι τυχαίος περίπατος.

Σύμφωνα με την **νέα θεώρηση** του Cochrane (προβλέψιμες κυμαινόμενες αποδόσεις), οι επενδυτές κρατούν το χαρτοφυλάκιο αγοράς στη χαμηλότερη τιμή διότι περιμένουν ότι η τιμή θα αυξηθεί στο μέλλον. Η χαμηλότερη τιμή σήμερα αντανακλά προσδοκίες για υψηλότερες αποδόσεις στο μέλλον, άρα υψηλότερες τιμές. Οι επενδυτές προσδοκούν υψηλή κεφαλαιακή απόδοση.

Σύμφωνα με την **εναλλακτική ερμηνεία** των Malliaropulos & Priestley,

- οι επενδυτές κρατούν τις μετοχές στη χαμηλότερη τιμή διότι περιμένουν ότι θα τους δώσουν υψηλές μερισματικές αποδόσεις στο μέλλον, όχι απαραίτητα υψηλές κεφαλαιακές αποδόσεις.
- Στους επενδυτές αρέσουν οι μερισματικές αποδόσεις διότι έχουν χαμηλό ρίσκο: η διακύμανσή τους είναι πολύ χαμηλή σε σχέση με την διακύμανση των κεφαλαιακών αποδόσεων.
- Κατά συνέπεια, όταν οι τιμές πέφτουν σήμερα ενώ τα μερίσματα παραμένουν σχετικά σταθερά, οι επενδυτές προβλέπουν ότι οι μερισματικές αποδόσεις θα παραμείνουν υψηλές στο μέλλον.
- Αυτό κάνει τις μετοχές ελκυστικές και τους επενδυτές διατεθειμένους να τις κρατήσουν στις χαμηλότερες τιμές.
- Ο λόγος μερίσματος προς τιμή δεν προβλέπει ούτε το μέρισμα (όπως θεωρεί η κλασσική άποψη) ούτε την τιμή (όπως θεωρεί η νέα θεώρηση) αλλά κυρίως τον ίδιο του τον εαυτό και, κατά συνέπεια, την μελλοντική μερισματική απόδοση.

Το υπόδειγμα του καταναλωτή και ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης

- Στο βασικό υπόδειγμα καταναλωτή (Consumption Capital Asset Pricing Model, CCAPM), οι τιμές κεφαλαιακών στοιχείων (και κατά συνέπεια οι αποδόσεις) καθορίζονται ως η λύση ενός προβλήματος μεγιστοποίησης της χρησιμότητας του καταναλωτή- επενδυτή.
- Η κεντρική εξίσωση αποτίμησης ορίζει την τιμή ενός κεφαλαιακού στοιχείου ως την αναμενόμενη μελλοντική αξία, με συντελεστή προεξόφλησης την **οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης.**
- Ο καταναλωτής μπορεί να καταναλώσει όλο του το εισόδημα ή να καταναλώσει λίγο λιγότερο, να επενδύσει ένα ποσοστό του εισοδήματος σε ένα κεφαλαιακό στοιχείο και να καταναλώσει το πόσο της επένδυσης συν την απόδοση (payoff) στο μέλλον.
- Η τιμή ισορροπίας ενός κεφαλαιακού στοιχείου καθορίζεται από της εξής συνθήκη: η μείωση της οριακής χρησιμότητας από την αγορά μιας επιπλέον μονάδας κεφαλαιακού στοιχείου πρέπει να είναι ίση με την αναμενόμενη αύξηση προεξοφλημένης χρησιμότητας από την μελλοντική κατανάλωση του payoff.
- Αν η τιμή δεν ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη, τότε ο καταναλωτής πρέπει να συνεχίζει να αγοράζει ή να πουλάει το κεφαλαιακό στοιχείο μέχρι να την ικανοποιήσει.

- Σκοπός του καταναλωτή είναι να εξασφαλίσει ένα σταθερό ποσό κατανάλωσης στο χρόνο, με άλλα λόγια, να μειώσει την διακύμανση της κατανάλωσης (υπόθεση ισόβιου εισοδήματος, permanent income hypothesis).
- Αυτό μπορεί να το πετύχει κρατώντας ένα κεφαλαιακό στοιχείο του οποίου οι αποδόσεις παρουσιάζουν χαμηλή (ιδανικά, αρνητική) συσχέτιση με την κατανάλωση (=εισόδημα ή ΑΕΠ σε όρους της μακροοικονομίας).
- Με τον τρόπο αυτό, ο επενδυτής μπορεί να αυξήσει την κατανάλωση όταν το εισόδημα του πέφτει λόγω μιας μη προβλέψιμης οικονομικής ύφεσης.
- **Ο κεντρικός ρόλος των κεφαλαιακών στοιχείων έγκειται στο ότι, υπό τις παραπάνω συνθήκες, σταθεροποιούν την κατανάλωση διαχρονικά. Με άλλα λόγια, λειτουργούν ως ασφάλεια για περιπτώσεις ανάγκης στις οποίες το εισόδημα μας μειώνεται απρόβλεπτα λόγω εξωγενών παραγόντων.**

- Δεδομένου ότι τα κεφαλαιακά στοιχεία έχουν υψηλές αποδόσεις σε κάποιες φάσεις του οικονομικού κύκλου και χαμηλές αποδόσεις σε κάποιες άλλες, θα θέλαμε να κρατάμε επενδύσεις οι οποίες έχουν υψηλές αποδόσεις όταν το εισόδημα μας (και κατά συνέπεια, η κατανάλωση μας) είναι χαμηλό(ή).
- Για το λόγο αυτό είμαστε διατεθειμένοι να πληρώσουμε μια υψηλότερη τιμή για μια επένδυση της οποίας η αναμενόμενη απόδοση έχει χαμηλότερη ή και αρνητική συσχέτιση με την κατανάλωση (εισόδημα).
- Κατά συνέπεια, **το ασφάλιστρο κινδύνου ενός αξιογράφου πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου καθορίζεται από την συσχέτιση της απόδοσης του αξιογράφου με τον ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης.** Συγκεκριμένα, το ασφάλιστρο κινδύνου είναι θετική συνάρτηση αυτής της συσχέτισης.

Το βασικό υπόδειγμα καταναλωτή με δυο περιόδους

- Ποια είναι η αξία της μελλοντικής πληρωμής, X_{t+1}, ενός τίτλου τον οποίο αγοράζει ο επενδυτής κατά την περίοδο t με σκοπό να τον ρευστοποιήσει την περίοδο t+1;

- Αν, για παράδειγμα, ο τίτλος αυτός είναι μια μετοχή, τότε η πληρωμή (payoff) του τίτλου την επόμενη περίοδο είναι το μέρισμα D_{t+1} συν η τιμή, P_{t+1}, στην οποία ρευστοποιείται η μετοχή:

$$X_{t+1} = P_{t+1} + D_{t+1}$$

- Το X_{t+1} είναι μια τυχαία μεταβλητή, δηλ. υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την μελλοντική αξία του τίτλου.

Το βασικό υπόδειγμα καταναλωτή με δυο περιόδους

- Για να υπολογίσουμε την αξία X_{t+1} ενός τίτλου για τον επενδυτή πρέπει να ορίσουμε το πρόβλημα του επενδυτή.
- Η συνάρτηση χρησιμότητας ενός επενδυτή, U, εξαρτάται από την σημερινή και μελλοντική του κατανάλωση, C:

$$U(C_t, C_{t+1}) = u(C_t) + \beta E_t[u(C_{t+1})]$$

όπου $0 < \beta < 1$ είναι ο υποκειμενικός συντελεστής προεξόφλησης του επενδυτή και $E_t(u)$ είναι η δεσμευμένη μαθηματική ελπίδα του u δεδομένης της πληροφόρησης έως την περίοδο t.

- Η χρησιμότητα $u(.)$ είναι θετική αλλά φθίνουσα συνάρτηση της κατανάλωσης, δηλαδή u'>0, u''<0.
- Η μελλοντική κατανάλωση έχει μικρότερη χρησιμότητα από την σημερινή, για αυτό και προεξοφλείται σε όρους σημερινής χρησιμότητας με συντελεστή β<1.

- Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο επενδυτής :
  - Έχει εξωγενές εισόδημα Y_t and Y_{t+1}
  - Μπορεί να αγοράσει ή να πουλήσει έναν τίτλο στην τιμή P_t ο οποίος του δίνει ένα payoff $X_{t+1} = P_t(1 + r_{t+1}) = P_t R_{t+1}$, όπου R_{t+1} είναι η (ακαθάριστη) απόδοση του τίτλου.

- Τι ποσότητα ξ του τίτλου θα αγοράσει ή (θα πουλήσει);

Το πρόβλημα έχει την εξής μαθηματική δομή:

$$\max_{\xi} U = \left[u(C_t) + \beta E_t[u(C_{t+1})]\right]$$
$$s.t.\ C_t = Y_t - P_t\xi$$
$$C_{t+1} = Y_{t+1} + X_{t+1}\xi$$

Αντικαθιστώντας τους περιορισμούς και θέτοντας την παράγωγο της U ως προς το ξ ίση με το μηδέν, βρίσκουμε τη συνθήκη άριστης κατανάλωσης :

$$P_t u'(C_t) = E_t[\beta u'(C_{t+1}) X_{t+1}] \qquad (1)$$

- $P_t u'(C_t)$: οριακή μείωση χρησιμότητας από την αγορά μιας επιπλέον μονάδας τίτλων.

- $E_t[\beta u'(C_{t+1}) X_{t+1}]$: οριακή αύξηση (αναμενόμενης, προεξοφλημένης) χρησιμότητας από το payoff του τίτλου.

Η σχέση (1) μπορεί να γραφτεί ως :

$$P_t = E_t\left[\beta \frac{u\prime(C_{t+1})}{u\prime(C_t)} X_{t+1}\right] \qquad (2)$$

- Η σχέση (2) είναι η <u>κεντρική φόρμουλα αποτίμησης</u>.
- Δεδομένου του payoff, του συντελεστή προεξόφλησης και της οριακής χρησιμότητας, η σχέση (2) καθορίζει την τιμή την οποία ο επενδυτής είναι διατεθειμένος να πληρώσει για τον τίτλο.

Οριακός λόγος υποκατάστασης και στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης

Ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης (stochastic discount factor, SDF) μπορεί να οριστεί ως εξής :

$$M_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} \qquad (3)$$

Σύμφωνα με την (3), στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης είναι ίσος με τον οριακό λόγο υποκατάστασης μεταξύ παρούσας και μελλοντικής κατανάλωσης.

Η κεντρική φόρμουλα αποτίμησης μπορεί να γραφτεί:

$$P_t = E_t(M_{t+1}X_{t+1}) \qquad (4)$$

Οριακός λόγος υποκατάστασης και στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης

Σημείωση 1: Ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης SDF είναι μια σταθερά όταν η χρησιμότητα είναι γραμμική συνάρτηση της κατανάλωσης γιατί τότε η οριακή χρησιμότητα είναι σταθερή.

Για παράδειγμα, εάν $u_t = a + bC_t$, τότε $u'(C_t) = u'(C_{t+1}) = b$ και $M_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \beta \frac{b}{b} = \beta$.

Κατά συνέπεια, στην περίπτωση αυτή, το υπόδειγμα του καταναλωτή περιορίζεται στο γνωστό υπόδειγμα παρούσας αξίας με σταθερό συντελεστή προεξόφλησης, $P_t = \beta E_t(X_{t+1})$.

Για να ορίσουμε την P_t πιο συγκεκριμένα, πρέπει να συγκεκριμενοποιήσουμε την συνάρτηση χρησιμότητας.

Συχνά χρησιμοποιούμε **εκθετική χρησιμότητα (power utility):**

$$u(C_t) = \frac{1}{(1-\gamma)} C_t^{(1-\gamma)} \qquad (5)$$

με γ τον σταθερό συντελεστή σχετικής αποστροφής κινδύνου του καταναλωτή-επενδυτή (CRRA: constant relative risk aversion).

Παίρνοντας την παράγωγο της (5), η οριακή χρησιμότητα είναι

$u'(C_t) = C_t^{-\gamma}$. Επομένως, $\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}$ και από την (3) έχουμε:

$$M_{t+1} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}$$

- **Σημείωση:** Το γ στην εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας είναι το αντίστροφο του MRS, δηλ. του οριακού λόγου υποκατάστασης κατανάλωσης μεταξύ δυο σημείων στον χρόνο (π.χ. t και t+1). Σε άλλες συναρτήσεις χρησιμότητας αυτό δεν ισχύει.
- Στην παραπάνω εξίσωση, αυτό σημαίνει ότι, με υψηλό γ, η μεταβολή της οριακής χρησιμότητας, M_{t+1}, είναι μικρή, δεδομένης μιας μεταβολής της κατανάλωσης μεταξύ t και t+1.
- Αυτό όμως σημαίνει ότι ο καταναλωτής έχει χαμηλή διάθεση να μεταφέρει κατανάλωση διαχρονικά (να αποταμιεύσει σήμερα όταν η κατανάλωση προβλέπεται να μειωθεί στο μέλλον ή να δανειστεί σήμερα όταν η κατανάλωση προβλέπεται να αυξηθεί στο μέλλον).

Σημείωση 2: Διαιρώντας την (4), $P_t = E_t(M_{t+1}X_{t+1})$, με την τιμή P_t και ορίζοντας την απόδοση του τίτλου ως:

$$R_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{P_t},$$

η κεντρική φόρμουλα αποτίμησης μπορεί να γραφτεί σε όρους αποδόσεων αντί τιμών:

$$1 = E_t(M_{t+1}R_{t+1}) \qquad (6)$$

- Σύμφωνα με την (6), η παρούσα αξία ενός ευρώ που επενδύουμε σήμερα σε ένα αξιόγραφο ισούται με την αναμενόμενη απόδοση του προεξοφλημένη με τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης M_{t+1}.

- Με άλλα λόγια, όταν ο καταναλωτής έχει κάνει τις επενδυτικές του επιλογές και βρίσκεται σε ισορροπία, η αξία ενός ευρώ που καταναλώνεται σήμερα (=1 EUR) πρέπει να είναι ίση με την αξία ενός ευρώ που αποταμιεύεται και καταναλώνεται στο μέλλον.

- Αν η χρησιμότητα είναι γραμμική συνάρτηση της κατανάλωσης, τότε, όπως δείξαμε στη **Σημείωση 1,** $M = \beta$, και η (6) γίνεται $\beta = \frac{1}{E_t(R_{t+1})} = \frac{1}{R}$, η οποία είναι ο γνωστός ορισμός του σταθερού συντελεστή προεξόφλησης. Στην περίπτωση αυτή, η αναμενόμενη απόδοση του τίτλου είναι σταθερή.

Το υπόδειγμα καταναλωτή με δεδομένο αρχικό πλούτο

Στο προηγούμενο υπόδειγμα υποθέσαμε ότι ο καταναλωτής έχει ένα εξωγενές εισόδημα το οποίο κατανέμει μεταξύ κατανάλωσης και αποταμίευσης με σκοπό την μεγιστοποίηση της χρησιμότητάς του.

Εναλλακτικά μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο επενδυτής γεννιέται με πλούτο W_0 και δεν έχει εισόδημα από εργασία.

Κατά συνέπεια, καταναλώνει στη διάρκεια της ζωής του τον πλούτο που έχει κληρονομήσει.

Ο επενδυτής καταναλώνει τη περίοδο t ένα ποσό C_t του πλούτου του και επενδύει τον εναπομένοντα πλούτο σε ένα αξιόγραφο (το χαρτοφυλάκιο πλούτου).

Κατά συνέπεια, ο πλούτος τη περίοδο t+1 είναι:

$W_{t+1} = R_{t+1}^{w}(W_t - C_t)$,

όπου R_{t+1}^{w} είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου.

Υποθέτουμε ότι ο επενδυτής μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα του σε 2 περιόδους με τον διαχρονικό περιορισμό του πλούτου:

$$\max_{C_t,\, C_{t+1}} \; U(C) = u(C_t) + \beta E_t u(C_{t+1})$$
$$s.t.: W_{t+1} = R_{t+1}^{w}(W_t - C_t)$$

Την τελευταία περίοδο, ο καταναλωτής καταναλώνει το υπόλοιπο του πλούτου του, $C_{t+1} = W_{t+1}$.

Αντικαθιστώντας τον περιορισμό του πλούτου στην συνάρτηση χρησιμότητας, μετατρέπουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης σε

$$\max_{C_t} U = \max_{C_t}\left\{u(C_t) + \beta E_t\left[u\left(R_{t+1}^{w}(W_t - C_t)\right)\right]\right\}$$

Το πρόβλημα: $\max_{C_t} U = \max_{C_t}\left\{u(C_t) + \beta E_t\left[u\left(R_{t+1}^{w}(W_t - C_t)\right)\right]\right\}$

Η συνθήκη πρώτης τάξης του προβλήματος αυτού είναι:

$$-u'(C_t) + \beta E_t(u'(C_{t+1})R_{t+1}^{w}) = 0.$$

Διασκευάζοντας την τελευταία εξίσωση, παίρνουμε για το χαρτοφυλάκιο πλούτου:

$$E_t\left(\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} R_{t+1}^{w}\right) = 1.$$

Η εξίσωση αυτή πρέπει να ισχύει για κάθε αξιόγραφο i. Κατά συνέπεια:

$$E_t\left(\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} R_{t+1}^{i}\right) = 1.$$

Επίσης, η συνθήκη αυτή πρέπει να ισχύει για όλα τα αξιόγραφα. Έτσι, για ένα σετ Κ αξιόγραφων με (Κ x 1) διάνυσμα αποδόσεων $\boldsymbol{R_{t+1}}$:

$$E_t\left(\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} \boldsymbol{R_{t+1}}\right) = \boldsymbol{i_k}$$

όπου $\boldsymbol{i_k}$ το (Κ x 1) μοναδιαίο διάνυσμα.

Το Υπόδειγμα παρούσας αξίας με στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης

Για να συνδέσουμε τη φόρμουλα αυτή με το υπόδειγμα παρούσας αξίας του προηγούμενου κεφαλαίου, αρκεί να θυμηθούμε τον ορισμό του payoff ως:

$$X_{t+1} = P_{t+1} + D_{t+1}.$$

Αντικαθιστώντας στη (2), έχουμε μια διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς το P:

$$P_t = E_t[M_{t+1}(P_{t+1} + D_{t+1})]$$

όπου $M_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}$ ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης.

Το Υπόδειγμα παρούσας αξίας με στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης

Λύνοντας την εξίσωση προς τα εμπρός έχουμε:

$$P_t = \sum_{j=1}^{\infty} E_t\left(M_{t+j} D_{t+j}\right) + \lim_{T \to \infty}\left(E_t(M_{t+T} P_{t+T})\right)$$

η οποία είναι το γνωστό υπόδειγμα παρούσας αξίας. Ο συντελεστής προεξόφλησης μελλοντικών μερισμάτων είναι στοχαστικός και εξαρτάται από την αλλαγή της οριακής χρησιμότητας του καταναλωτή.

Ο συντελεστής προεξόφλησης δίνεται ως $M_{t+j} = \beta^j \frac{u'\left(C_{t+j}\right)}{u'(C_t)}$, δηλ. ως την αθροιστική μεταβολή της χρησιμότητας μεταξύ t και t+j, προεξοφλημένης με β^j. Αν η χρησιμότητα είναι εκθετική, τότε $M_{t+j} = \beta^j \left(\frac{C_{t+j}}{C_t}\right)^{-\gamma}$.

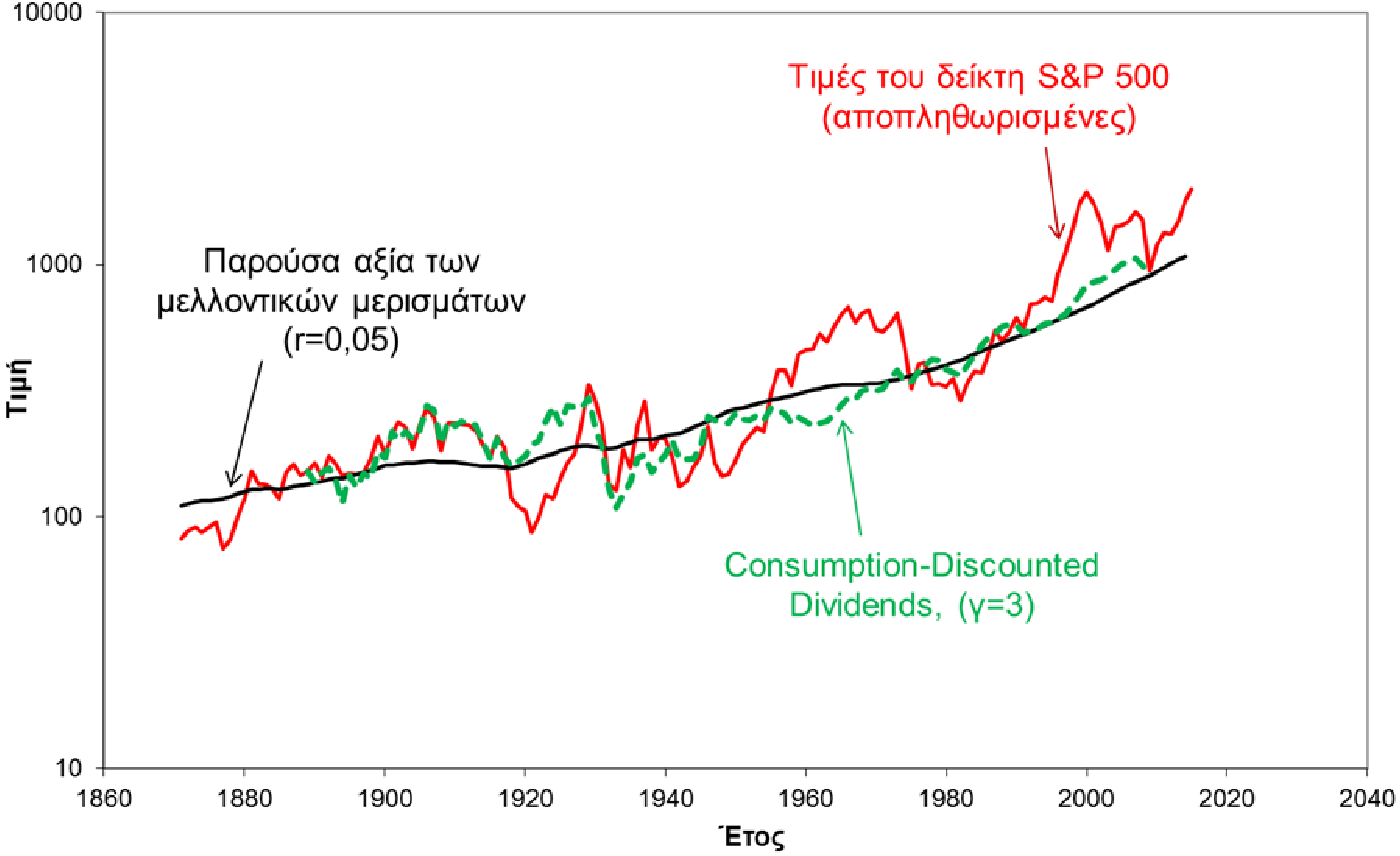
Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει την παρούσα αξία του χρηματιστηριακού δείκτη των ΗΠΑ από το 1889 έως το 2009 σύμφωνα με το υπόδειγμα του καταναλωτή με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας και γ=3, δηλ. $M_{t+1} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-3}$ (πράσινη διακεκομμένη γραμμή) και την συγκρίνει με την παρούσα αξία του κλασσικού υποδείγματος μελλοντικών μερισμάτων με σταθερό συντελεστή προεξόφλησης (μαύρη γραμμή).

Σημείωση: Η παρούσα αξία του δείκτη εκτιμάται για κάθε σημείο στο χρόνο (t=1889-2008) ως:

$$P_t^* = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-3} (D_{t+1} + P_{t+1})$$

Η τελική τιμή (το 2009) εκτιμάται σύμφωνα με το υπόδειγμα Gordon ως D(2009)*(1+g)/(r-g), όπου g ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής των μερισμάτων και r η αναμενόμενη απόδοση.

Ως μελλοντικό μέσο ρυθμό μεταβολής των μερισμάτων (g) και μέση αναμενόμενη πραγματική απόδοση του S&P 500 μετά το 2009 (r) υποθέσαμε g=0.014 (δειγματικός μέσος 1870-2008) και r=0.05 (όπως και στη μαύρη γραμμή).


Τιμές του δείκτη S&P 500
(αποπληθωρισμένες)
Παρούσα αξία των
μελλοντικών μερισμάτων
(r=0,05)
Consumption-Discounted
Dividends, (γ=3)
10000
1000
100
10
Τιμή
1860
1880
1900
1920
1940
1960
1980
2000
2020
2040
Έτος

Μαθηματικά εργαλεία

Για το υπόλοιπο της ύλης θα χρειαστούμε τέσσερις κανόνες.

Κανόνας 1

Αν Μ, Χ τυχαίες μεταβλητές, τότε $\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{MX}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$

Κανόνας 2

Αν το Χ ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή,

δηλ. ln(X) = $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{N}\left(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\sigma_x^2}\right)$τότε ln(E(X)) = $\overline{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\sigma_x^2}$**.**

Μαθηματικά εργαλεία

Κανόνας 3

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X, M ακολουθούν από κοινού την λογαριθμοκανονική κατανομή, τότε

$$\ln(E(MX)) = \bar{\boldsymbol{m}} + \bar{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{var}(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x})$$

$$= \bar{\boldsymbol{m}} + \bar{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{m}}^{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{x}}^{2} + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{mx}},$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{mx}}$ η συνδιακύμανση μεταξύ των m, x.

Κανόνας 4 (Λήμμα του Stein)

Αν X, M τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν από κοινού κανονική κατανομή και M=f(Y), η συνάρτηση f είναι παραγωγήσιμη και |E(f')|<∞, τότε Cov(X,M) = E(f')Cov(X,Y).

Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου

Πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κεντρική φόρμουλα αποτίμησης (4) για να καθορίσουμε την απόδοση ενός τίτλου μηδενικού κινδύνου;

- Ας υποθέσουμε ότι ο τίτλος κοστίζει 1 ευρώ και υπόσχεται ένα σίγουρο payoff $X_{t+1} = R_t^f = 1 + r_t^f$ στο $t+1$, όπου r_t^f είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

○ Μηδενικού κινδύνου επειδή είναι γνωστό στην περίοδο t, κατά συνέπεια δεν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την απόδοση του τίτλου.

- Τότε, από την $P_t = E_t(M_{t+1}X_{t+1})$ προκύπτει :

$$1 = E\left(M_{t+1}R_t^f\right) = E(M_{t+1})R_t^f \Rightarrow$$

$$R_t^f = \frac{1}{E_t(M_{t+1})} \qquad (7)$$

Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι αντιστρόφως ανάλογο του δεσμευμένου μέσου SDF (δηλ. της αναμενόμενης τιμής του, δεδομένης της πληροφόρησης στο t).

Δυο περιπτώσεις:

1. **Η κατανάλωση δεν είναι τυχαία μεταβλητή** και κατά συνέπεια οι επενδυτές γνωρίζουν με βεβαιότητα τη μελλοντική τους κατανάλωση, $E_t(C_{t+1}) = C_{t+1}$.

- Χρησιμοποιώντας εκθετική χρησιμότητα, $M_{\tau+1} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}$, και αντικαθιστώντας στην (7) το M_{t+1}, έχουμε:

$$R_t^f = \frac{1}{\beta} E_t \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\gamma} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\gamma} \qquad (7')$$

- Ορίζοντας $\Delta C_{t+1} = \ln(C_{t+1}/C_t)$ και $r_t^f = \ln R_t^f$ και παίρνοντας λογάριθμους της (7') :

$$r_t^f = -\ln(\beta) + \gamma \Delta c_{t+1} \qquad (7'')$$

$$r_t^f = -\ln(\beta) + \gamma \Delta c_{t+1} \qquad (7'')$$

- Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι υψηλό όταν οι καταναλωτές-επενδυτές είναι ανυπόμονοι, δηλ. το β είναι χαμηλό.
- Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι υψηλό όταν ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης είναι υψηλός.
- Με δεδομένο τον αναμενόμενο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης, το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου αυξάνεται όσο αυξάνεται η αποστροφή στον κίνδυνο, γ.
- Γιατί τα επιτόκια είναι θετική συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής της κατανάλωσης; Όταν η κατανάλωση αναμένεται να αυξηθεί στο μέλλον, οι καταναλωτές προτιμούν να καταναλώσουν ένα μέρος σήμερα (διαχρονική υποκατάσταση). Κατά συνέπεια, θα μειωθεί η αποταμίευση και θα αυξηθεί το επιτόκιο.

2. Η κατανάλωση είναι τυχαία μεταβλητή, άρα υπάρχει αβεβαιότητα όσον αφορά την μελλοντική κατανάλωση.

Για να λύσουμε ως προς το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης ακολουθεί μια λογαριθμική κανονική κατανομή.

- Τότε, παίρνοντας λογάριθμους της $R_t^f = \frac{1}{E_t\left(\beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\right)}$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα 2, μπορούμε να γράψουμε για τον παρονομαστή:

$$\ln\left(\beta E_t\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\right) = ln(\beta) - \gamma E_t \Delta c_{t+1} + \frac{(-\gamma)^2}{2}\sigma_{\Delta c,t}^2$$

Άρα η εξίσωση γίνεται σε λογαρίθμους:

$$r_t^f = -\ln\beta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \frac{\gamma^2}{2}\sigma_{\Delta c,t}^2 \qquad (8)$$

όπου $E_t \Delta c_{t+1}$ είναι ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης και $\sigma_{\Delta c,t}^2$ η αναμενόμενη διακύμανση της κατανάλωσης, δεδομένης της πληροφόρησης την περίοδο t.

- Η σχέση (8) διαφέρει από την σχέση (7΄΄) ως προς τον όρο $-\frac{\gamma^2}{2}\sigma_{\Delta c,t}^2$. Ο όρος αυτός περιγράφει την επίδραση της αβεβαιότητας στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.
- Όταν η διακύμανση της κατανάλωσης και (κατά συνέπεια η αβεβαιότητα) αυξάνεται, οι καταναλωτές αυξάνουν τις αποταμιεύσεις τους για να αντιμετωπίσουν περιόδους χαμηλού εισοδήματος (“saving for a rainy day”). Κατά συνέπεια, το επιτόκιο μειώνεται λόγω αύξησης της προσφοράς πόρων.

Διόρθωση τιμολόγησης για κίνδυνο

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνδιακύμανσης :

$$cov(M,X) = E(MX) - E(M)E(X) \qquad (9)$$

μπορούμε να γράψουμε την κεντρική φόρμουλα αποτίμησης (2):

$$P_t = E_t[M_{t+1}X_{t+1}]$$

ως

$$P_t = E_t(M_{t+1})E_t(X_{t+1}) + cov_t(M_{t+1}, X_{t+1})$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου $R^f_{t+1} = \frac{1}{E_t(M_{t+1})}$, έχουμε:

$$P_t = \frac{E_t(X_{t+1})}{R^f_t} + cov_t(M_{t+1}, X_{t+1}) \qquad (10)$$

$$P_t = \frac{E_t(X_{t+1})}{R_t^f} + cov_t(M_{t+1}, X_{t+1}) \qquad (10)$$

- Ο πρώτος όρος της (10) είναι η συνήθης φόρμουλα προεξόφλησης.

Μας δίνει τη τιμή του τίτλου σε ένα κόσμο χωρίς κίνδυνο (π.χ. όταν η χρησιμότητα είναι γραμμική συνάρτηση της κατανάλωσης, ή η κατανάλωση είναι σταθερή και η χρησιμότητα μη γραμμική και κατά συνέπεια οι επενδυτές είναι ουδέτεροι στον κίνδυνο).

- Ο δεύτερος όρος της (10) είναι η διόρθωση της τιμής για την ύπαρξη

κινδύνου. Ένας τίτλος, του οποίου το payoff παρουσιάζει θετική συνδιακύμανση με τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης, έχει υψηλότερη τιμή από έναν τίτλο του οποίου το payoff παρουσιάζει αρνητική συνδιακύμανση με τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης.

- Για να γίνει αντιληπτή η οικονομική σημασία της διόρθωσης κινδύνου, πρέπει να θυμηθούμε τι αντιπροσωπεύει ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης (SDF). Από τον ορισμό του SDF όταν η συνάρτηση χρησιμότητας είναι εκθετική: $M_{t+1}= \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}$ και από την (10), προκύπτει:

$$P_t = \frac{E(X_{t+1})}{R_t^f} + cov\left(\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}, X_{t+1}\right) \qquad (11)$$

- Η οριακή χρησιμότητα μειώνεται όταν αυξάνεται η κατανάλωση. Για τον λόγο αυτό, η τιμή ενός τίτλου εξαρτάται αρνητικά από την συσχέτιση του payoff με τον ρυθμό ανόδου της κατανάλωσης.

- Ο λόγος είναι ότι οι καταναλωτές επιθυμούν να μειώσουν τη διακύμανση της κατανάλωσης διαχρονικά.

- Ένας τίτλος του οποίου το payoff συσχετίζεται θετικά με τον ρυθμό ανόδου της κατανάλωσης, αυξάνει το εισόδημά του καταναλωτή όταν αυτό είναι ήδη υψηλό και το μειώνει όταν αυτό είναι ήδη χαμηλό. Αυτό δεν του εξασφαλίζει σταθερότητα της κατανάλωσης διαχρονικά. Κατά συνέπεια ο καταναλωτής είναι διατεθειμένος να αγοράσει τον τίτλο μόνο σε μία χαμηλή τιμή.

- Αντίθετα, ο καταναλωτής είναι διατεθειμένος να αγοράσει έναν τίτλο με χαμηλή συσχέτιση με την κατανάλωση σε μια υψηλότερη τιμή. Ειδικά, αν η συσχέτιση της πληρωμής του τίτλου με την κατανάλωση είναι αρνητική, τότε το εισόδημα από αυτόν τον τίτλο μειώνει την διακύμανση της κατανάλωσης.

- Ένα παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο καθορίζονται οι τιμές ισορροπίας των αξιογράφων στο υπόδειγμα του καταναλωτή είναι η ασφάλιση.
- Η ασφάλεια αποζημιώνει ακριβώς όταν την έχουμε ανάγκη, π.χ. όταν καεί το σπίτι μας. Για το λόγο αυτό πληρώνουμε ευχαρίστως τα ασφάλιστρα, παρότι η στατιστική πιθανότητα να καεί το σπίτι μας μπορεί να είναι μικρή, και η τιμή της ασφάλισης για το μέσο ασφαλιζόμενο είναι υψηλότερη από την αναμενόμενη αποζημίωση προεξοφλημένη με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Το ασφάλιστρο κινδύνου Ι

Αξιόγραφα με υψηλότερο κίνδυνο πρέπει να έχουν υψηλότερες αναμενόμενες αποδόσεις. Το ασφάλιστρο κινδύνου ορίζεται ως η υπερβάλλουσα αναμενόμενη απόδοση πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση της κεντρικής φόρμουλας αποτίμησης σε όρους αποδόσεων, έχουμε

$$1 = E_t(M_{t+1}R_{t+1}) \qquad (6)$$

όπου $R_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{P_t}$ είναι η ακαθάριστη απόδοση ενός τίτλου, R=1+r (η καθαρή απόδοση είναι το r).

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνδιακύμανσης, $cov(M_{t+1}, R_{t+1}) = E(M_{t+1}R_{t+1}) - E(M_{t+1})E(R_{t+1})$, μπορούμε να γράψουμε την (6) ως :

$$1 = E(M_{t+1})E(R_{t+1}) + cov(M_{t+1}, R_{t+1}) \qquad (12)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου , $R_t^f = \frac{1}{E(M_{t+1})}$, έχουμε:

$$E(R_{t+1}) - R_t^f = -R_t^f cov(M_{t+1}, R_{t+1}) \qquad (13)$$

ή

$$E(R_{t+1}) - R_t^f = -R_t^f \beta cov\left(\frac{u\prime(C_{t+1})}{u\prime(C_t)}, R_{t+1}\right) \qquad (14)$$

- Η απόδοση ενός τίτλου είναι ίση με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου συν ένα ασφάλιστρο κινδύνου, το οποίο εξαρτάται από την συνδιακύμανση μεταξύ της απόδοσης του τίτλου και του λόγου υποκατάστασης παρούσας με μελλοντική κατανάλωση.

Αν υποθέσουμε μια συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας, π.χ. εκθετική χρησιμότητα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την οριακή χρησιμότητα με την κατανάλωση. Από την σχέση (14) προκύπτει:

$$E\left(R_{t+1}^{i}\right) - R_{t}^{f} = \gamma cov_{t}\left(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^{i}\right) \qquad (15)$$

- Το ασφάλιστρο κινδύνου είναι γραμμική συνάρτηση της συνδιακύμανσης μεταξύ της απόδοσης του τίτλου και του ρυθμού ανόδου της κατανάλωσης.
- Τίτλοι, των οποίων οι αποδόσεις παρουσιάζουν θετική (αρνητική) συσχέτιση με την κατανάλωση, έχουν θετικό (αρνητικό) ασφάλιστρο κινδύνου.
- Σε οικονομικούς όρους, οι επενδυτές πρέπει να προσδοκούν απόδοση μεγαλύτερη από το επιτόκιο μηδενικού κίνδυνου για να κρατήσουν ένα τίτλο ο οποίος αυξάνει την διακύμανση της κατανάλωσης (κίνδυνος).
- Γενικά, η αναμενόμενη απόδοση ενός τίτλου είναι θετική συνάρτηση του κινδύνου. Διαφορετικά κανένας επενδυτής δεν θα κρατούσε τίτλους υψηλού κινδύνου.
- Σημείωση: Όπως προκύπτει από τον ορισμό της αναμενόμενης απόδοσης, με δεδομένο το αναμενόμενο payoff, τίτλοι με χαμηλή (υψηλή) τιμή έχουν υψηλή (χαμηλή) αναμενόμενη απόδοση.

Απόδειξη της (15)

Για την απόδειξη της (15) ξεκινάμε από την (13) με

$$M_{t+1} = \beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma} = e^{\ln(M_{t+1})} = e^{\ln(\beta)^{-\gamma\Delta c_{t+1}}}\ .$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Stein (κανόνας 4):

$$cov\left(M_{t+1}, R_{t+1}^{i}\right) = cov_t\left(e^{\ln(\beta)^{-\gamma\Delta c_{t+1}}}, R_{t+1}^{i}\right) = -\gamma E_t(M_{t+1})cov_t\left(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^{i}\right).$$

Αντικαθιστώντας στην $E\left(R_{t+1}^{i}\right) - R_t^{f} = -\frac{cov\left(M_{t+1}, R_{t+1}^{i}\right)}{E(M_{t+1})}$, έχουμε:

$$E\left(R_{t+1}^{i}\right) - R_t^{f} = \gamma cov_t\left(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^{i}\right).$$

Το ασφάλιστρο κινδύνου ΙΙ

Αν οι αποδόσεις και η μεταβολή της κατανάλωσης ακολουθούν από κοινού λογαριθμοκανονική κατανομή, τότε μπορούμε να πάρουμε λογαρίθμους της (6), $E_t(M_{t+1}R_{t+1}) = 1$:

$$\ln E_t(M_{t+1}R_{t+1}) = 0.$$

Παίρνοντας λογαρίθμους της αριστερής πλευράς και εφαρμόζοντας τον κανόνα 3:

$$E_t m_{t+1} + E_t r_{t+1} + \frac{1}{2} var_t(m_{t+1}) + \frac{1}{2} var_t(r_{t+1}) + cov_t(m_{t+1}, r_{t+1}) = 0 \qquad (6')$$

Αν η χρησιμότητα είναι εκθετική, $M_{t+1} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}$, τότε $m_{t+1} = \ln \beta - \gamma \Delta c_{t+1}$.

Άρα $E_t m_{t+1} = \ln \beta - \gamma E_t \Delta c_{t+1}$, $var_t(m_{t+1}) = \gamma^2 var_t(\Delta c_{t+1})$.

Αντικαθιστώντας στη (6΄), έχουμε:

$$E_t r_{t+1} + \frac{1}{2} var_t(r_{t+1}) = -\ln \beta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \frac{1}{2}\gamma^2 var_t(\Delta c_{t+1}) + \gamma cov_t(r_{t+1}, \Delta c_{t+1}) \quad (6'')$$

Το ασφάλιστρο κινδύνου ΙΙ

$$E_t r_{t+1} + \frac{1}{2} var_t(r_{t+1}) = -\ln\beta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \frac{1}{2}\gamma^2 var_t(\Delta c_{t+1}) + \gamma cov_t(r_{t+1}, \Delta c_{t+1}) \quad (6'')$$

Αν το αξιόγραφο είναι το αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου, τότε $var\left(r_t^f\right) = 0$ και $cov_t\left(m_{t+1}, r_t^f\right) = 0$. Τότε, από την (6’’) προκύπτει:

$$E_t r_t^f = -\ln\beta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \frac{1}{2}\gamma^2 var_t(\Delta c_{t+1}) \qquad (6''')$$

Αφαιρώντας την (6’’’) από την (6’’), προκύπτει το ασφάλιστρο κινδύνου ως

$$E_t r_{t+1} + \frac{1}{2} var_t(r_{t+1}) - r_t^f = \gamma cov_t(r_{t+1}, \Delta c_{t+1}) \qquad (15')$$

Η μόνη διαφορά της (15’) από την (15) είναι ότι στην αριστερή πλευρά της (15’) προκύπτει ο όρος $\frac{1}{2} var_t(r_{t+1})$ λόγω της λογαριθμικής προσέγγισης της απόδοσης.

Στατιστικά δεδομένα και χαρακτηριστικά του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης

Πίνακας 2: Ονομαστικές αποδόσεις στις ΗΠΑ

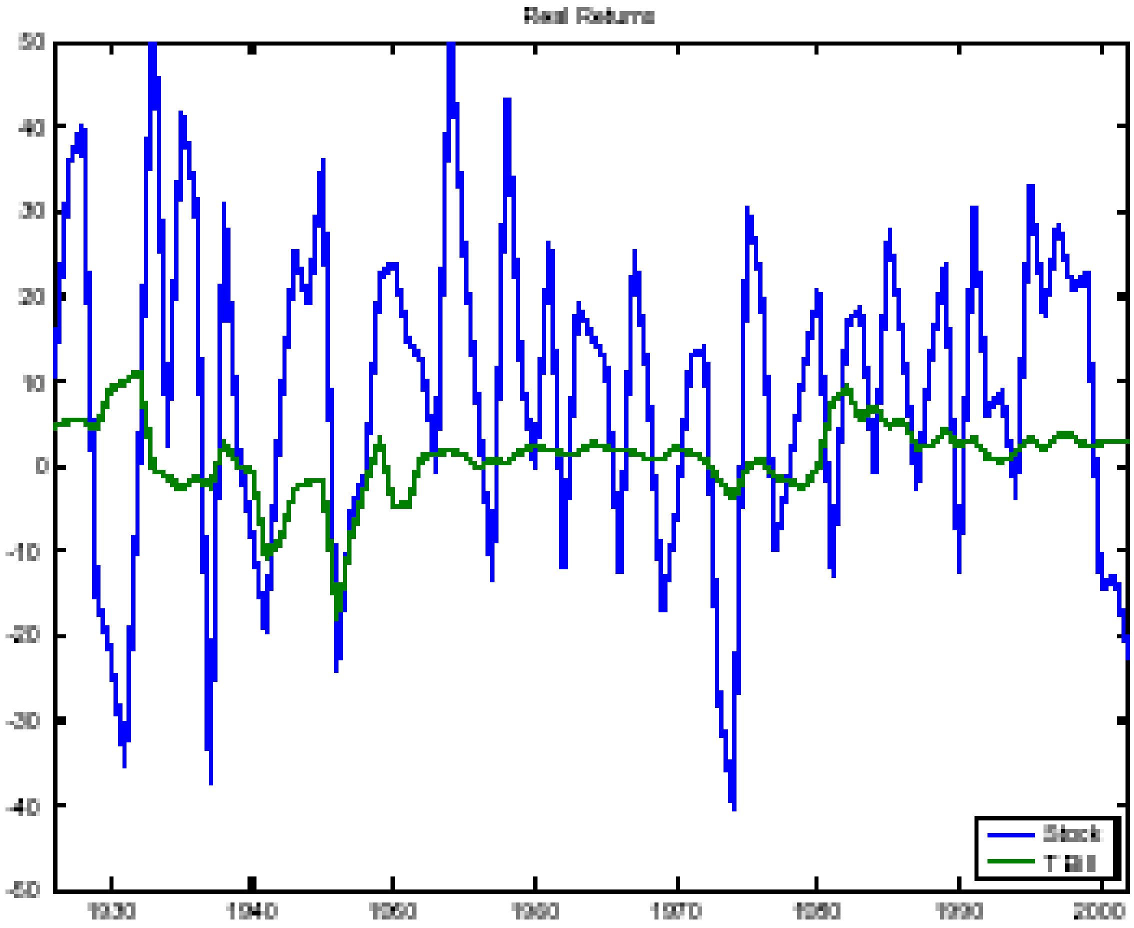
	1871-1999		1926-1999	
	Μέσος	Τυπ. Απ.	Μέσος	Τυπ. Απ.
$\ln(1+r)$	0.090	0.167	0.105	0.182
$\ln(1+r^f)$	0.047	0.026	0.046	0.033
$\ln(1+\pi)$	0.018	0.075	0.030	0.044
r	0.109	0.177	0.129	0.192
r^f	0.049	0.028	0.048	0.035
π	0.021	0.075	0.031	0.045

Σημείωση: r : Απόδοση μετοχών , r^f : ονομαστικό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, π : πληθωρισμός.

Πίνακας 3: Πραγματική υπερβάλλουσα απόδοση μετοχών ΗΠΑ

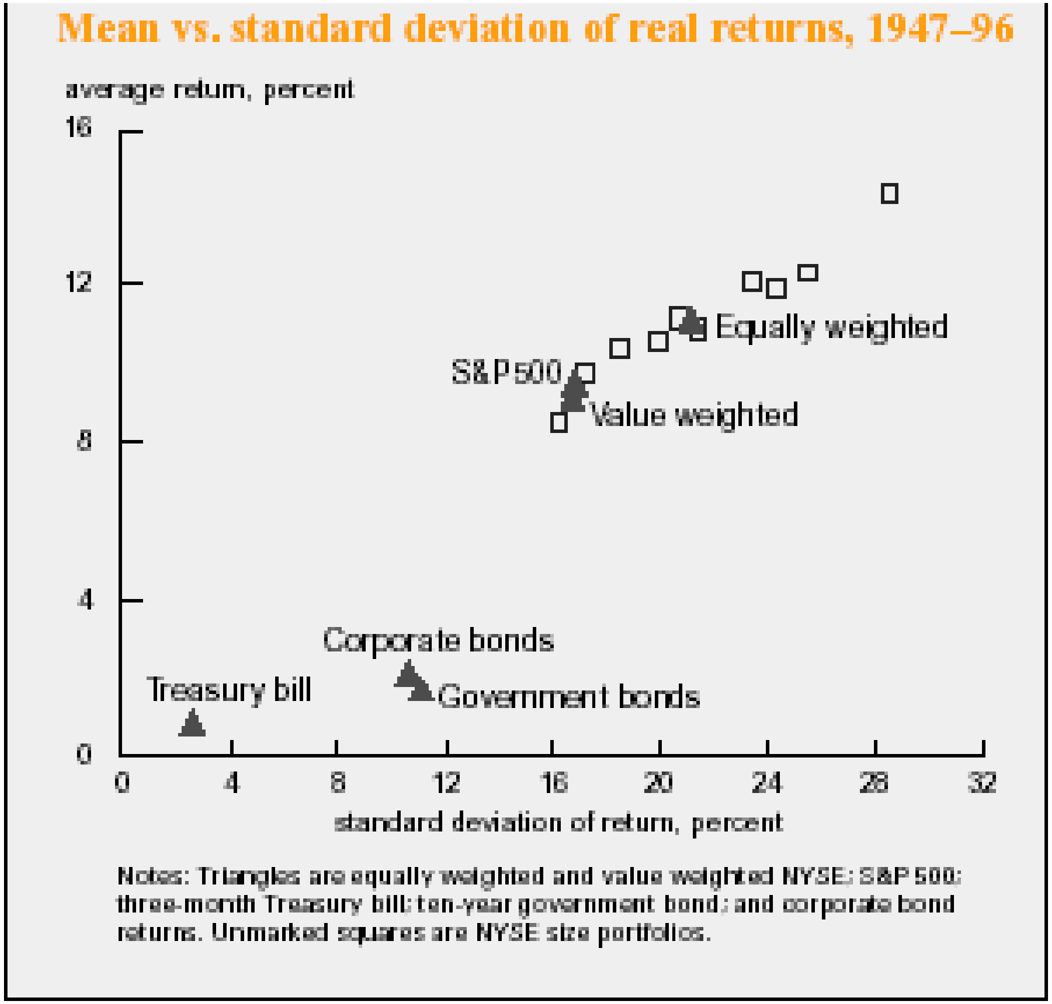
1871-1999	R^e
Μέσος	0.057
Τυπ. Απ.	0.181
1926-1999	R^e
Μέσος	0.079
Τυπ. Απ	0.195

Αποδόσεις χρηματιστηρίου και 3-μηνιαίων Treasury Bills στις ΗΠΑ 1927-2002.



Real Returns
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
1930
1940
1950
1960
1970
1980
1990
2000
Stock
T Bill

Αποδόσεις και κίνδυνος (τυπική απόκλιση) 1947-1996



Πραγματικές (αποπληθωρισμένες) αποδόσεις και κίνδυνος 1927-2002

	Ομόλογα	Μετοχές-Ομόλογα
Μέση ετήσια απόδοση	1.1	7.7
Τυπική απόκλιση	8.6	20.8

Αξία 1000 δολαρίων το 2002 τα οποία επενδύθηκαν το 1927:

Στο χρηματιστήριο: $1000 \times (1+0.088)^{(2004-1927)}$ = 660.100 δολάρια

Σε ομόλογα: $1000 \times (1+0.011)^{(2004-1927)}$ = 2.321 δολάρια

Πίνακας 4: Πραγματικό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ΗΠΑ και SDF

1871-1999	$\frac{1}{1+r^f}$
Μέσος	0.974
Τυπ. Απ.	0.076
1926-1999	
Μέσος	0.985
Τυπ. Απ.	0.046

Σημείωση: $\frac{1}{1+r^f}$ είναι η αποπληθωρισμένη τιμή ενός ετήσιου ομολόγου.

Τι μας λένε τα δεδομένα των επιτοκίων μηδενικού κινδύνου για τον μέσο και την διακύμανση του M;

$$1 = E\left(MR^f\right) \Leftrightarrow$$
$$1 = E(M)E\left(R^f\right) + cov\left(M, R^f\right) \; <=>$$
$$1 = E\left(MR^f\right) \Leftrightarrow E(M) = E\left(\frac{1}{1+r^f}\right) \approx 0.974, var(M) = var\left(\frac{1}{1+r^f}\right) \approx 0.076.$$

Αναμενόμενες αποδόσεις και beta

Το ασφάλιστρο κινδύνου ενός τίτλου είναι το γινόμενο δυο παραγόντων: της ποσότητας του κινδύνου και της τιμής του κινδύνου. Αυτό φαίνεται εύκολα από την (13), η οποία μπορεί να αναλυθεί ως εξής :

$$E\left(R_{t+1}^{i}\right) = R_{t}^{f} - \beta_{i,m}\lambda_{m} \tag{16}$$

όπου $\beta_{i,m}$ είναι ο συντελεστής παλινδρόμησης του R_{t+1}^{i} στο M_{t+1}, δηλ. $\beta_{i,m} = \frac{cov\left(R_{t+1}^{i}, M_{t+1}\right)}{var(M_{t+1})}$, και $\lambda = var(M_{t+1}))/E(M_{t+1})$ η τιμή του κινδύνου.

- Η σχέση (16) είναι ένα υπόδειγμα αποτίμησης beta (beta pricing model).
- Σύμφωνα με την (16), οι αναμενόμενες αποδόσεις τίτλων $i = 1, \ldots, N$, είναι ανάλογες των beta (συστηματικός κίνδυνος) των τίτλων.

- Τα beta αντιπροσωπεύουν την ποσότητα κινδύνου, ενώ λ_m είναι η τιμή του κινδύνου, και είναι κοινό για όλους τους τίτλους.

Με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας, $M_{t+1} = \beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}$, η σχέση (16) γίνεται:

$$
\begin{gathered}
E\left(R_{t+1}^{i}\right) = R_t^f - \beta_{i,\Delta c}\lambda_{\Delta c} \\
\lambda_{\Delta c} = \gamma var(\Delta c_{t+1}), \\
\beta_{i,\Delta c} = \frac{cov\left(R_{t+1}^{i}, \Delta c_{t+1}\right)}{var(\Delta c_{t+1})}
\end{gathered}
\qquad (16')
$$

- Σύμφωνα με την (16’), οι αποδόσεις είναι γραμμική συνάρτηση των beta με τον ρυθμό ανόδου της κατανάλωσης, $\beta_{i,\Delta c}$.
- Η τιμή του κινδύνου, $\lambda_{\Delta c}$, είναι θετική συνάρτηση του βαθμού αποστροφής του κινδύνου, και της διακύμανσης της κατανάλωσης.
- Όσο λιγότερο ριψοκίνδυνοι είναι οι επενδυτές, (μεγαλύτερο γ) και όσο πιο επικίνδυνο είναι το οικονομικό περιβάλλον (υψηλή διακύμανση του (Δc))τόσο μεγαλύτερο το απαιτούμενο ασφάλιστρο κινδύνου.

Το αποδοτικό όριο των επενδυτικών δυνατοτήτων της οικονομίας

- Το σύνολο των επενδυτικών δυνατοτήτων μιας οικονομία (mean variance frontier) καθορίζεται από την διακύμανση του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης.
- Για τον υπολογισμό του αποδοτικού ορίου, ξεκινάμε από την κεντρική

φόρμουλα αποτίμησης:

$$1 = E_t\left(M_{t+1}R^i_{t+1}\right) = E(M_{t+1})E\left(R^i_{t+1}\right) + cov\left(M_{t+1}, R^i_{t+1}\right) \Rightarrow$$

$$1 = E(M_{t+1})E\left(R^i_{t+1}\right) + \rho_{M,R^i}\sigma(M_{t+1})\sigma\left(R^i_{t+1}\right) \Rightarrow$$

$$E\left(R^i_{t+1}\right) - R^f_t = -\rho_{M,R^i}\frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})}\sigma\left(R^i_{t+1}\right) \qquad (17)$$

$$E\left(R_{t+1}^{i}\right) - R_{t}^{f} = -\rho_{M,R^{i}} \frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})} \sigma\left(R_{t+1}^{i}\right) \qquad (17)$$

Λόγω του ότι ο συντελεστής συσχέτισης $-1 \leq \rho_{M,R^{i}} \leq 1$, όλοι οι τίτλοι πρέπει να έχουν αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση:

$$\left|E\left(R_{t+1}^{i}\right) - R_{t}^{f}\right| \leq \frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})} \sigma\left(R_{t+1}^{i}\right) \qquad (18)$$

- Η σχέση (18) ορίζει το σύνολο των πιθανών συνδυασμών μεταξύ απόδοσης και κινδύνου μιας οικονομίας.
- Όλοι οι συνδυασμοί $E\left(R_{t+1}^{i}\right) - \sigma\left(R_{t+1}^{i}\right)$ πρέπει να βρίσκονται στην περιοχή Ω του διαγράμματος 4.

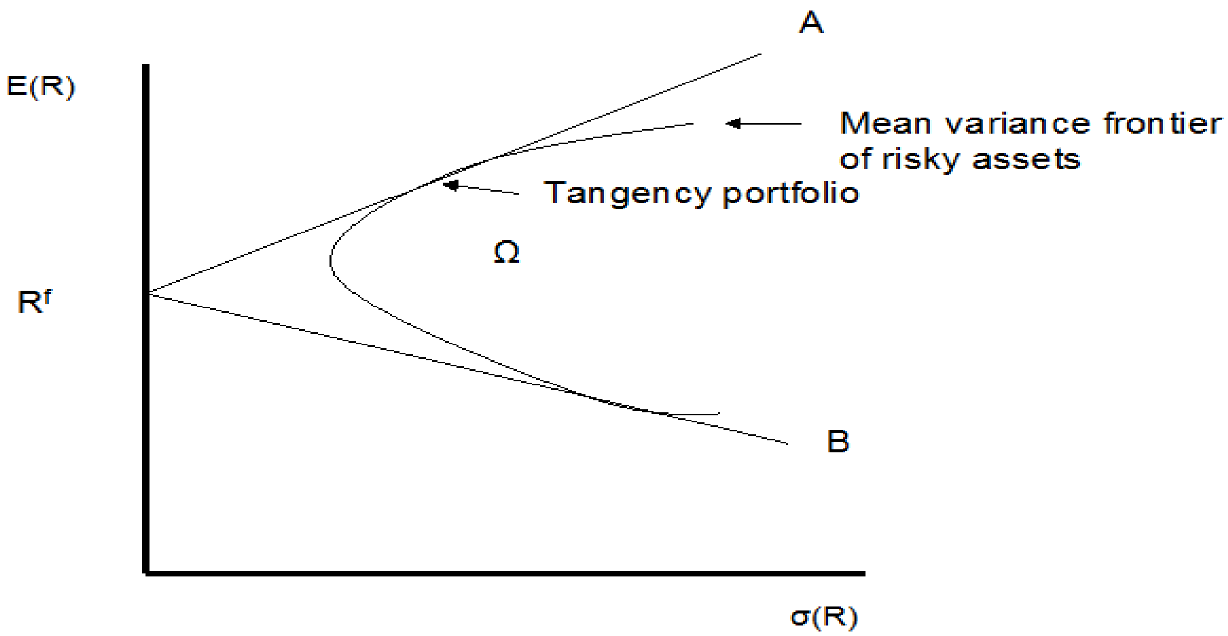


Figure 4: Mean-variance frontier **(Όριο επενδυτικών δυνατοτήτων)**

- Το όριο του συνόλου των επενδυτικών δυνατοτήτων $\overline{AR^fB}$ είναι το αποδοτικό όριο, το οποίο υπολογίζεται από την (17) θέτοντας $|\rho_{M,R^i}| = 1$.
- Όλες οι αποδόσεις πάνω στο όριο $\overline{AR^fB}$ παρουσιάζουν τέλεια συσχέτιση με τον συντελεστή προεξόφλησης.
- Αποδόσεις πάνω στο $\overline{AR^f}$ παρουσιάζουν τέλεια αρνητική συσχέτιση με τον συντελεστή προεξόφλησης, δηλ. τέλεια θετική συσχέτιση με την κατανάλωση. Επομένως έχουν τον υψηλότερο κίνδυνο και κατά συνέπεια την υψηλότερη απόδοση.
- Αποδόσεις πάνω στο $\overline{R^fB}$ παρουσιάζουν τέλεια θετική συσχέτιση με τον συντελεστή προεξόφλησης, δηλ. τέλεια αρνητική συσχέτιση με την κατανάλωση. Επομένως έχουν τον χαμηλότερο κίνδυνο και κατά συνέπεια την χαμηλότερη απόδοση.

- Όλες οι αποδόσεις πάνω στο όριο παρουσιάζουν τέλεια συσχέτιση μεταξύ τους καθώς έχουν τέλεια συσχέτιση με τον συντελεστή προεξόφλησης. Κατά συνέπεια μπορούμε να αναπαράγουμε κάθε απόδοση πάνω στο όριο $\overline{AR^f B}$ ως γραμμικό συνδυασμό δυο άλλων αποδόσεων που βρίσκονται επίσης πάνω στο όριο, π.χ.

$$R^{mv} = R^f + a\left(R^m - R^f\right)$$

για κάποια σταθερά α.

Η μέγιστη υπερβάλλουσα απόδοση ανά μονάδα κινδύνου (μέγιστο Sharpe ratio) που προσφέρει μια οικονομία καθορίζεται από τον βαθμό αποστροφής του κινδύνου και την διακύμανση της κατανάλωσης.

Ο λόγος υπερβάλλουσας απόδοσης προς κίνδυνο είναι γνωστό ως Sharpe ratio:

$$\frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma\left(R_{t+1}^i\right)} = Shape\ ratio$$

Η κλίση του mean-variance frontier είναι το μέγιστο Sharpe ratio που μπορεί να μας προσφέρει μια οικονομία. Η κλίση αυτή είναι:

$$\left|\frac{(R_{t+1})-R_t^f}{\sigma\left(R_{t+1}^i\right)}\right| = \frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})} = \sigma(M_{t+1})R_t^f \qquad (19)$$

Σύμφωνα με την (19), το μέγιστο Sharpe ratio μιας οικονομίας είναι θετική συνάρτηση της διακύμανσης του στοχαστικού συντελεστή αποτίμησης και του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου.

Για να προσδιορίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τις οικονομικές μεταβλητές που καθορίζουν το μέγιστο Sharpe ratio μπορούμε να υποθέσουμε εκθετική χρησιμότητα. Οπότε: $M_{t+1} = \beta(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}$. Στη περίπτωση αυτή η (19) γίνεται:

$$\left|\frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma\left(R_{t+1}^i\right)}\right| = \frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})} \approx \gamma\sigma(\Delta c_{t+1}) \qquad (20)$$

Το μέγιστο Sharpe ratio μιας οικονομία είναι θετική συνάρτηση του βαθμού αποστροφής κινδύνου και της διακύμανσης της κατανάλωσης. Όσο περισσότερο αποστρέφεται τον κίνδυνο ο επενδυτής, τόσο υψηλότερο το απαιτούμενο ασφάλιστρο για κάθε μονάδα κινδύνου. Όσο πιο επικίνδυνο είναι το οικονομικό περιβάλλον (υψηλή διακύμανση του Δc_{t+1}), τόσο μεγαλύτερο το απαιτούμενο ασφάλιστρο για κάθε μονάδα κινδύνου.

Το παζλ του ασφάλιστρου κινδύνου των μετοχών

Αν το υπόδειγμα CCAPM έχει εμπειρική ισχύ, τότε το Sharpe ratio μιας αγοράς έχει ένα ανώτατο όριο. Από την σχέση (10) και (20):

$$\left|\frac{E(R_{t+1})-R_t^f}{\sigma\left(R_{t+1}^i\right)}\right| \leq \gamma\sigma(\Delta c_{t+1}) \qquad (21)$$

- Το ανώτατο όριο του Sharpe ratio είναι $\gamma\sigma(\Delta c_{t+1})$.
- Για να ισχύει η σχέση (21), το γ πρέπει να είναι πολύ υψηλό.

- Για παράδειγμα , στις ΗΠΑ την περίοδο 1948-1980 η πραγματική απόδοση του χρηματιστηρίου ήταν 9%, το πραγματικό επιτόκιο εντόκων γραμματίων του Δημοσίου ήταν 1% και η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χρηματιστηριακού Δείκτη ήταν 16%. Κατά συνέπεια, $\left|\frac{E(R_{t+1})-R_t^f}{\sigma\left(R_{t+1}^i\right)}\right| = \frac{0.09-0.01}{0.16}$=0.5.
- Από την άλλη μεριά, η τυπική απόκλιση του ρυθμού ανόδου της κατανάλωσης ήταν 1%.
- Για να ισχύει η ανισότητα (21), ο βαθμός αποστροφής κινδύνου των επενδυτών, γ, θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερος από 50.

Το παραπάνω πρόβλημα πήρε την ονομασία "equity premium puzzle" από τους Mehra και Prescott (1985).

- ***Σημείωση:*** *Το παζλ του ασφάλιστρου κινδύνου των μετοχών έχει μάλλον ιστορική σημασία, καθώς φαίνεται να ισχύει μόνο σε συγκεκριμένες περιόδους, όπως η περίοδος μετά τον 2ο παγκόσμιο πόλεμο και έως περίπου το 1999. Σε μεγαλύτερα δείγματα, όπως για παράδειγμα στο δείγμα 1871-2010, δεν ισχύει (το δείγμα αυτό περιλαμβάνει την κρίση του 1929-30, το σκάσιμο της φούσκας του NASDAQ του 2000-2001 και την χρηματοπιστωτική κρίση του 2008-2009.*
- *Κατά τα τελευταία 140 χρόνια η πραγματική απόδοση του χρηματιστηρίου ήταν 6,2% (όχι πολύ διαφορετική από των τελευταίων 62 ετών), το πραγματικό επιτόκιο εντόκων γραμματίων του Δημοσίου ήταν 2,8% και η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του Χρηματιστηριακού Δείκτη ήταν 17,4%.*

Κατά συνέπεια, $\left|\frac{E(R_{t+1})-R_t^f}{\sigma(R_{t+1}^i)}\right| = \frac{0.062-0.028}{0.174} = 0.2.$

Από την άλλη μεριά, η τυπική απόκλιση του ρυθμού ανόδου της κατανάλωσης ήταν 3,5% (η κατανάλωση είχε μεγαλύτερη μεταβλητότητα πριν τον 2ο παγκόσμιο πόλεμο).

Για να ισχύει η ανισότητα (21), ο βαθμός αποστροφής κινδύνου των επενδυτών, γ θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερος από 5,7, που είναι ένα λογικό νούμερο.

Το παζλ του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου

Ακόμη και αν ήμασταν διατεθειμένοι να αποδεχτούμε έναν υψηλό βαθμό αποστροφής κινδύνου για τους επενδυτές, το υπόδειγμα θα μπορούσε να εξηγήσει το υψηλό ασφάλιστρο κινδύνου των μετοχών, αλλά όχι το μέσο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Το παζλ αυτό ονομάστηκε το «παζλ του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου» (“risk free rate puzzle”).

Για να γίνει κατανοητή αυτή η πρόταση, ας θυμηθούμε τη κεντρική φόρμουλα του καθορισμού του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου

$$r_t^f = -\ln\beta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} \qquad (8)$$

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης την περίοδο 1948-2010 ήταν 2,2%. Κατά συνέπεια, με γ=17 (το οποίο είναι απαραίτητο για να εξηγήσει το ασφάλιστρο κινδύνου των μετοχών την περίοδο αυτή) προκύπτει από την (8)

$$r_t^f + \ln\beta = 0.34 \qquad (8')$$

Το παζλ του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου

$$r_t^f + \ln\beta = 0.34 \qquad (8')$$

- Καθώς το β είναι κοντά στη μονάδα , άρα ln(β) είναι κοντά στο μηδέν, το πραγματικό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου θα έπρεπε να είναι περίπου 34% (υπερβολικά υψηλό). Επομένως, το υπόδειγμα δεν είναι σε θέση να εξηγήσει το μέσο επιτόκιο της οικονομίας (περίπου 1,8% σε πραγματικούς όρους και περίπου 4% σε ονομαστικούς όρους).
- Κατά συνέπεια, το υπόδειγμα του καταναλωτή δεν είναι σε θέση να εξηγήσει το μέσο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου με υψηλή αποστροφή στο κίνδυνο.
- Όμως ακόμη και αν ήταν σε θέση να εξηγήσει το μέσο επιτόκιο με ένα γ=17, αυτό θα σήμαινε σύμφωνα με την (8) ότι μια αύξηση του αναμενόμενου ρυθμού ανόδου της κατανάλωσης κατά μια μονάδα θα οδηγούσε σε μια άνοδο του επιτοκίου κατά 17 ποσοστιαίες μονάδες, κάτι που δεν παρατηρείται στη πραγματικότητα σε καμία οικονομία.

Ερμηνείες

Η αποτυχία του CCAPM να εξηγήσει το μέσο ασφάλιστρο κινδύνου και το μέσο πραγματικό επιτόκιο της οικονομίας μπορεί να εξηγηθεί με διάφορους τρόπους. Μερικές πιθανές ερμηνείες είναι οι ακόλουθες :

1) Οι υψηλές χρηματιστηριακές αποδόσεις του παρελθόντος είναι τυχαίες.
2) Υπάρχει μια θετική επιλεκτική μεροληψία στις μετρήσεις των μέσων αποδόσεων.
3) Οι επενδυτές προσδοκούσαν ένα κραχ στα χρηματιστήρια το οποίο ποτέ δεν συνέβη («πρόβλημα peso») – κι όμως συνέβη τελικά το 2008.
4) Το υπόδειγμα CCAPM στην βασική (απλοϊκή) μορφή του είναι λάθος.

Ερμηνεία 1. Το επιχείρημα αυτό σημαίνει ότι η αγορά ακολουθούσε συνεχώς μια κερδοσκοπική φούσκα. Αυτό όμως δεν είναι μια ικανοποιητική εξήγηση.

Ερμηνεία 2. Οι αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη δεν είναι αντιπροσωπευτικές των αποδόσεων του συνόλου των εταιριών καθώς στο χρηματιστηριακό δείκτη συμπεριλαμβάνονται μόνο οι εταιρίες που επέζησαν (και όχι αυτές οι οποίες έκλεισαν). Κατά συνέπεια, οι αποδόσεις του δείκτη είναι μεγαλύτερες από τις πραγματικές ιστορικές αποδόσεις του συνόλου των εταιριών. Με άλλα λόγια, τα εμπειρικά δεδομένα πάνω στα οποία στηρίζεται το παζλ είναι παραπλανητικά. Επιπλέον, οι ακαδημαϊκές μελέτες επικεντρώνονται στις Η.Π.Α. όπου παρατηρούνται οι υψηλότερες ιστορικά αποδόσεις. Άλλα χρηματιστήρια δεν παρουσιάζουν την ίδια εικόνα με αποτέλεσμα να υπάρχει μια θετική επιλεκτική μεροληψία στις μετρήσεις των μέσων αποδόσεων (Brown, Goetzmann and Ross, 1995). Παρότι αρκετά άλλα ανεπτυγμένα χρηματιστήρια προσέφεραν αποδόσεις συγκρίσιμες με τις Η.Π.Α. στη μεταπολεμική περίοδο, οι Jorion και Goetzmann (1999) δείχνουν ότι οι αποδόσεις σε πολλά από τα χρηματιστήρια αυτά ήταν χαμηλές στις αρχές του 20ου αιώνα.

Ερμηνεία 3. Πολλοί ερευνητές ισχυρίζονται ότι τα Αμερικάνικα δεδομένα είναι παραπλανητικά για διαφορετικό λόγο. Οι επενδυτές μπορεί να περίμεναν την πιθανότητα ενός καταστροφικού γεγονότος που δεν έχει ακόμη συμβεί. Αυτό το ‘peso problem’ υπονοεί ότι η δειγματική μεταβλητότητα υποτιμά τον πραγματικό κίνδυνο επένδυσης σε μετοχές. Έστω λοιπόν ότι ένα καταστροφικό γεγονός μπορεί να οδηγήσει σε πολύ μεγάλες απώλειες των μετοχών (μεγάλες αρνητικές αποδόσεις) και μεγάλη διακύμανση (κίνδυνο). Αν οι επενδυτές θεωρούν ότι υπάρχει έστω και μια μικρή πιθανότητα ενός καταστροφικού συμβάντος, τότε η αναμενόμενη απόδοση των μετοχών μπορεί να είναι πολύ μικρότερη από την δειγματική.

Συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δυο καταστάσεις (1 και 2, όπου) και οι επενδυτές προσδοκούν ότι στη κατάσταση 1 (2) η αναμενόμενη απόδοση πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι $\mathrm{E}(\mathrm{R}_1)$ ($\mathrm{E}(\mathrm{R}_2)$) και η τυπική απόκλιση σ(1) (σ(2)) και η δεσμευμένη πιθανότητα τη περίοδο t να βρίσκεται η αγορά την επόμενη περίοδο στη κατάσταση 1 (2) είναι π (1-π), τότε η αναμενόμενη απόδοση είναι:

$$E_t(R_{t+1}) = \pi E(R_1) + (1-\pi)E(R_2)$$

Με π=90% και $\mathrm{E}(\mathrm{R}_1)$=8%, $\mathrm{E}(\mathrm{R}_2)$=-30%, η αναμενόμενη απόδοση είναι 5.2% (0.9*8+0.1*(-30)). Η κατάσταση 2 σπάνια συνέβη, και κατά συνέπεια η μέση απόδοση της αγοράς ιστορικά ήταν 8%, η απόδοση στη καλή κατάσταση του κόσμου. Παρόλαυτα, οι επενδυτές περίμεναν αποδόσεις χαμηλότερες από τον ιστορικό αδέσμευτο μέσο, δηλ. 5.2%, επειδή προεξοφλούσαν την πιθανότητα ενός κραχ.

Επίσης, και η αναμενόμενη τυπική απόκλιση των αποδόσεων μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη από τη δειγματική τυπική απόκλιση.

$$E_t(\sigma_{t+1}) = \pi \quad \sigma_1 \quad + (1-\pi) \quad \sigma_2$$

Για παράδειγμα, με π=90% και σ_1=18%, και σ_2=70%, ο αναμενόμενος κίνδυνος (τυπική απόκλιση) είναι 23.2% (0.9*18+0.1*70). Επειδή η κατάσταση 2 σπάνια συνέβη, η τυπική απόκλιση των αποδόσεων της αγοράς ιστορικά ήταν 18%, ο κίνδυνος στη καλή κατάσταση του κόσμου. Επειδή όμως οι επενδυτές προεξοφλούσαν την πιθανότητα ενός κραχ, ο αναμενόμενος κίνδυνος ήταν μεγαλύτερος, 23.2% έναντι 18%.

Κατά συνέπεια, η αναμενόμενη (δεσμευμένη) υπερβάλλουσα απόδοση ανά μονάδα κινδύνου (Sharpe ratio) είναι μικρότερη από την δειγματική (αδέσμευτη) και το παζλ δεν υφίσταται. Το μέσο δεσμευμένο Sharpe ratio (δηλ. το Sharpe ratio που οι επενδυτές προσδοκούσαν κατά μέσο όρο) είναι 0.22 (=5.2%/23.2%) και όχι 0.44 (8%/18%)

Η χρηματοοικονομική κρίση του 2007-2008 μας υπενθύμισε ότι η πιθανότητα ενός κραχ δεν είναι αμελητέα. Οι μετοχές στα διεθνή χρηματιστήρια έχασαν από 50% έως 90% της αξίας τους και η διακύμανση των μετοχών πενταπλασιάστηκε μετά την κατάρρευση της Lehman Brothers τον Σεπτέμβριο του 2008. Ο S&P 500 έχασε το 2008-2009 το 60% της αξίας του και η τυπική του απόκλιση αυξήθηκε στο 70%.

Ερμηνεία 4. Το υπόδειγμα CCAPM είναι αναμφίβολα μια πολύ απλουστευμένη περιγραφή της πραγματικότητας. Αν υποθέσουμε ότι κατά βάση το υπόδειγμα είναι σωστό αλλά αδυνατεί να εξηγήσει τα εμπειρικά δεδομένα λόγω υπερβολικά περιοριστικών υποθέσεων, τότε μπορούμε να χαλαρώσουμε κάποιες υποθέσεις του. Στη κατεύθυνση αυτή έχει κινηθεί η βιβλιογραφία τα τελευταία 20 χρόνια. Οι επεκτάσεις του βασικού υποδείγματος CCAPM είναι πολλές. Γενικά όμως, μπορούμε να τις κατατάξουμε σε τρεις κατηγορίες.

1. Υποδείγματα με άλλες μορφές συνάρτησης χρησιμότητας και ειδικότερα με μη διασπασιμότητα (non-separability) της κατανάλωσης στη συνάρτηση χρησιμότητας. Στα υποδείγματα αυτά η οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης είναι συνάρτηση κάποιων μεταβλητών κατάστασης. Κατά συνέπεια, το ασφάλιστρο κινδύνου είναι συνάρτηση της συνδιακύμανσης των αποδόσεων με την κατανάλωση και της συνδιακύμανσης των αποδόσεων με τις μεταβλητές κατάστασης. Αν η τελευταία είναι οικονομικά σημαντική, μπορούμε να εξηγήσουμε το ασφάλιστρο κινδύνου χωρίς να χρειαστεί να υποθέσουμε μια υψηλή τιμή για το γ, βλέπε Campbell και Cochrane (2000) ως ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αυτού του είδους.

2. Υποδείγματα με ετερογενείς καταναλωτές – Constantinides και Duffie (1996). Η ετερογένεια έγκειται στο οι καταναλωτές έχουν εισόδημα από εργασία το οποίο υπόκειται σε ένα ιδιοσυγκρατικό σοκ, δηλ. ο καταναλωτής αντιμετωπίζει εκτός από τον κίνδυνο να μειωθεί η αξία του αξιογράφου του (κοινός για όλους) και τον κίνδυνο να μειωθεί το εισόδημά του γιατί σε μια ύφεση μπορεί να χάσει την εργασία του. Αν ο κίνδυνος αυτός συσχετίζεται αρνητικά με τις αποδόσεις (επειδή για παράδειγμα, η πιθανότητα να μείνει κανείς άνεργος είναι μεγαλύτερη σε μια ύφεση όταν και οι αποδόσεις είναι χαμηλές), το ασφάλιστρο κινδύνου εξαρτάται από την εισοδηματική ανισότητα. Όσο μεγαλύτερη είναι η τυπική απόκλιση του εισοδήματος μεταξύ των καταναλωτών, τόσο μεγαλύτερο και το απαιτούμενο ασφάλιστρο κινδύνου.
3. Υποδείγματα με παραγωγή (production economy) – Cochrane (1991). Στη πιο απλή μορφή τους τα υποδείγματα αυτά ορίζουν τη απαιτούμενη απόδοση στα πλαίσια ενός προβλήματος μεγιστοποίησης του κέρδους της εταιρίας αντί της χρησιμότητας του καταναλωτή.

:

Πλαίσιο: Απόδειξη της (20)

Επαναλαμβάνουμε την (20):

$$\left|\frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma\left(R_{t+1}^i\right)}\right| = \frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})} \approx \gamma\sigma(\Delta c_{t+1})$$

Για την απόδειξη της (20) ξεκινάμε από την βασική φόρμουλα του καθορισμού του ασφάλιστρου κινδύνου σύμφωνα με το υπόδειγμα του καταναλωτή:

$E\left(R_{t+1}^i\right) - R_t^f = -\frac{cov\left(M_{t+1}, R_{t+1}^i\right)}{E(M_{t+1})}$. Με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας,

$M_{t+1} = \beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}$.

Χρησιμοποιούμε το λήμμα του Stein:

Λήμμα του Stein (υπενθύμιση):

Έστω x_t , y_t και f_t τυχαίες μεταβλητές και $y_t = g(f_t)$. Εάν x_t και f_t ακολουθούν την διμεταβλητή κανονική κατανομή, η είναι παραγωγήσιμη σε όλα τα σημεία και $|E_t(g')| < \infty$, τότε

$$cov_t\left(x_{t+1}, g(f_{t+1})\right) = E_t(g')cov_t(x_{t+1}, f_{t+1})$$

παίρνουμε:

$$cov\left(M_{t+1}, R^i_{t+1}\right) = cov_t\left(\beta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}, R^i_{t+1}\right) = -\gamma E_t(M_{t+1}) cov_t\left(\Delta c_{t+1}, R^i_{t+1}\right).$$

Αντικαθιστώντας στην $E\left(R^i_{t+1}\right) - R^f_t = -\frac{cov\left(M_{t+1}, R^i_{t+1}\right)}{E(M_{t+1})}$, έχουμε:

$$E\left(R^i_{t+1}\right) - R^f_t = \gamma cov_t\left(\Delta c_{t+1}, R^i_{t+1}\right).$$

Καθώς $cov_t\left(\Delta c_{t+1}, R^i_{t+1}\right) = \rho(\Delta c, R)\sigma(\Delta c, R)\sigma\left(R^i_{t+1}\right)$, προκύπτει:

$\frac{E\left(R^i_{t+1}\right) - R^f_t}{\sigma\left(R^i_{t+1}\right)} = \gamma\rho(\Delta c, R)\sigma(\Delta c_{t+1})$. Άρα, για $\rho(\Delta c, R) = \pm 1 \Rightarrow$

$$\left|\frac{E(R_{t+1}) - R^f_t}{\sigma\left(R^i_{t+1}\right)}\right| \approx \gamma\sigma(\Delta c_{t+1}).$$

Είναι οι τιμές/αποδόσεις προβλέψιμες;

Τι συνεπάγεται η κεντρική φόρμουλα αποτίμησης σχετικά με την στοχαστική διαδικασία των τιμών των τίτλων και, κατά συνέπεια, σχετικά με την προβλεψιμότητα των αποδόσεων;

Από την κεντρική φόρμουλα αποτίμησης (1):

$$P_t u'(C_t) = E_t[\beta u'(C_{t+1}) X_{t+1}]$$

Αν υποθέσουμε ότι:

1) Το χρονικό διάστημα μεταξύ t και $t+1$ είναι μικρό, δηλ. $\beta = 1$,

2) Το payoff του τίτλου είναι η μελλοντική τιμή, $X_{t+1} = P_{t+1}$ (ισχύει κάτω από την υπόθεση 1),

3) Οι επενδυτές είναι αδιάφοροι μεταξύ παρούσας και μελλοντικής κατανάλωσης ($u'(C_t) = u'(C_{t+1})$). Αυτό μπορεί να συμβαίνει όταν (α) η χρησιμότητα, $u(C)$, είναι γραμμική συνάρτηση της κατανάλωσης, ή (β) η κατανάλωση είναι τυχαίος περίπατος, δηλ. μη προβλέψιμη, ($E_t[C_{t+1}] = C_t$),

Τότε συνεπάγεται ότι :

$$P_t{=}E_t[P_{t+1}] \qquad (22)$$

Σύμφωνά με την σχέση (22), οι τιμές των αξιογράφων είναι μη προβλέψιμες. Η τιμή είναι ένα martingale, δηλαδή η καλύτερη πρόβλεψη της μελλοντικής τιμής είναι η σημερινή τιμή.

Μια ειδική περίπτωση ενός martingale είναι ένα random walk. Σε λογαρίθμους

$$p_{t+1}= p_t + \varepsilon_{t+1} \qquad (23)$$

όπου $E(\varepsilon) = 0,\ var(\varepsilon) = \sigma^2$.

Η στοχαστική διαδικασία (23) χαρακτηρίζει κερδοσκοπικές τιμές σε βραχυχρόνιους ορίζοντες.

Σε μακροχρόνιους ορίζοντες, οι συνθήκες 1-3 δεν ισχύουν (η κατανάλωση παρουσιάζει διακύμανση και $\beta < 1$). Τότε:

$$
\begin{aligned}
& E\left(R_{t+1}^{i} - R_{t}^{f}\right) = \\
& -\frac{cov_t\left(M_{t+1}, R_{t+1}^{i}\right)}{E(M_{t+1})} \\
& = -\frac{\sigma_t(M_{t+1})}{E_t(M_{t+1})}\sigma_t(R_{t+1})\rho_t(M_{t+1}, R_t) \\
& = \ \gamma_t \ \sigma_t(\Delta c_{t+1})\sigma_t(R_{t+1})\rho_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1})
\end{aligned}
$$

Το ασφάλιστρο κινδύνου μεταβάλλεται διαχρονικά όταν μεταβάλλεται:

1) Ο βαθμός αποστροφής κινδύνου των επενδυτών (γ_t),
2) Η διακύμανση της κατανάλωσης ($\sigma_t(\Delta c_{t+1})$),
3) Η διακύμανση των αποδόσεων ($\sigma_t(R_{t+1})$),
4) Ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων και του ρυθμού μεταβολής της κατανάλωσης ($\rho_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1})$).

- Στο βαθμό που το ασφάλιστρο κινδύνου μεταβάλλεται διαχρονικά κατά τη διάρκεια του οικονομικού κύκλου, οι αποδόσεις είναι προβλέψιμες υπό την προϋπόθεση ότι είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε οικονομετρικά υποδείγματα που έχουν προβλεπτική ικανότητα για τον οικονομικό κύκλο και να συνδέσουμε τις παραπάνω 4 μεταβλητές με τον οικονομικό κύκλο.

Στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης και πολυπαραγοντικά υποδείγματα αποτίμησης

Δείξαμε ήδη ότι η κεντρική φόρμουλα αποτίμησης, $P = E(MX)$ είναι ισοδύναμη με ένα μονοπαραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης:

$$E\left(R_{t+1}^{i}\right) = R_t^f - \beta_{i,M}\lambda_M \qquad (35)$$

όπου $\beta_{i,M}$ (beta) είναι ο συντελεστής παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων του R_{t+1}^{i} στο M_{t+1}.

Το $\beta_{i,M}$ αντιπροσωπεύει την ποσότητα κινδύνου και διαφέρει μεταξύ διαφόρων αξιογράφων ανάλογα με την έκθεση του κάθε αξιογράφου στον κίνδυνο. Το λ_M αντιπροσωπεύει την τιμή του κινδύνου (αναμενόμενο ασφάλιστρο ανά μονάδα κινδύνου) και είναι κοινό για όλα τα αξιόγραφα.

- Κατά συνέπεια, το υπόδειγμα του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης μπορεί να εκφραστεί ως ένα παραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης στο οποίο ο παράγοντας κινδύνου που καθορίζει την αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση κάθε τίτλου είναι το beta της απόδοσης του τίτλου με τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης.
- Μπορούμε να πούμε αντίστροφα ότι κάθε παραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης κρύβει μέσα του μια υπόθεση σχετικά με τους παράγοντες που καθορίζουν το στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης;
- Στο κεφάλαιο αυτό θα απαντήσουμε ακριβώς σ’ αυτή την ερώτηση. Θα δείξουμε ότι πίσω από κάποια γνωστά υποδείγματα αποτίμησης της χρηματοοικονομικής όπως το CAPM, ICAPM, APT κλπ. κρύβεται ένα υπόδειγμα του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης και συγκεκριμένα ένα υπόδειγμα όπου ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης είναι μια γραμμική συνάρτηση των παραγόντων που υποθέτει το κάθε υπόδειγμα αποτίμησης.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό για διάφορους λόγους.

Πρώτον, δείχνει ότι τα διάφορα υποδείγματα αποτίμησης της χρηματοοικονομικής μπορούν να συνδεθούν με το βασικό υπόδειγμα αποτίμησης του καταναλωτή, το υπόδειγμα Consumption-CAPM, και να προκύψουν ως υποπεριπτώσεις αυτού του υποδείγματος. Αυτό είναι πολύ σημαντικό τόσο γιατί καθιερώνει το C-CAPM ως το κεντρικό υπόδειγμα της χρηματοοικονομικής όσο και γιατί επιτρέπει να κατανοήσουμε καλύτερα τις βασικές υποθέσεις του κάθε επιμέρους υποδείγματος.

Δεύτερον, συνδέει τα εμπειρικά παραγοντικά υποδείγματα με τη θεωρία αποτίμησης καθώς δείχνει ότι οι παράγοντες κινδύνου που τιμολογεί η αγορά συνδέονται με την οριακή χρησιμότητα του καταναλωτή. Συγκεκριμένα, δείχνει ότι οι παράγοντες αυτοί πρέπει να έχουν προβλεπτική ικανότητα για την αλλαγή της μελλοντικής χρησιμότητας.

Θεώρημα 1

Έστω το υπόδειγμα στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης:

$$\boldsymbol{M = a - bf; E(f) = 0, E(MR^e) = 0}$$

όπου f είναι μια τυχαία μεταβλητή (παράγοντας, factor) και είναι σταθερές, τότε το ασφάλιστρο κινδύνου R^e $\left(R^e = R^i - R^f\right)$ ακολουθεί ένα παραγοντικό υπόδειγμα (factor model):

$$\boldsymbol{E(R^e) = \beta\lambda}$$

όπου $\beta = cov(f, R^e)/var(f)$ είναι ο συντελεστής beta μιας παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων του R^e στο f και $\lambda = \frac{b}{a} var(f)$

Απόδειξη:

Από την κεντρική φόρμουλα αποτίμησης έχουμε:

$0 = E(MR^e) = E(M)E(R^e) + cov(M, R^e)$

$0 = aE(R^e) - b\ cov(f, R^e)$. Λύνοντας ως προς $E(R^e)$ έχουμε

$E(R^e) = \frac{b}{a}\ cov(f, R^e)$

Ορίζοντας το β ως $\beta = cov(f, R^e)/var(f)$, έχουμε

$$E(R^e) = \frac{b}{a} var(f) \left(\frac{cov(f, R^e)}{var(f)} \right) = \beta\lambda$$

Το θεώρημα 1 μπορεί να γενικευθεί σε ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης.

<u>Θεώρημα 2</u>

Έστω το υπόδειγμα στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης:

$$\boldsymbol{M = 1 - b'f; E(f) = 0, E(MR^e) = 0}$$

όπου f είναι ένα διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών (παραγόντων) με $E(f) = 0$, και

b ένα διάνυσμα σταθερών, τότε το ασφάλιστρο κινδύνου R^e $\left(R^e = R^i - R^f\right)$

ακολουθεί ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα (multi-factor model):

$$\boldsymbol{E(R^e) = \beta' \lambda}$$

όπου είναι το διάνυσμα των συντελεστών beta μιας παλινδρόμησης ελαχίστων

τετραγώνων του R^e στο f και είναι το διάνυσμα των τιμών κινδύνου.

*Η **απόδειξη** είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1.*

Επιλογή παραγόντων

Το μεγάλο πλεονέκτημα των παραγοντικών υποδειγμάτων σε σύγκριση με το βασικό υπόδειγμα του καταναλωτή, $E(MR) = 1,$ έγκειται στο ότι οι παράγοντες είναι συχνά μετρήσιμοι ενώ ο οριακός λόγος υποκατάστασης (MRS) δεν είναι.

Παρόλαυτα, το βασικό ερώτημα που προκύπτει κατά την χρήση τέτοιων υποδειγμάτων είναι ποιοι παράγοντες ανήκουν σε ένα υπόδειγμα αποτίμησης και ποια είναι η οικονομική ερμηνεία τους.

Σε πολλά εμπειρικά πολυπαραγοντικά υποδείγματα αποτίμησης οι παράγοντες επιλέγονται αυθαίρετα.

Στο σημείο αυτό γίνεται εμφανής η χρησιμότητα των θεωρημάτων 1 και 2 του προηγούμενου κεφαλαίου γιατί συνδέουν το στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης με τους παράγοντες κινδύνου.

Γενικά, αν το M αποτιμά τα αξιόγραφα σωστά, τότε κάθε παράγοντας που έχει υψηλή συσχέτιση με το M θα αποτιμήσει εξίσου καλά τα αξιόγραφα.

Άρα το γραμμικό υπόδειγμα,

$$M_{t+1} = MRS = \beta \frac{u\prime(C_{t+1})}{u\prime(C_t)} = \alpha + bf_{t+1} \quad (36)$$

το οποίο κρύβεται πίσω από ένα παραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης υποθέτει ότι ο οριακός λόγος υποκατάστασης (MRS) είναι μια γραμμική συνάρτηση του f.

Τα παραγοντικά υποδείγματα μπορούν να συνδεθούν με τη θεωρία αποτίμησης του καταναλωτή. Πολλά από τα υποδείγματα αυτά είναι παραλλαγές του βασικού υποδείγματος αποτίμησης κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς.

Γενικά, **τα παραγοντικά υποδείγματα αποτίμησης αντικαθιστούν τον οριακό λόγο υποκατάστασης με ένα σετ οικονομικών μεταβλητών** όπως αποδόσεις χαρτοφυλακίων, επιτόκια, την κλίση της καμπύλης επιτοκίων, διαφορές απόδοσης εταιρικών ομολόγων από ομόλογα του δημοσίου κλπ. **τα οποία έχουν υψηλή συσχέτιση με τον οριακό λόγο υποκατάστασης του καταναλωτή**.

Για να μπορέσουμε να συνδέσουμε τα παραγοντικά υποδείγματα αποτίμησης με τη θεωρία του καταναλωτή, χρειαζόμαστε μια θεωρία που να συνδέει το MRS με ένα σετ μετρήσιμων οικονομικών μεταβλητών οι οποίες είναι σε θέση να προσεγγίσουν τη μεταβολή του MRS στο χρόνο. Θεωρητικά υποδείγματα τέτοιου τύπου είναι τα δυναμικά στοχαστικά υποδείγματα γενικής ισορροπίας (DSGE: Dynamic Stochastic General Equilibrium models).

Σε αυτά τα υποδείγματα, ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης καθορίζεται ως συνάρτηση ενός σετ εξωγενών μεταβλητών (deep parameters), $\Delta c_{t+1} = g(f_{t+1})$, οι οποίες σε γενικές γραμμές περιγράφουν την τεχνολογία της οικονομίας και τις προτιμήσεις των καταναλωτών.

Πώς μπορούμε από αυτή τη σχέση να φτάσουμε σε ένα παραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης;

Πως προκύπτουν παραγοντικά υποδείγματα χωρίς την κατανάλωση από το CCAPM? Γενικοί κανόνες

Παραγοντικά υποδείγματα χωρίς την κατανάλωση μπορούν να προκύψουν από το CCAPM αν η μεταβολή της κατανάλωσης έχει συσχέτιση με έναν παράγοντα κινδύνου ή μεταβλητή κατάστασης f:

$$\Delta c_{t+1} = g(f_{t+1}).$$

Ας θυμηθούμε ότι η βασική φόρμουλα αποτίμησης του υποδείγματος του καταναλωτή με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας είναι

$$E_t\left(R_{t+1}^i\right) - R_t^f = \gamma cov_t\left(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^i\right).$$

Ένα παραγοντικό υπόδειγμα χωρίς την κατανάλωση ως παράγοντα κινδύνου μπορεί να προκύψει με δύο τρόπους:

(α) υποθέτουμε κανονική από κοινού κατανομή των μεταβλητών και εφαρμόζουμε το **λήμμα του Stein** για να μετατρέψουμε το $cov_t\left(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^i\right)$ σε $cov_t\left(f_{t+1}, R_{t+1}^i\right)$.

(β) Παίρνουμε μια **γραμμική προσέγγιση Taylor 1^{ου} βαθμού** της συνάρτησης $\Delta c_{t+1} = g(f_{t+1})$.

Μέθοδος (α) Λήμμα του Stein:

Υποθέτοντας $\Delta c_{t+1} = g(f_{t+1})$ και εφαρμόζοντας το λήμμα του Stein έχουμε:

$$cov_t\left(g(f_{t+1}), R^i_{t+1}\right) = E_t(g')cov_t\left(R^i_{t+1}, f_{t+1}\right)$$

Άρα, παίρνουμε:

$$E_t\left(R^i_{t+1}\right) - R^f_t = \gamma E_t(g')cov_t\left(R^i_{t+1}, f_{t+1}\right)$$

Κατά συνέπεια, παίρνουμε ένα παραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης:

$$E_t\left(R^i_{t+1}\right) - R^f_t = \lambda_f \beta_{i,f}$$

στο οποίο το ασφάλιστρο ανά μονάδα κινδύνου είναι $\lambda_f = \gamma E_t(g')var_t(f)$, και η ποσότητα έκθεσης στον κίνδυνο είναι $\beta_{i,f} = cov_t\left(R^i_{t+1}, f_{t+1}\right)/var_t(f)$.

<u>Σημείωση:</u> Για να εφαρμόσουμε το Λήμμα του Stein, πρέπει να υποθέσουμε κανονική κατανομή. Γενικά όμως δεν είναι απαραίτητη αυτή η υπόθεση διότι μπορούμε να πάρουμε μια γραμμική προσέγγιση Taylor χωρίς να υποθέσουμε μια συγκεκριμένη κατανομή (Μέθοδος β).

Μέθοδος (β) γραμμική προσέγγιση Taylor 1ου βαθμού:

Η γραμμική προσέγγιση γύρω από ένα σημείο f_0 είναι:

$$g(f_{t+1}) = g(f_0) + g'(f_{t+1} - f_0) = k + g' f_{t+1}$$

όπου το $g' = g'(f_0)$ και $k = g(f_0) - \ g' f_0$ μια σταθερά.

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$E_t\left(R_{t+1}^i\right) - R_t^f \ = \gamma cov_t\left(\Delta c_{t+1,} R_{t+1}^i\right) = \gamma g' cov_t\left(f_{t+1}, R_{t+1}^i\right).$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με $var_t(f)$ παίρνουμε το παραγοντικό υπόδειγμα στο f.

Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων (CAPM)

Το CAPM προβλέπει ότι οι αναμενόμενες αποδόσεις σχετίζονται γραμμικά με την απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου:

$$E_t\left(R_{t+1}^i\right) = {R_{t+1}}^f + \lambda_t \beta_{i,w,t} \qquad (37)$$

Όπου λ_t είναι η τιμή του κινδύνου (κοινή σε όλα τα αξιόγραφα) και $\beta_{i,w,t} = cov\left(R_{t+1}^i, R_{t+1}^w\right)/var(R_{t+1}^w)$ είναι η ποσότητα κινδύνου (ο συντελεστής μιας γραμμικής παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων της απόδοσης στην απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου).

Σε όρους του SDF, το CAPM μπορεί να γραφεί ως:

$$M_{t+1} = \alpha - bR_{t+1}^w \qquad (38)$$

Όπου α και b είναι δυο σταθερές.

Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων (CAPM)

Απόδειξη:

Από την $E_t\left(R^i_{t+1}, M_{t+1}\right) = 1 \Rightarrow E_t\left(R^i_{t+1}\right) - R^f = -R^f cov_t\left(R^i_{t+1}, M_{t+1}\right)$.

Αντικαθιστώντας το M_{t+1} από την (38) και υπολογίζοντας την

συνδιακύμανση: $E_t\left(R^i_{t+1}\right) - R^f = R^f b cov_t\left(R^i_{t+1}, R^w_{t+1}\right)$.

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας τη δεξιά πλευρά με $var(R^w_{t+1})$:

$$E_t\left(R^i_{t+1}\right) = R^f + \lambda\beta_{i,w},$$

όπου $\lambda = bR^f\ var(R^w_{t+1})$ και $\beta_{i,w,t} = cov_t\left(R^i_{t+1}, R^w_{t+1}\right)/var(R^w_{t+1})$.

Όπως είπαμε παραπάνω, το υπόδειγμα CAPM, όπως και μια σειρά άλλα πολύ γνωστά υποδείγματα αποτίμησης στη χρηματοοικονομική, μπορεί να αναχθεί σε μια υποπερίπτωση του γενικού υποδείγματος του καταναλωτή (CCAPM), κάτω από κάποιους περιορισμούς. Συγκεκριμένα, μπορούμε να δείξουμε ότι το CAPM προκύπτει από το CCAPM κάτω από τις ακόλουθες εναλλακτικές υποθέσεις:

- Γενική συνάρτηση χρησιμότητας και κανονικές αποδόσεις με δύο περιόδους
- Λογαριθμική χρησιμότητα με άπειρο ορίζοντα

Οικονομική λογική

Αν ισχύει μια από τις δυο αυτές υποθέσεις, τότε ο στοχαστικός συντελεστές προεξόφλησης είναι συνάρτηση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου πλούτου, άρα ισχύει το CAPM. Συγκεκριμένα, για να προκύπτει το CAPM από το CCAPM, θα πρέπει να ισχύει ότι η μεταβολή της κατανάλωσης έχει τέλεια συσχέτιση με την απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου (απόδοση της αγοράς) $\Delta c = r^W$ και $var(\Delta c) = var(r^W)$.

Περίπτωση 1: Υπόδειγμα καταναλωτή με δύο περιόδους και περιορισμό πλούτου

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι γενικής μορφής με τα κοινώς αποδεκτά χαρακτηριστικά καμπυλότητας και κυρτότητας.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο καταναλωτής-επενδυτής γεννιέται με αρχικό πλούτο W_t και δεν έχει εισόδημα από εργασία. Κατά την περίοδο t ο καταναλωτής καταναλώνει ένα ποσό C_t του πλούτου και επενδύει το υπόλοιπο στο χαρτοφυλάκιο πλούτου. Κατά συνέπεια, ο πλούτος την επόμενη περίοδο, $t+1$, είναι: $W_{t+1} = R^w_{t+1}(W_t - C_t)$, όπου R^w_{t+1} είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου. Κατά την τελική περίοδο, $t+1$ ο επενδυτής καταναλώνει όλο τον εναπομένοντα πλούτο: $C_{t+1} = W_{t+1}$.

Ο οριακός λόγος υποκατάστασης είναι:

$$M_{t+1} = \beta \frac{u\prime(C_{t+1})}{u\prime(C_t)} = \beta \frac{u\prime\left(R^w_{t+1}(W_t - C_t)\right)}{u\prime(C_t)} = g(R^w_{t+1}) \qquad (42)$$

και το ασφάλιστρο κινδύνου είναι:

$$E_t\left(R^i_{t+1}\right) - R^f = -\frac{cov_t\left(M_{t+1}, R^i_{t+1}\right)}{E_t(M_{t+1})} \qquad (43)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι οι αποδόσεις του αξιογράφου και του χαρτοφυλακίου πλούτου ακολουθούν την κανονική κατανομή, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα του Stein για να υπολογίσουμε την $cov_t\left(M_{t+1}, R_{t+1}^i\right)$ όπου $M_{t+1} = g\left(R_{t+1}^i\right)$:

$$cov_t\left(M_{t+1}, R_{t+1}^i\right) = cov_t\left(g(R_{t+1}^w)R_t^i\right) = E_t[g']cov_t\left(R_{t+1,}^i R_{t+1}^w\right) \tag{44}$$

Όπου $E_t(g') = E_t\left[\frac{(W_t - C_t)\beta u''(C_{t+1})}{u'(C_t)}\right] < 0$ αν $W_t - C_t > 0$.

Αντικαθιστώντας την (44) στην (43) παίρνουμε το CAPM:

$$E_t\left(R_{t+1}^i\right) - R_t^f = \lambda_t \beta_{i,w,t}$$

όπου $\lambda_t = -E_t[g']var(R_{t+1}^w)/g$ και $\beta_{i,w,t} = cov\left(R_{t+1,}^i R_{t+1}^w\right)/var(R_{t+1}^w)$.

Περίπτωση 2: Λογαριθμική χρησιμότητα με άπειρο ορίζοντα

Υποθέτουμε ότι η χρησιμότητα είναι λογαριθμική, $u(C_t) = \ln(C_t)$, και οι καταναλωτές μεγιστοποιούν χρησιμότητα για κάθε χρονική περίοδο μέχρι το απώτερο μέλλον:

$$U(C) = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u\left(C_{t+j}\right)$$

Ο καταναλωτής μπορεί να επενδύσει στο χαρτοφυλάκιο πλούτου σε μια τιμή P_t^w ανά μονάδα πλούτου. Κάθε μονάδα πλούτου υπόσχεται στον καταναλωτή ένα μέρισμα D_{t+j} για κάθε μελλοντική περίοδο $t+j$. Όλα τα μερίσματα καταναλώνονται, δηλ. $D_{t+j} = C_{t+j}$. Εξισώνοντας την οριακή απώλεια χρησιμότητας από την αγορά μιας μονάδας πλούτου με την προεξοφλημένη μελλοντική χρησιμότητα από την κατανάλωση του μερίσματος, παίρνουμε:

$$P_t^w = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'\left(C_{t+j}\right)}{u'(C_t)} C_{t+j}$$

Επειδή με λογαριθμική χρησιμότητα, $u'(C_{t+j}) = 1/C_{t+j}$, παίρνουμε από την παραπάνω εξίσωση:

$$P_t^w = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{C_t}{C_{t+j}} C_{t+j} = \frac{\beta}{1-\beta} C_t \qquad (45)$$

Σύμφωνα με την (45), η τιμή του χαρτοφυλακίου πλούτου είναι γραμμική συνάρτηση της κατανάλωσης. Με άλλα λόγια, ο καταναλωτής καταναλώνει κάθε περίοδο ένα σταθερό ποσοστό του πλούτου του, $C_t = \frac{1-\beta}{\beta} P_t^w$. Για παράδειγμα, με β=0,96, $\frac{1-\beta}{\beta}$=0,041, δηλαδή ο καταναλωτής καταναλώνει 4,1% του πλούτου του κάθε περίοδο.

Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ απόδοσης και κατανάλωσης, χρησιμοποιούμε τον ορισμό της απόδοσης: $R_{t+1}^w = \frac{P_{t+1}^w + C_{t+1}}{P_t^w}$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα P_t^w και P_{t+1}^w από την (45) και έχουμε:

$$R_{t+1}^w = \frac{1}{\beta} \frac{C_{t+1}}{C_t}$$

Παίρνοντας λογαρίθμους έχουμε $\Delta c_{t+1} = \ln(\beta) + r_{t+1}^w$. Άρα, η μεταβολή της κατανάλωσης αντανακλά 1:1 τις αποδόσεις.

z_t .

Διαχρονικό CAPM (ICAPM)

Το διαχρονικό (Intertemporal) CAPM του Merton προκύπτει από το βασικό υπόδειγμα CCAPM κάτω από την πρόσθετη υπόθεση ότι η δεσμευμένη κατανομή των αποδόσεων είναι συνάρτηση ενός σετ μεταβλητών (state variables), z_t, οι οποίες σχετίζονται με μελλοντικές αλλαγές του σετ επενδυτικών ευκαιριών. Με άλλα λόγια, οι μεταβλητές αυτές έχουν προβλεπτική ικανότητα για τις μελλοντικές αποδόσεις. Καθώς η κατανάλωση καθορίζεται από τον πλούτο και οι μεταβλητές z_t προβλέπουν την απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου, άρα και την μελλοντική κατανάλωση, η συνάρτηση χρησιμότητας εξαρτάται από τον πλούτο και τις μεταβλητές z_t. Κατά συνέπεια, η value function είναι:

$$V\left(W_{t,}Z_t\right) = \max_{C_t}\left\{u(C_t) + \beta E_t\left[\max_{C_t+1,\dots,C_\infty} E_{t+1}\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j u\left(C_{t+j}\right)\right]\right\}$$
$$= \max_{C_t}\left\{u(C_t) + \beta E_t\left[V\left(W_{t+1,}Z_{t+1}\right)\right]\right\}$$

Ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης από το πρόβλημα αυτό είναι:

$$M_{t+1} = \beta\frac{V_w\left(W_{t+1,}Z_{t+1}\right)}{V_w\left(W_{t,}Z_t\right)} \qquad (46)$$

όπου εφαρμόσαμε το envelope condition $u'(C_t) = V_w\left(W_{t,}Z_t\right)$ για να αντικαταστήσουμε την οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης με την οριακή χρησιμότητα του πλούτου.

Για να πάρουμε ένα παραγοντικό υπόδειγμα, μπορούμε να προσεγγίσουμε γραμμικά την (46):

$$M_{t+1} = a + b_1 R_{t+1}^{w} + b_2 Z_{t+1}$$

και να γράψουμε το παραγοντικό υπόδειγμα:

$$E_t\left(R_{t+1}^{i}\right) = R_t^{f} + \lambda_1 \beta_{i,w} + \lambda_2 \beta_{i,z} \qquad (47)$$

Η (47) είναι το διαχρονικό CAPM του Merton. Σύμφωνα με την (47), το ασφάλιστρο κινδύνου είναι πέρα από τον κίνδυνο αγοράς συνάρτηση μιας σειράς άλλων κινδύνων οι οποίοι σχετίζονται με την μη προβλέψιμη αλλαγή των παραγόντων z_t .

Δεσμευμένα και αδέσμευτα υποδείγματα αποτίμησης

Όλα τα υποδείγματα αποτίμησης που εξετάσαμε ως τώρα είναι δεσμευμένα (στην διαθέσιμη πληροφόρηση) υπό την έννοια ότι καθορίζουν το αναμενόμενο ασφάλιστρο κινδύνου των αξιογράφων στο χρόνο t+1 δεδομένης της πληροφόρησης των επενδυτών στο χρόνο t. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε τον δεσμευμένο μέσο της απόδοσης: $\boldsymbol{E_t}(\boldsymbol{R^i_{t+1}})$.

Για παράδειγμα, το CAPM προβλέπει ότι το (αναμενόμενο με βάση την πληροφόρηση στο χρόνο t) ασφάλιστρο κινδύνου ενός αξιόγραφου *i*, $\boldsymbol{E_t}\left(\boldsymbol{R^i_{t+1}}\right) - \boldsymbol{R^f_t}$, σχετίζεται γραμμικά με το ασφάλιστρο κινδύνου του χαρτοφυλακίου πλούτου, $\boldsymbol{E_t}(\boldsymbol{R^w_{t+1}}) - \boldsymbol{R^f_t}$

$$\boldsymbol{E_t}\left(\boldsymbol{R^i_{t+1}}\right) - \boldsymbol{R^f_t} = \beta_{i,w,t}(\boldsymbol{E_t}(\boldsymbol{R^w_{t+1}}) - \boldsymbol{R^f_t}) \qquad (37)$$

Όπου $\beta_{i,w,t} = cov(R^i_{t+1}, R^w_{t+1})/var(R^w_{t+1})$ είναι το beta του αξιογράφου, δηλ. ο συντελεστής μιας γραμμικής παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων της αναμενόμενης υπερβάλλουσας απόδοσης του αξιογράφου στην αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου.

Το πρόβλημα με την οικονομετρική εκτίμηση του δεσμευμένου υποδείγματος (37) είναι ότι οι αναμενόμενες αποδόσεις τόσο του αξιογράφου όσο και του χαρτοφυλακίου πλούτου δεν είναι παρατηρήσιμες. Για το λόγο αυτό, μεγάλος αριθμός εμπειρικών ερευνών έχει επικεντρωθεί στην εκτίμηση του αδέσμευτου υποδείγματος

$$E\left(\boldsymbol{R_{t+1}^{i}}\right) - \boldsymbol{R_t^f} = \beta_{i,w}\left(E(\boldsymbol{R_{t+1}^{w}}) - \boldsymbol{R_t^f}\right) \qquad (37')$$

Όπου $E(\boldsymbol{R_{t+1}^{i}})$**,** $E(\boldsymbol{R_{t+1}^{w}})$ είναι ο αδέσμευτος (δειγματικός) μέσος της απόδοσης του αξιόγραφου i και του χαρτοφυλακίου πλούτου αντίστοιχα και το $\beta_{i,w}$ είναι το μέσο δειγματικό beta, δηλ. ο λόγος της αδέσμευτης συνδιακύμανσης προς την αδέσμευτη διακύμανση.

Το πρόβλημα που προκύπτει είναι προφανώς ότι η επεξηγηματική ικανότητα του αδέσμευτου υποδείγματος (37’) είναι ανεπαρκής παρότι το δεσμευμένο υπόδειγμα μπορεί να είναι το αληθινό υπόδειγμα σύμφωνα με το οποίο οι επενδυτές εκτιμούσαν τα ασφάλιστρα κινδύνου.

Ο λόγος είναι ότι στην πραγματικότητα (δηλ. στην δεσμευμένη μορφή (37) του υποδείγματος) το ασφάλιστρο κινδύνου των αξιογράφων είναι κυμαινόμενα στο χρόνο καθώς τόσο το beta όσο και το ασφάλιστρο κινδύνου του χαρτοφυλακίου πλούτου είναι κυμαινόμενα, ενώ στην αδέσμευτη μορφή (37') η διακύμανση αυτή στο χρόνο χάνεται καθώς παίρνουμε τους αδέσμευτους αριθμητικούς μέσους.

Πιο συγκεκριμένα, αν η διακύμανση του beta στο χρόνο είναι συνάρτηση κάποιου παράγοντα κινδύνου z, τότε το αδέσμευτο υπόδειγμα (37') είναι λάθος διότι δεν συμπεριλαμβάνει στη δεξιά πλευρά την συνδιακύμανση του ασφάλιστρου κινδύνου του χαρτοφυλακίου πλούτου με το z (βλ. Jagannathan & Wang 1996).

Για να το δείξουμε αυτό, έστω ότι το αληθινό υπόδειγμα αποτίμησης είναι το μονοπαραγοντικό υπόδειγμα CAPM (37) και έστω ότι το beta είναι μια συνάρτηση ενός παράγοντα κινδύνου z:

$$\beta_{i,w,t} = \bar{\beta}_{i,w} + f_i(z_t) \qquad (52)$$

όπου $\bar{\beta}_{i,w}$ είναι το μέσο beta (μια σταθερά), το z_t είναι ένας παράγοντας κινδύνου της συνολικής αγοράς (με μέσο = 0), ο οποίος συσχετίζεται με το ασφάλιστρο κινδύνου του χαρτοφυλακίου πλούτου, δηλ.$cov(z_t, R_{t+1}^e) \neq 0 \; \kappa\alpha\iota \; \mathrm{E}(f_i(0)) = 0$.

Τέτοιες μεταβλητές μπορεί να είναι μεταβλητές που σχετίζονται με τον οικονομικό κύκλο όπως η κλίση της καμπύλης επιτοκίων, το ασφάλιστρο κινδύνου εταιρικών ομολόγων, η διακύμανση της αγοράς κλπ.

Η (52) υποθέτει ότι η έκθεση στο κίνδυνο της αγοράς του αξιογράφου i (beta) είναι συνάρτηση ενός παράγοντα z.

Για παράδειγμα, μετοχές με μεγάλη μόχλευση μπορεί να είναι πιο ευαίσθητες σε αλλαγές των επιτοκίων από ότι μετοχές με μικρή μόχλευση, μετοχές εταιριών καταναλωτικών αγαθών μπορεί να είναι πιο ευαίσθητες σε αλλαγές του ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ από μετοχές εταιριών με μικρότερη εξάρτηση από τον οικονομικό κύκλο κλπ.

Αντικαθιστώντας την (52) στην (37), έχουμε

$$\boldsymbol{E_t}\left(\boldsymbol{R^i_{t+1}}\right) - \boldsymbol{R^f_t} = (\bar{\beta}_{i,w} + f_i(z_t))(\boldsymbol{E_t}(\boldsymbol{R^w_{t+1}}) - \boldsymbol{R^f_t}) \tag{53}$$

Στη συνέχεια παίρνουμε τον αδέσμευτο μέσο της (53), εφαρμόζοντας τον κανόνα $E(E_t(\boldsymbol{R^i_{t+1}})) = E(\boldsymbol{R^i_{t+1}})$:

$$E\left(\boldsymbol{R^i_{t+1}}\right) - \boldsymbol{R^f_t} = \bar{\beta}_{i,w}(E(\boldsymbol{R^w_{t+1}}) - \boldsymbol{R^f_t}) + E(f_i(z_t)(\boldsymbol{R^w_{t+1}} - \boldsymbol{R^f_t})) \tag{53'}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα 4 (λήμμα του Stein) για να υπολογίσουμε το $E\left(f_i(z_t)\left(\boldsymbol{R_{t+1}^w} - \boldsymbol{R_t^f}\right)\right)$, καταλήγουμε στο εξής αδέσμευτο υπόδειγμα με δύο παράγοντες κινδύνου:

$$E\left(\boldsymbol{R_{t+1}^i}\right) - \boldsymbol{R_t^f} = \bar{\beta}_{i,w}(E(\boldsymbol{R_{t+1}^w}) - \boldsymbol{R_t^f}) + \bar{\beta}_{z,w}\lambda_i \qquad (54)$$

Όπου $\bar{\beta}_{z,w} = cov(z_t,\ \boldsymbol{R_{t+1}^w} - \boldsymbol{R_t^f})/var(\boldsymbol{R_{t+1}^w} - \boldsymbol{R_t^f})$ το beta του ασφάλιστρου κινδύνου του χαρτοφυλακίου πλούτου με το z_t, το οποίο είναι κοινό για όλα τα αξιόγραφα, και $\lambda_i = E\left(f_i'(z_t)\right)var(\boldsymbol{R_{t+1}^w} - \boldsymbol{R_t^f})$ η τιμή του κινδύνου z, η οποία είναι διαφορετική για κάθε αξιόγραφο και εξαρτάται από το βαθμό έκθεσης του αξιόγραφο στον συγκεκριμένο κίνδυνο.

Γενικότερα, αν υποθέσουμε ότι οι παράγοντες κινδύνου είναι k τότε το $\boldsymbol{z}_t$ είναι ένα διάνυσμα (kx1) και κατά συνέπεια το μονοπαραγοντικό δεσμευμένο υπόδειγμα (37) ισοδυναμεί με ένα αδέσμευτο k+1 παραγοντικό υπόδειγμα

$$\overline{R_{t+1}^{e,i}} = \overline{\beta_{i,w}}\,\overline{R_{t+1}^{e,w}} + \overline{\beta_{z,w}}\lambda \qquad (55)$$

όπου $\overline{\beta_{z,w}}$ ένα διάνυσμα (kx1) των betas του ασφάλιστρου κινδύνου με τους k παράγοντες και λ ένα διάνυσμα (kx1) των ασφάλιστρων κινδύνου των παραγόντων.

Το υπόδειγμα του καταναλωτή με μακροχρόνιους κινδύνους κατανάλωσης

Οικονομική λογική:

- Στο υπόδειγμα CCAPM, οι καταναλωτές αποτιμούν τον κίνδυνο μιας βραχυχρόνιας μεταβολής της κατανάλωσης.
- Μια εναλλακτική υπόθεση είναι ότι οι καταναλωτές ενδιαφέρονται (και) για την μακροχρόνια κατανάλωση τους.
- Το ερώτημα που προκύπτει είναι γιατί οι καταναλωτές να ενδιαφέρονται για την μακροχρόνια πορεία της κατανάλωσης.
- Αυτό μπορεί να συμβαίνει όταν ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης είναι μακροχρόνια προβλέψιμος (άρα, η κατανάλωση δεν είναι ένας τυχαίος περίπατος).
- Αν μια διαταραχή σήμερα αλλάζει τον μακροχρόνιο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης, τότε οι καταναλωτές θα θέλουν να προστατευθούν από αυτόν τον κίνδυνο.
- Κατά συνέπεια, θα επιλέξουν κατά προτίμηση αξιόγραφα τα οποία έχουν χαμηλή συσχέτιση με διαταραχές του μακροχρόνιου ρυθμού μεταβολής της κατανάλωσης.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι οι καταναλωτές ενδιαφέρονται για την κατανάλωση όχι μόνο της επόμενης περιόδου αλλά για την κατανάλωση στις επόμενες k περιόδους (το k μπορεί να είναι π.χ. 3 ή 5 με ετήσια δεδομένα, δηλ. οι καταναλωτές ενδιαφέρονται για την κατανάλωσή τους για τα επόμενα 3-5 χρόνια).

Τότε, με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας, $M_{t+1} = \beta(C_{t+k}/C_t)^{-\gamma}$, η σχέση (16) γίνεται:

$$E\left(R_{t+1}^{i}\right) = R_t^f + \beta_{i,\Delta c,k}\lambda_{\Delta c,k}$$
$$\lambda_{\Delta c,k} = \gamma\, var(C_{t+k} - C_t),$$
$$\beta_{i,\Delta c,k} = \frac{cov\left(R_{t+1}^{i}, C_{t+k} - C_t\right)}{var(C_{t+k} - C_t)}$$

Το παραπάνω υπόδειγμα είναι το μακροχρόνιο CCAPM. Στο υπόδειγμα αυτό, το β ενός αξιογράφου (ποσότητα κινδύνου που περιέχει) καθορίζεται από την συνδιακύμανση των αποδόσεων του αξιογράφου με την μακροχρόνια μεταβολή της κατανάλωσης (από σήμερα έως k περιόδους στο μέλλον).

Αντίστοιχα, η τιμή κινδύνου λ είναι γραμμική συνάρτηση της μακροχρόνιας διακύμανσης της κατανάλωσης. Στο υπόδειγμα αυτό, ο κίνδυνος για τους επενδυτές είναι η μακροχρόνια πορεία της κατανάλωσης.

Η παραπάνω παρουσίαση του υποδείγματος του καταναλωτή με μακροχρόνιους κινδύνους είναι πολύ σχηματική. Οι Bansal & Yaron (2004) πρότειναν ένα υπόδειγμα με μακροχρόνιους κινδύνους κατανάλωσης.

Το υπόδειγμα των Bansal Yaron (2004)

Οι Bansal και Yaron (2004) δείχνουν ότι αν η κατανάλωση είναι σε κάποιο βαθμό προβλέψιμη μακροχρόνια, τότε αλλαγές στις προσδοκίες σχετικά με τον μακροχρόνιο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης αποτελούν μια πηγή κινδύνου πέρα από άμεσες μεταβολές της κατανάλωσης.

Μικρές μεταβολές του μακροχρόνιου ρυθμού κατανάλωσης μπορεί να οδηγήσουν σε σχετικά μεγάλες μεταβολές στις τιμές των αξιόγραφων διότι προεξοφλούνται για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

Κατά συνέπεια, το ασφάλιστρο κινδύνου των αξιόγραφων είναι συνάρτηση της συνδιακύμανσης των αποδόσεων με διαταραχές στον μακροχρόνιο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης πέρα από την συνδιακύμανση των αποδόσεων με διαταραχές στον βραχυχρόνιο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης.

Οι Bansal και Yaron (2004) υποθέτουν ότι η κατανάλωση ακολουθεί την στοχαστική διαδικασία

$$\Delta c_{t+1} = x_t + \varepsilon_{t+1}$$
$$x_{t+1} = \rho x_t + u_{t+1}$$

όπου x_t είναι μια μεταβλητή κατάστασης η οποία έχει προβλεπτική ικανότητα για την κατανάλωση.

Οι συγγραφείς υποθέτουν ότι η x_t είναι μη παρατηρήσιμη, όμως αξίζει να σημειωθεί ότι σε εμπειρικές εφαρμογές μπορεί να αντικατασταθεί με οποιαδήποτε μακροοικονομική μεταβλητή η οποία έχει προβλεπτική ικανότητα για την κατανάλωση.

Για να αντιληφθούμε την έννοια του μακροχρόνιου κινδύνου στο υπόδειγμα των Bansal και Yaron (2004), αντικαθιστούμε την στοχαστική διαδικασία της x στην στοχαστική διαδικασία της Δc :

$$\Delta c_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + \frac{u_t}{1-\rho L} = \varepsilon_{t+1} + u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \cdots$$

Ας υποθέσουμε ότι στο t η x μεταβάλλεται κατά 1 μονάδα, $u_t = 1$, ενώ $u_{\tau<t} = 0$.

Η αναμενόμενη μεταβολή της κατανάλωσης θα είναι:

$$\begin{aligned} &E_t \Delta c_{t+1} = 1 \\ &E_t \Delta c_{t+2} = \rho \\ &E_t \Delta c_{t+3} = \rho^2 \\ &\ldots \\ &E_t \Delta c_{t+1+j} = \rho^j \end{aligned}$$

Η σωρευτική αναμενόμενη μεταβολή της κατανάλωσης θα είναι:

$$\sum_{j=0}^{\infty} E_t \Delta c_{t+1+j} = 1 + \rho + \rho^2 + \cdots = \frac{1}{1-\rho}$$

Αν $\rho \prec 1$, αλλά κοντά στην μονάδα, η σωρευτική μεταβολή της κατανάλωσης μπορεί είναι πολύ μεγάλη. Με άλλα λόγια, μια μικρή μεταβολή στην x σήμερα μπορεί να προκαλέσει μακροχρόνια πολύ μεγάλη μεταβολή στην κατανάλωση αν η x χαρακτηρίζεται από εμμονή (persistence).

Η μεταβολή της κατανάλωσης είναι προβλέψιμη δεδομένης της πληροφόρησης έως το χρόνο t. Ο μακροχρόνιος κίνδυνος προέρχεται από μη προβλέψιμες μεταβολές της x στον χρόνο t+1, οι οποίες μπορεί να προκαλέσουν μακροχρόνιες μεταβολές στην κατανάλωση.

Για τον καθορισμό του ασφάλιστρου κινδύνου προκύπτει από το υπόδειγμα:

$$E_t\left(r_{i,t+1}^e\right) + \frac{1}{2}Var_t\left(r_{i,t+1}\right) = B_1 Cov_t\left(r_{i,t+1}, \varepsilon_{t+1}\right) + B_2 Cov_t\left(r_{i,t+1}, u_{t+1}\right)$$

όπου B_1 και B_2 είναι δυο σταθερές. Τα ασφάλιστρα κινδύνου στο υπόδειγμα αυτό είναι δύο: (α) ένα ασφάλιστρο για τον κίνδυνο μιας βραχυπρόθεσμης αλλαγής της κατανάλωσης, $Cov_t\left(r_{i,t+1}, \varepsilon_{t+1}\right)$, και (β) ένα ασφάλιστρο για τον κίνδυνο μιας μακροπρόθεσμης αλλαγής της κατανάλωσης, $Cov_t\left(r_{i,t+1}, u_{t+1}\right)$.

Εμπειρικοί έλεγχοι

1. Διαστρωματικοί έλεγχοι του CCAPM

Οικονομετρικές μέθοδοι

Το υπόδειγμα αποτίμησης CCAPM μας λέει ότι αξιόγραφα που έχουν μεγαλύτερη συνδιακύμανση με την κατανάλωση θα πρέπει να έχουν και υψηλότερα ασφάλιστρα κινδύνου, άρα υψηλότερες αναμενόμενες αποδόσεις:

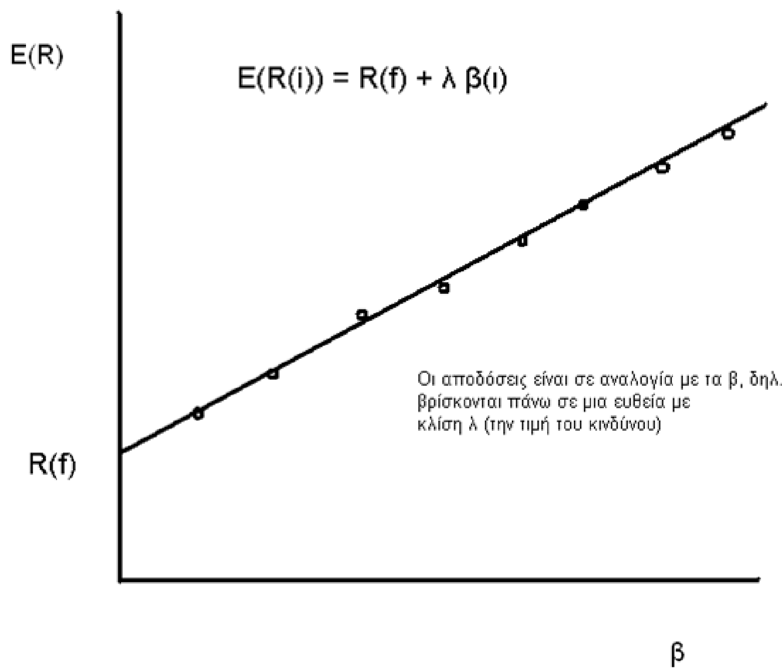
$$E_t\left(R_{t+1}^i\right) = R_t^f + \beta_{i,\Delta c,t}\lambda_{\Delta c,t} \,.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε σημείο t στο χρόνο. Πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε το υπόδειγμα; Το πρόβλημα που προκύπτει είναι ότι το υπόδειγμα (όπως όλα τα υποδείγματα αποτίμησης) είναι σε όρους προσδοκιών, δεσμευμένων στη διαθέσιμη πληροφόρηση σε κάθε χρονικό σημείο t.

Οι προσδοκίες των επενδυτών είναι όμως μια μη μετρήσιμη ποσότητα. Για παράδειγμα, το $E_t\left(R_{t+1}^i\right)$ είναι η αναμενόμενη απόδοση με βάση την πληροφόρηση στο t. Το ίδιο ισχύει και για τις ποσότητες $\beta_{i,\Delta c,t}\lambda_{\Delta c,t}$, οι οποίες αλλάζουν στο χρόνο καθώς αλλάζει η οικονομική αβεβαιότητα, $\mathrm{var}_t(\Delta c_{t+1})$ και η συνδιακύμανση των αποδόσεων με την κατανάλωση, $\mathrm{cov}_t\,(R_{t+1}, \Delta c_{t+1})$.

Μια λύση είναι να εκτιμήσουμε το υπόδειγμα χρησιμοποιώντας τις αδέσμευτες ροπές, δηλ. να ελέγξουμε αν σε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα το υπόδειγμα εξηγεί τις μέσες αποδόσεις των αξιογράφων. Ο έλεγχος αυτός είναι διαστρωματικός. Αν τα ασφάλιστρα κινδύνου καθορίζονται σύμφωνα με το υπόδειγμα CCAPM, τότε όλες οι αποδόσεις θα βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με κλίση την τιμή του κινδύνου, λ.

Αν το υπόδειγμα αποτίμησης του καταναλωτή εξηγεί τις αποδόσεις Κ αξιογράφων i=1, … , K, τότε στο χώρο $E(R_i) - \beta_i$, η αναμενόμενη (μέση) απόδοση κάθε αξιογράφου i, $E(R_i)$ θα βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία με κλίση λ που θα ξεκινάει από το R^f. Η ευθεία αυτή ονομάζεται “security market line”.



Η μέθοδος που έχει εφαρμοστεί στη βιβλιογραφία για τον διαστρωματικό έλεγχο υποδειγμάτων αποτίμησης είναι η λεγόμενη μέθοδος Fama-MacBeth και αποτελείται από δύο βήματα.

Έστω ότι έχουμε αποδόσεις K αξιογράφων (ή χαρτοφυλακίων) για T περιόδους στο χρόνο (t=1,…,T). Για το ίδιο διάστημα, έχουμε επίσης παρατηρήσεις για την μεταβολή της κατανάλωσης, Δc (ή κάποιας μεταβλητής - παράγοντα κινδύνου f αν πρόκειται για ένα άλλο υπόδειγμα αποτίμησης).

1. Εκτίμησε τα β_i των αξιογράφων εκτιμώντας στο χρόνο (t=1,…, T) τις παλινδρομήσεις $R_{t+1}^i = c_i + \beta_{i,\Delta c}\Delta c_{t+1} + u_{t+1}$ για κάθε αξιόγραφο i ξεχωριστά (c_i μια σταθερά).
2. Έχοντας εκτιμήσει τα $\beta_{i,\Delta c}$ στο βήμα 1, εκτίμησε την τιμή κινδύνου λ μέσω της διαστρωματικής παλινδρόμησης $R^i - R^f = \alpha_i + \beta_{i,\Delta c}\lambda_{\Delta c}$, χρησιμοποιώντας τη μέση δειγματική απόδοση R^i των i = 1,…,K αξιογράφων (τους μέσους στο δείγμα t = 1, … , T) και το μέσο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, R^f.

$$R^i - R^f = \alpha_i + \beta_{i,\Delta c}\lambda_{\Delta c}$$

Τα α_i στην παραπάνω παλινδρόμηση είναι τα λάθη αποτίμησης του υποδείγματος, δηλ. η απόκλιση της κάθε απόδοσης από το εκτιμώμενο ασφάλιστρο κινδύνου. Αν το υπόδειγμα εξηγεί τις αποδόσεις, θα πρέπει τα λάθη α_i να είναι κατά μέσο όρο μηδέν και στατιστικά μη σημαντικά.

Η μέθοδος των Fama-MacBethμπορεί να εφαρμοστεί γενικότερα για το έλεγχο οποιουδήποτε υποδείγματος αποτίμησης.

Σημείωση: Σε αντίθεση με το θεωρητικό υπόδειγμα, όπου τα β και λ έχουν διακύμανση στο χρόνο, στο εμπειρικό υπόδειγμα τα β και λ είναι δυο σταθερές. Καθώς το εμπειρικό υπόδειγμα εκτιμάται με τους διαστρωματικούς μέσους των αποδόσεων, τα β και λ είναι και αυτά οι δειγματικοί μέσοι των αναμενόμενων β και λ σε κάθε σημείο στο χρόνο (βλέπε το κεφάλαιο «Δεσμευμένα και αδέσμευτα υποδείγματα αποτίμησης» για περισσότερες λεπτομέρειες).

Το cross section των αποδόσεων των μετοχών

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την μέση απόδοση των 25 μετοχικών χαρτοφυλακίων των Fama και French. Τα δεδομένα είναι από το site του Kenneth French (http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html).

Average annual real returns 1927-2010. 25 Fama-French portfolios

	growth	2	3	4	value
small	4.6	10.4	13.7	16.5	19.6
2	8.1	12.8	14.3	15.2	16.0
3	9.3	11.9	13.2	13.6	15.1
4	9.0	10.0	11.7	12.8	13.8
large	8.1	7.8	9.0	9.2	13.1

Οι εταιρίες κατατάσσονται σε 25 χαρτοφυλάκια σύμφωνα με δυο χαρακτηριστικά, το μέγεθος και το λόγο λογιστικής αξίας προς αγοραία αξία (BM: Book-to-Market). Η πρώτη σειρά δείχνει τις μέσες αποδόσεις των μικρών εταιριών, η δεύτερη των αμέσως μεγαλύτερων, κλπ. Η τελευταία σειρά δείχνει τις αποδόσεις των μεγάλων εταιριών. Η πρώτη στήλη δείχνει τις μέσες αποδόσεις των εταιριών με χαμηλό BM (growth), η δεύτερη στήλη δείχνει την μέση απόδοση των εταιριών με το αμέσως υψηλότερο BM και η τελευταία στήλη την μέση απόδοση των εταιριών με το υψηλότερο BM (value). Ο πίνακας δείχνει ότι μικρές εταιρίες είχαν υψηλότερες μέσες αποδόσεις από μεγάλες εταιρίες --με εξαίρεση τις μικρές εταιρίες με χαμηλό BM — (size premium) και εταιρίες με υψηλό BM είχαν υψηλότερες αποδόσεις από εταιρίες με χαμηλό BM (value premium).

Το cross section των Betas του CCAPM

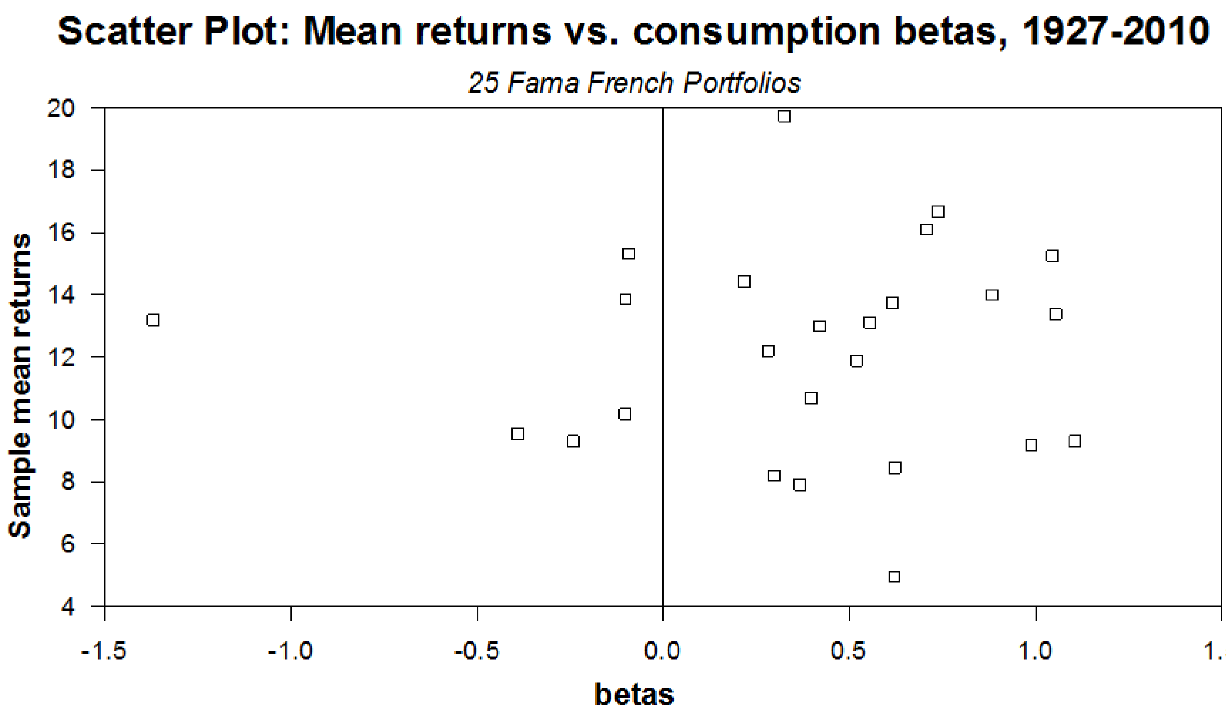
Σύμφωνα με το CCAPM, μετοχές με υψηλή συσχέτιση με την κατανάλωση πρέπει να έχουν υψηλότερα ασφάλιστρα κινδύνου, άρα υψηλότερες μέσες αποδόσεις. Μπορεί το CCAPM να εξηγήσει το cross section των μέσων αποδόσεων μετοχικών χαρτοφυλακίων; Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα beta των μετοχικών χαρτοφυλακίων Fama French ως προς την κατανάλωση.

Consumption betas. 25 Fama-French portfolios, 1927-2010

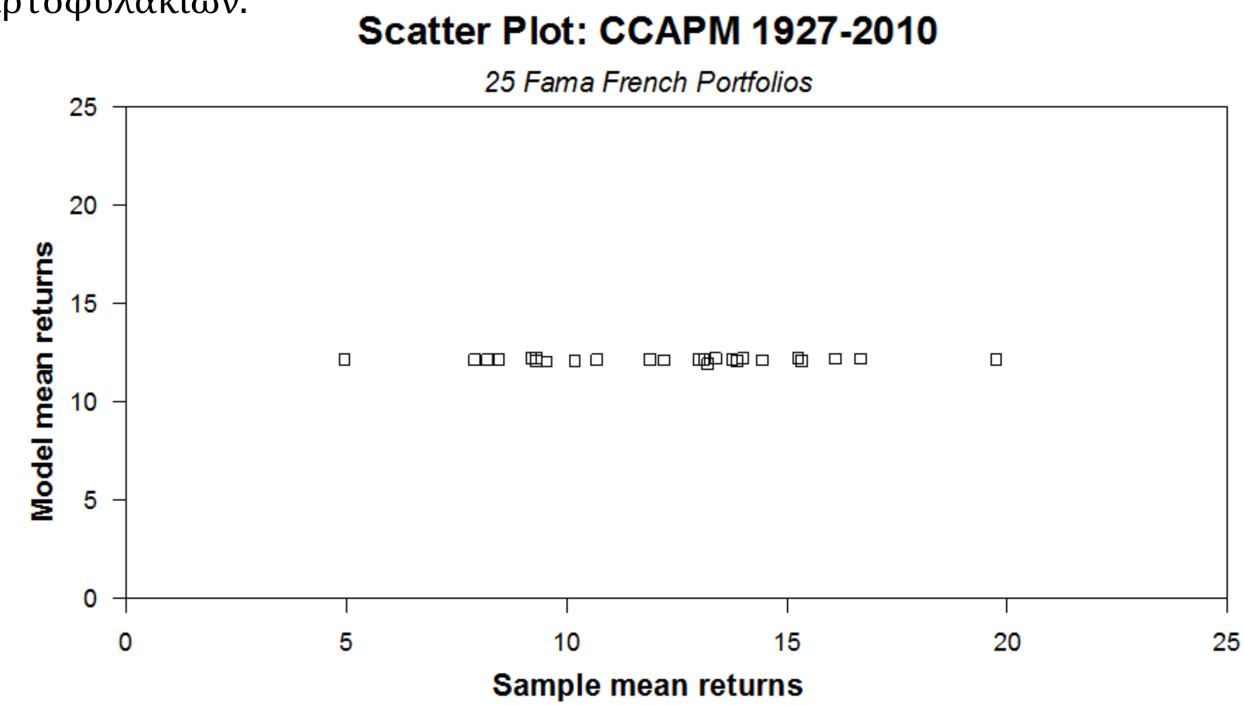
	growth	**2**	**3**	**4**	**value**
small	0.62	0.40	0.88	0.74	0.33
2	0.62	0.55	0.22	-0.09	0.71
3	-0.39	0.28	1.05	0.62	1.04
4	-0.24	-0.10	0.52	0.42	-0.10
large	0.30	0.37	0.99	1.11	-1.37

Η πρώτη ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι, με ελάχιστες εξαιρέσεις, όλα τα χαρτοφυλάκια έχουν θετικά β, δηλ. οι μετοχές πρέπει να έχουν ένα θετικό ασφάλιστρο κινδύνου. Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι οι διαφορές των β μεταξύ τους δεν είναι αρκετά μεγάλες ώστε να δικαιολογούν τις διαφορές στα ασφάλιστρα κινδύνου μεταξύ μικρών και μεγάλων εταιριών (size premium) και εταιριών με υψηλό BM έναντι εταιριών με χαμηλό BM (value premium).

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις μέσες αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων (κάθετος άξονας) και τα β των χαρτοφυλακίων με την κατανάλωση (οριζόντιος άξονας). Αν το CCAPM εξηγούσε τις μέσες αποδόσεις διαστρωματικά, θα έπρεπε να υπάρχει μια καθαρή θετική συσχέτιση μεταξύ των μέσων αποδόσεων και των β, δηλ. όλα τα σημεία να βρίσκονται γύρω από μια γραμμή με θετική κλίση. Αυτό δεν συμβαίνει. Τα σημεία είναι τυχαία διασπαρμένα στο διάγραμμα.



Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις μέσες αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων (οριζόντιος άξονας) και τα ασφάλιστρα κινδύνου (λ*β) των χαρτοφυλακίων σύμφωνα με το υπόδειγμα του καταναλωτή (κάθετος άξονας). Αν το CCAPM εξηγούσε τις μέσες αποδόσεις διαστρωματικά, θα έπρεπε όλα τα σημεία να βρίσκονται γύρω από μια γραμμή με κλίση 90^o. Αντίθετα, το διάγραμμα δείχνει ότι, όλα τα χαρτοφυλάκια θα έπρεπε να έχουν σχεδόν το ίδιο ασφάλιστρο κινδύνου. Τα σημεία βρίσκονται όλα πάνω σε μια παράλληλη ευθεία (με κλίση 0). Το υπόδειγμα δεν είναι σε θέση να εξηγήσει τις αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων.



Ο λόγος είναι ότι οι διαφορές στα β με την κατανάλωση μεταξύ των 25 χαρτοφυλακίων είναι πολύ μικρές για να εξηγήσουν τις διαφορές στις αποδόσεις τους. Ένα καλό υπόδειγμα πρέπει να παράγει μεγάλες διαφορές στα β για να εξηγήσει τις μεγάλες διαφορές στις διαστρωματικές αποδόσεις.

Μακροχρόνιοι οικονομικοί κίνδυνοι

Ένας πιθανός λόγος αποτυχίας του υποδείγματος του καταναλωτή να εξηγήσει τις διαστρωματικές αποδόσεις των μετοχών είναι ότι η συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων και της μεταβολής της κατανάλωσης στην ίδια περίοδο είναι χαμηλή. Η κατανάλωση αντιδρά με μεγάλη υστέρηση σε μεταβολές των αποδόσεων, γι αυτό και η συσχέτισή τους την ίδια περίοδο είναι πολύ μικρή. Μια εναλλακτική ερμηνεία είναι ότι οι καταναλωτές ενδιαφέρονται για την μακροπρόθεσμη κατανάλωση τους, δηλ. την κατανάλωση στις επόμενες k περιόδους (το k μπορεί να είναι π.χ. 3 ή 5 με ετήσια δεδομένα, δηλ. οι καταναλωτές ενδιαφέρονται για την κατανάλωσή τους για τα επόμενα 3-5 χρόνια).

Το cross section των Betas του μακροχρόνιου CCAPM

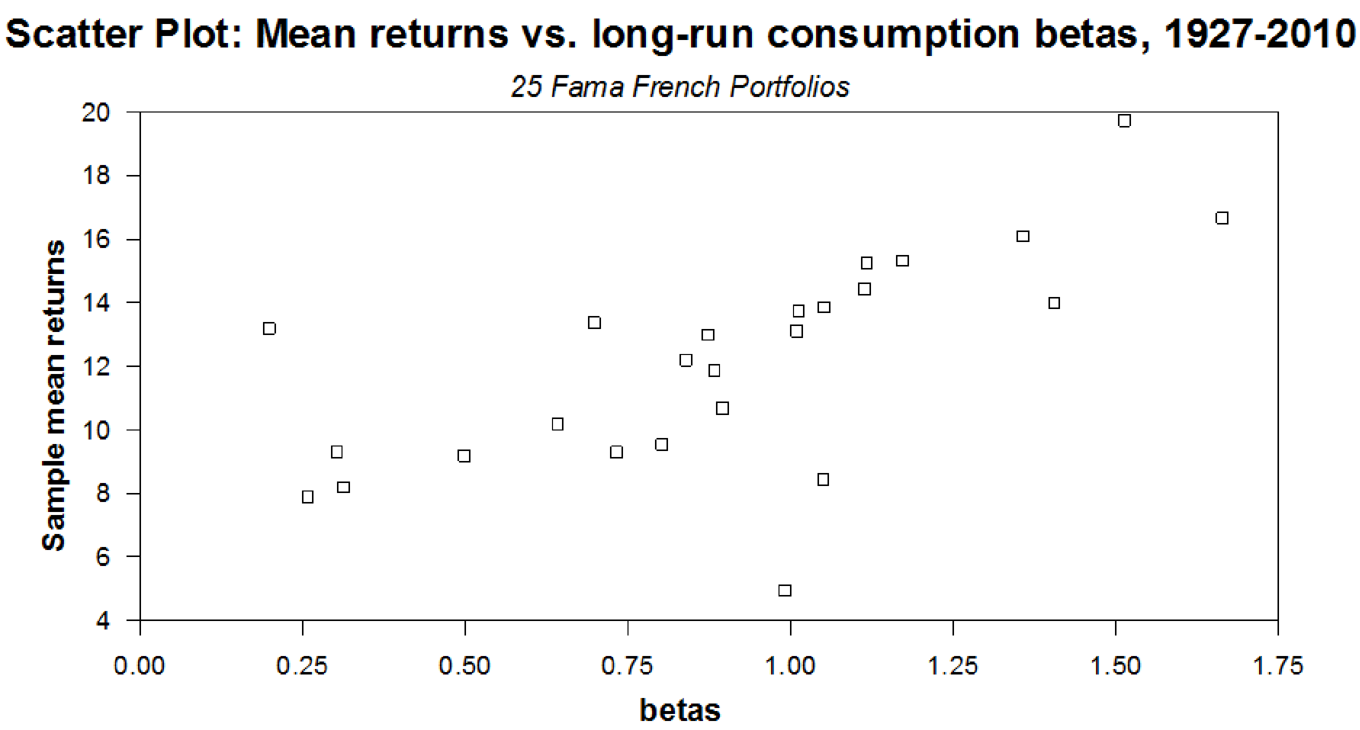
Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα beta των μετοχικών χαρτοφυλακίων Fama French ως προς την μεταβολή της κατανάλωσης τα επόμενα 5 χρόνια.

Long-run consumption betas. 25 Fama-French portfolios, 1927-2010

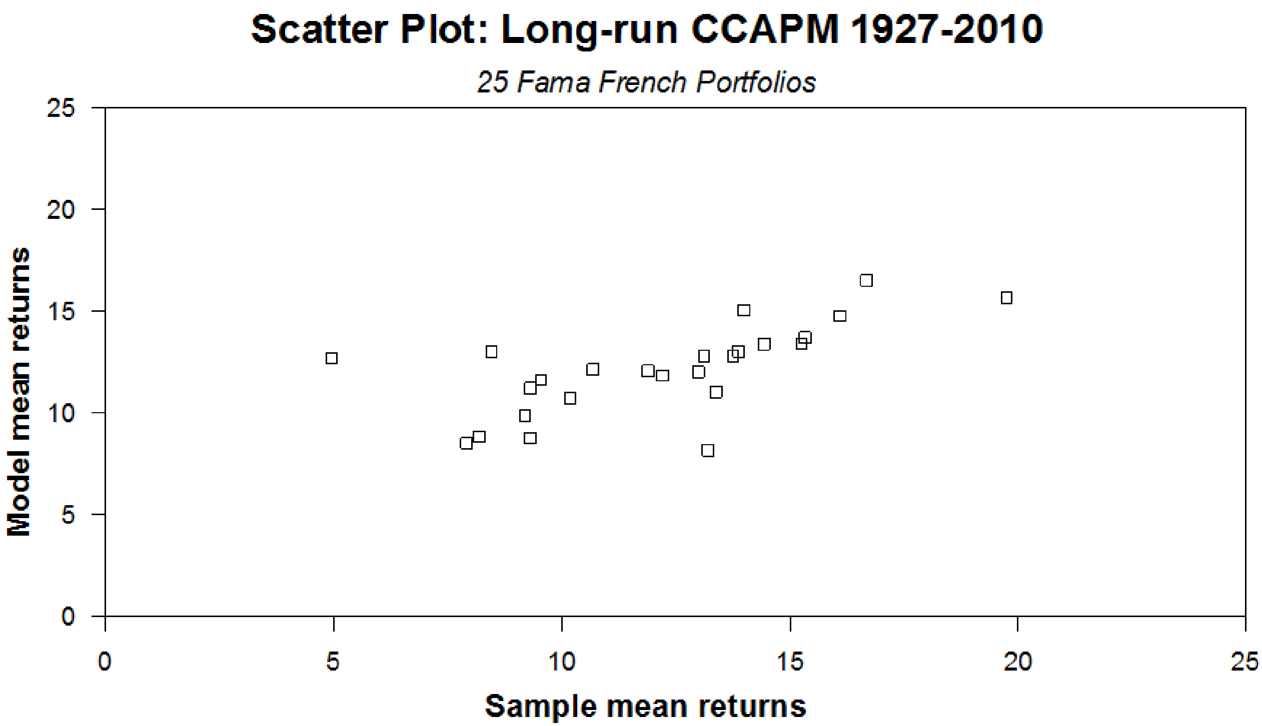
	growth	**2**	**3**	**4**	**value**
small	0.99	0.89	1.40	1.66	1.51
2	1.05	1.01	1.11	1.17	1.36
3	0.80	0.84	0.70	1.01	1.12
4	0.30	0.64	0.88	0.87	1.05
large	0.31	0.26	0.50	0.73	0.20

Τα β είναι πολύ υψηλότερα από τα β του απλού CCAPM. Επίσης, το λ είναι πολύ υψηλότερο (5,7 έναντι 0,12 του απλού CCAPM με t-stat 4,18, δηλ. στατιστικά σημαντικό, έναντι 0,09 του απλού CCAPM). Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι οι διαφορές των β μεταξύ τους είναι αρκετά μεγάλες ώστε να δικαιολογούν τις διαφορές στα ασφάλιστρα κινδύνου μεταξύ μικρών και μεγάλων εταιριών (size premium) και εταιριών με υψηλό BM έναντι εταιριών με χαμηλό BM (value premium).

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις μέσες αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων (κάθετος άξονας) και τα β των χαρτοφυλακίων με την μεταβολή της κατανάλωσης τα επόμενα 5 χρόνια (οριζόντιος άξονας). Η συσχέτιση μεταξύ των μέσων αποδόσεων και των β είναι αρκετά υψηλή, δηλ. τα σημεία βρίσκονται αρκετά κοντά σε μια γραμμή με θετική κλίση.



Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις μέσες αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων (οριζόντιος άξονας) και τα ασφάλιστρα κινδύνου (λ*β) των χαρτοφυλακίων σύμφωνα με το μακροχρόνιο υπόδειγμα του καταναλωτή (κάθετος άξονας). Το διάγραμμα δείχνει ότι όλα τα σημεία βρίσκονται αρκετά κοντά σε μια γραμμή με κλίση 90ο.



Το μακροχρόνιο CCAPM φαίνεται να εξηγεί πολύ καλύτερα τις διαστρωματικές αποδόσεις από το απλό CCAPM. Το υπόδειγμα έχει ένα R^2 = 43%, δηλ. εξηγεί το 43% της διαστρωματικής διακύμανσης των αποδόσεων.

2.Διαστρωματικοί έλεγχοι του CAPM

Μπορεί το CAPM να εξηγήσει τις μέσες αποδόσεις των μετοχών διαστρωματικά; Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την μέση απόδοση των 25 μετοχικών χαρτοφυλακίων των Fama και French.

Average annual real returns 1927-2010. 25 Fama-French portfolios					
	growth	**2**	**3**	**4**	**value**
small	4.6	10.4	13.7	16.5	19.6
2	8.1	12.8	14.3	15.2	16.0
3	9.3	11.9	13.2	13.6	15.1
4	9.0	10.0	11.7	12.8	13.8
large	8.1	7.8	9.0	9.2	13.1

Ο πίνακας δείχνει ότι μικρές εταιρίες είχαν υψηλότερες μέσες αποδόσεις από μεγάλες εταιρίες (size premium) και εταιρίες με υψηλό BM είχαν υψηλότερες αποδόσεις από εταιρίες με χαμηλό BM (value premium).

Το cross section των Betas του CAPM

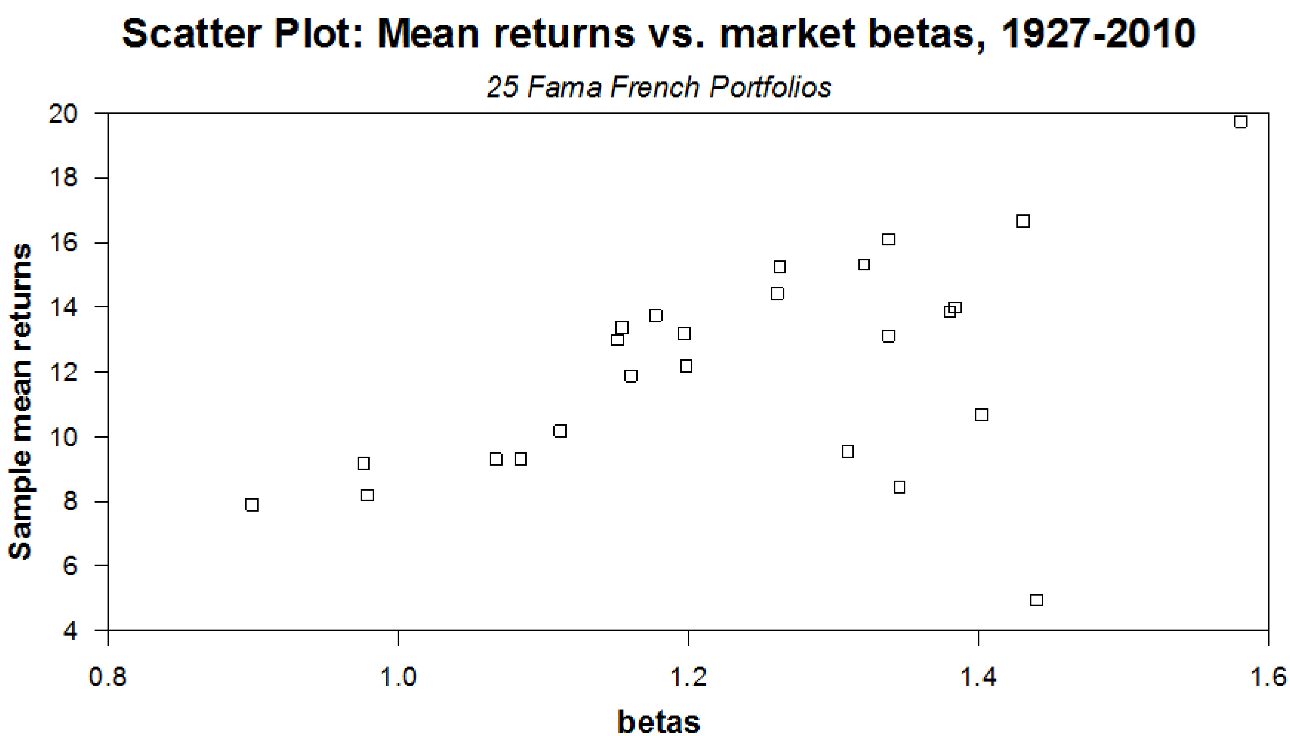
Σύμφωνα με το CAPM, μετοχές με υψηλή συσχέτιση με την αγορά πρέπει να έχουν υψηλότερα ασφάλιστρα κινδύνου, άρα υψηλότερες μέσες αποδόσεις. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα beta των μετοχικών χαρτοφυλακίων Fama French με την απόδοση της αγοράς.

Market betas. 25 Fama-French portfolios, 1927-2010

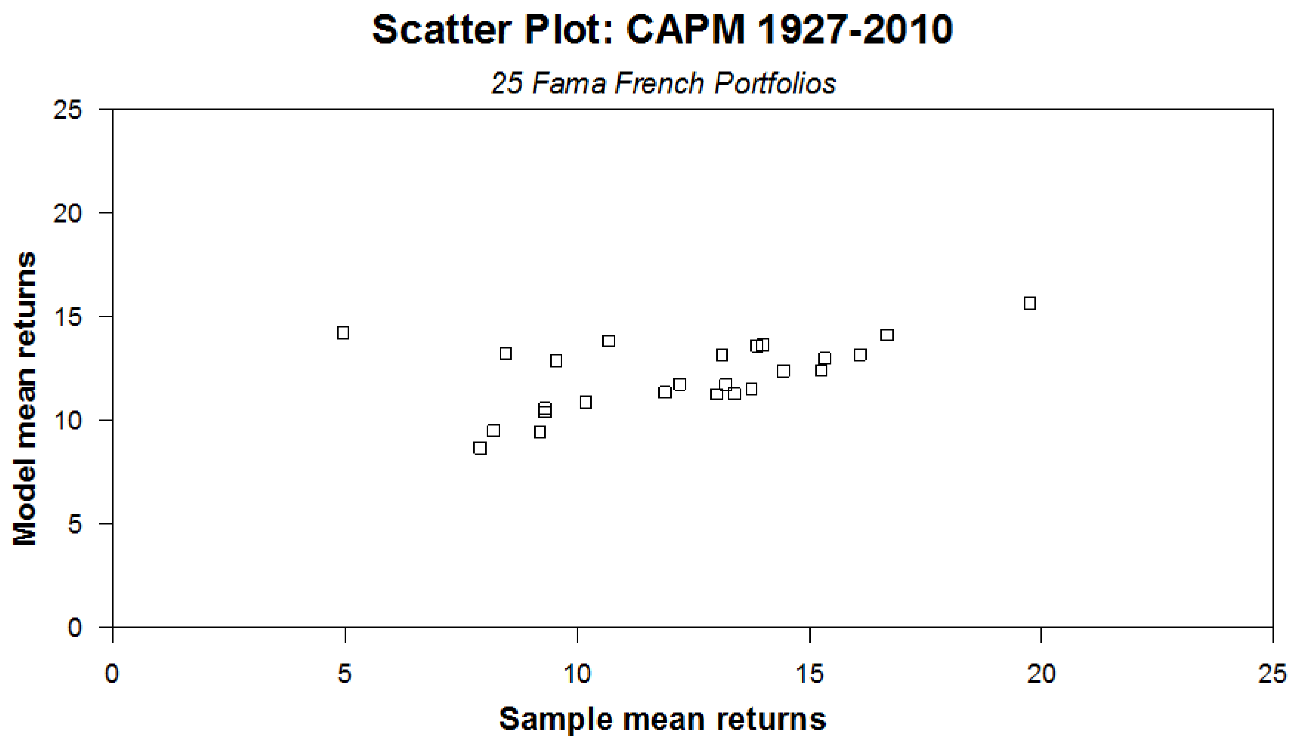
	growth	**2**	**3**	**4**	**value**
small	1.44	1.40	1.38	1.43	1.58
2	1.35	1.34	1.26	1.32	1.34
3	1.31	1.20	1.15	1.18	1.26
4	1.08	1.11	1.16	1.15	1.38
large	0.98	0.90	0.98	1.07	1.20

Οι μικρές εταιρίες φαίνεται να έχουν υψηλότερο συστηματικό κίνδυνο (υψηλότερα β) από τις μεγάλες εταιρίες, πράγμα που δικαιολογεί τις υψηλότερες αποδόσεις τους. Το CAPM φαίνεται να εξηγεί το size premium. Όμως τα β των εταιριών με υψηλό BM δεν είναι υψηλότερα από τα β εταιριών με χαμηλό BM. Το CAPM δεν μπορεί να εξηγήσει το value premium.

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις μέσες αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων (κάθετος άξονας) και τα β των χαρτοφυλακίων με την απόδοση της αγοράς (οριζόντιος άξονας). Αν το CAPM εξηγούσε τις μέσες αποδόσεις διαστρωματικά, θα έπρεπε να υπάρχει μια καθαρή θετική συσχέτιση μεταξύ των μέσων αποδόσεων και των β, δηλ. όλα τα σημεία να βρίσκονται γύρω από μια γραμμή με θετική κλίση. Το διάγραμμα δείχνει ότι μετοχές με υψηλότερες αποδόσεις πράγματι φαίνεται να έχουν υψηλότερα β. Όμως υπάρχουν και αρκετά χαρτοφυλάκια που έχουν υψηλά β αλλά χαμηλές αποδόσεις (κάτω δεξιά)



Αρκεί η διαφορά στα β για να εξηγήσει τις διαφορές στις αποδόσεις; Αυτό φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα.



Το CAPM εξηγεί το 25% της διαστρωματικής διακύμανσης των αποδόσεων στα 25 χαρτοφυλάκια (έναντι ~0% του απλού CCAPM, αλλά 43% του μακροχρόνιου CCAPM).