MANAGEMENT OF FINANCIAL INSTITUTIONS

Κεφάλαιο 2A:
ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
Καθηγητής Γκίκας Χαρδούβελης

2021 H1

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

- Κίνδυνος Επιτοκίου
- Πιστωτικός Κίνδυνος
- Κίνδυνος Συναλλάγματος
- Κίνδυνος Χώρας
- Κίνδυνος Αγοράς
- Κίνδυνος Διαχείρισης
- Κίνδυνος Ρευστότητας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΙΝΔΥΝΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

- Είδη κινδύνου επιτοκίου & παράδειγμα κινδύνου αναχρηματοδότησης
- Τιμολόγηση Ομολογίας
- Ευαισθησία τιμής Ομολογίας σε μεταβολές απαιτούμενων αποδόσεων
- Ευαισθησία της Καθαρής Θέσης των ΧΙ σε μεταβολές επιτοκίων
- Πώς μηδενίζεται ο κίνδυνος επιτοκίου;

ΕΙΔΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

1. **Κίνδυνος Αναχρηματοδότησης (Refinancing Risk)**
2. **Κίνδυνος Επανεπένδυσης (Reinvestment Risk)**

<u>Παράδειγμα κινδύνου αναχρηματοδότησης</u>

- Δάνειο <u>διετές</u> αξίας \$10 εκατ.
- Σταθερό επιτόκιο δανείου: r_L=12%
- Χρηματοδοτείται με <u>μονοετές</u> CD, με $r_{CD,t}$=10%, δηλ. εκδίδεται CD με F=\$11 εκατ. στην τιμή P=\$11/1,1=\$10 εκατ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΑΝΑΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ

- Έτος 0

  Εκροές = $10 εκατ. = Εισροές
- Έτος 1

  Εκροές = $11 εκατ.

  Εισροές = $1,2 εκατ. τόκοι + έσοδα επανέκδοσης μονοετούς CD, έστω $9,8 εκατ. με F=$10,78 εκατ., δηλ. με $r_{CD,t+1}$=10%
- Έτος 2

  Εκροές = $10,78 εκατ.

  Εισροές = $11,2 εκατ.

έτος 0 1 $r_{CD,t+1}$ = 10% 2

|-------------------|-----------------------|

0 $0,0 εκ $0,42 εκ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΑΝΑΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ

Αν τα επιτόκια των CD αυξηθούν στο $r_{CD,t+1}$=13%,τότε:

– Στο τέλος του πρώτου χρόνου για την είσπραξη των \$9,8 εκατ. θα εκδοθούν CD με F=\$11,074 εκατ.

– Συνεπώς, στο τέλος του δευτέρου έτους τα καθαρά έσοδα = \$11,2 εκατ. - \$11,074 εκατ. = \$0,126 εκατ. < \$0,420 εκατ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΑΝΑΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ

Αν τα επιτόκια των CD <u>μειωθούν</u> στο $r_{CD,t+1}$=7%:

- Στο τέλος του πρώτου χρόνου για την είσπραξη των \$9,8 εκατ. θα εκδοθούν CD με F=\$10,486 εκατ.
- Συνεπώς, στο τέλος του δευτέρου έτους τα καθαρά έσοδα = \$11,2 εκατ. - \$10,486 εκατ. = \$0,714 εκατ. > \$0,420 εκατ.

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Ομολογία με

- **M** = αριθμός περιόδων έως τη λήξη,
- **C** = σταθερό τοκομερίδιο, πληρωτέο στο τέλος κάθε περιόδου
- **F** = ονομαστική αξία, πληρωτέα στη λήξη
- **r** = απαιτούμενη από τους επενδυτές, μέση απόδοση αν η ομολογία κρατηθεί έως τη λήξη (yield to maturity) ή εσωτερικός συντελεστής απόδοσης (internal rate of return)

```
      C     C                               C      C+F
|-----|------|------------------------------|-------|
t    t+1    t+2                          t+M-1  t+M
```

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Η τιμή της ομολογίας, P_t, είναι ίση με την παρούσα αξία της.

$$P_t = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C+F}{(1+r)^M} =$$

$$= \frac{C}{1+r}\left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{M-1}\right] + \frac{F}{(1+r)^M} =$$

$$= \frac{C}{1+r} \times \frac{1-x^M}{1-x} + \frac{F}{(1+r)^M}, \qquad x \equiv \frac{1}{1+r}$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{C}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^M}\right] + \frac{F}{(1+r)^M}$$

ΕΙΔΗ ΟΜΟΛΟΓΙΩΝ

- Ομολογίες στο άρτιο (par bonds)

$$\frac{C}{F} = r \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P_t} = F$$

- Ομολογίες υπό το άρτιο (discount bonds)

$$\frac{C}{F} < r \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P_t} < F$$

- Ομολογίες υπέρ το άρτιο (premium bonds)

$$\frac{C}{F} > r \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P_t} > F$$

- Συνηθίζεται όταν εκδίδονται οι ομολογίες για πρώτη φορά, να καθορίζονται τα τοκομερίδια έτσι ώστε οι ομολογίες να πωλούνται στο άρτιο.

ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΤΙΜΗΣ ΟΜΟΛΟΓΙΩΝ

- Έστω **r = 10%**
- ομολογίες με **M = 5, 10, 15 και 20 χρόνια**,
  F = € 1.000.000,
  C = €   100.000,
  => οι ομολογίες πωλούνται στο άρτιο, **P = € 1 εκ**.

- Έστω ότι η απαιτούμενη απόδοση μεταβάλλεται σε: (α) **r'=11%**
  (β) **r'=9%**,
  Τότε, οι νέες τιμές των ομολογιών (**P'**), οι ποσοστιαίες μεταβολές των τιμών (**ΔP/P**) και οι διαφορές στις ευαισθησίες τους εμφανίζονται στον επόμενο πίνακα:

ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΤΙΜΗΣ ΟΜΟΛΟΓΙΩΝ

M	r′=11%			r′=9%		
	P′	ΔP/P	Διαφορά	P′	ΔP/P	Διαφορά
5	963.041	-3,70%		1.038.897	+3,89%	
10	941.108	-5,89%	-2,19%	1.064.177	+6,42%	+2,53%
15	928.091	-7,19%	-1,30%	1.080.607	+8,06%	+1,64%
20	920.367	-7,96%	-0,77%	1.091.285	+9,13%	+1,07%

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΟΜΟΛΟΓΙΩΝ

I. R ↑ => P ↓
II. M ↑ => |ΔP/P| ↑ (κατά κανόνα)
III. M ↑ => GAP |ΔP/P| ↓
IV. Δr < 0 => μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή |ΔP/P| από ότι όταν Δr > 0.
V. Κρατώντας τη λήξη M και την ονομαστική αξία F σταθερές,

   όσο μεγαλύτερο το τοκομερίδιο,

   τόσο μικρότερη η ευαισθησία της τιμής της ομολογίας, ΔP/P, στις μεταβολές του r.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΟΜΟΛΟΓΙΩΝ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΧΕΣΗΣ V

- **F = €1.000.000**
- Ομολογίες A, B και C με ετήσια τοκομερίδια $C_{A,}$ $C_{B,}$ C_C

M		C_A = €80.000		C_B = €100.000		C_C = €120.000	
		r=10%	r=11%	r=10%	r=11%	r=10%	r=11%
5	P	924.184	889.123	1.000.000	963.041	1.075.816	1.036.959
	ΔP/P	**-3,79%**		**-3,70%**		**-3,61%**	
20	P	829.729	761.100	1.000.000	920.367	1.170.271	1.079.633
	ΔP/P	**-8,27%**		**-7,96%**		**-7,75%**	

ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΚΑΘΑΡΗΣ ΘΕΣΗΣ Χ.Ι. ΣΕ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ

- $E = A - L$
- Επειδή $M_A > M_L$, έχουμε $|\Delta A/\Delta r| > |\Delta L/\Delta r| \Rightarrow \Delta E/\Delta r < 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Έστω Χ.Ι. με ενεργητικό αποτελούμενο μόνο από ομολογίες με M=3 χρόνια, F=$100 εκατ. και C=$10 εκατ. και με παθητικό πιστοποιητικά κατάθεσης CD με M=1 χρόνο και F=$99 εκατ.
- Επιτόκιο r=10% και για το ενεργητικό και για το παθητικό.

ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΚΑΘΑΡΗΣ ΘΕΣΗΣ Χ.Ι.

- Αξία Ενεργητικού, A = \$100 εκατ. (Par bond)
- Αξία Υποχρεώσεων, L = \$90 εκατ. = 99/1,1
- Αξία Καθαρής Θέσης, E = A – L = \$10 εκατ.

Αν η απαιτούμενη απόδοση <u>αυξηθεί</u> στο 11%, ποια θα είναι η μεταβολή ΔΕ;

$$\Delta A = -100 + \{\frac{10}{0{,}11}[1 - \frac{1}{(1{,}11)^3}] + \frac{100}{(1{,}11)^3}\} = \$ - 2{,}443 \varepsilon\kappa\alpha\tau.$$

$$\Delta L = -90 + \frac{99}{1{,}11} = \$ - 0{,}8108 \varepsilon\kappa\alpha\tau.$$

- ΔE = ΔA – ΔL = \$ - 1,6322 εκατ.

ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΚΑΘΑΡΗΣ ΘΕΣΗΣ Χ.Ι.

- ΔΑ/Α = - 2,44%
- ΔL/L = - 0,90%
- ΔΕ/Ε = -16,32%

Η αξία της Καθαρής Θέσης είναι πολύ πιο ευαίσθητη στις μεταβολές των επιτοκίων από την αξία του ενεργητικού ή των υποχρεώσεων.

Ερώτηση: Πόσο πρέπει να αυξηθούν τα επιτόκια ώστε να μηδενιστεί η Κ.Θ. του Χ.Ι.;

Απάντηση: Ε = 0 όταν Α = L =>

=>

$$\frac{10}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^3}\right]+\frac{100}{(1+r)^3}=\frac{99}{1+r}$$

ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΚΑΘΑΡΗΣ ΘΕΣΗΣ Χ.Ι.

- Η λύση είναι εφικτή με διαδοχικές δοκιμές.
- Ας υποθέσουμε $r^0 = 15\%$

=> $$\begin{cases} A_{15\%} = \$88{,}582 \text{εκατ.} \\ L_{15\%} = \$86{,}087 \text{εκατ.} \\ E_{15\%} = \$2{,}495 \text{εκατ.} > 0 \end{cases}$$

Άρα χρειαζόμαστε μεγαλύτερο r

- Ας υποθέσουμε $r^1=17\%$

=> $$\begin{cases} A_{17\%} = \$84{,}536 \text{εκατ.} \\ L_{17\%} = \$84{,}615 \text{εκατ.} \\ E_{17\%} \approx 0 \end{cases}$$

Ε είναι ελαφρά αρνητικό, άρα το r είναι ελάχιστα μικρότερο από το 17%.

ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΚΑΘΑΡΗΣ ΘΕΣΗΣ Χ.Ι.

Ερώτηση: Αν θέσουμε $M_A = M_L$, εξαλείφουμε ή όχι την ευαισθησία της αξίας της Κ.Θ. στις μεταβολές του επιτοκίου;

Απάντηση: Όχι πάντα.

Παράδειγμα:

- $M_A = M_L = 1$ χρόνος
- A: \$100 εκατ. δάνειο, με την πρόβλεψη ότι \$50 εκατ. θα αποπληρωθούν σε 6 μήνες και τα υπόλοιπα \$50 εκατ. σε 12 μήνες, με ετήσιο επιτόκιο 15%.
- L: CD 1 χρόνου με απόδοση r = 15% και ονομαστική αξία \$115 εκατ.

ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ ΚΑΘΑΡΗΣ ΘΕΣΗΣ Χ.Ι.

0	6 μήνες	12 μήνες
|----------------------------------	|----------------------------------	|
Δάνειο $100 εκατ.	Έσοδα $57,5 εκατ. =50 + 7,5 τόκοι	50 + 3,75 τόκοι + 57,5(1+ r/2)

Αν r = 15%, μετά από 6 μήνες:

Έσοδα στο τέλος του χρόνου = $115,5625 εκατ. = 53,75 + 57,5 (1,075)

Κέρδη = $0,5625 εκατ.

Αν r = 12%, μετά από 6 μήνες:

Έσοδα στο τέλος του χρόνου = $114,70 εκατ. = 53,75 + 57,5 (1,06)

Κέρδη = $ - 0,30 εκατ.

- $|\Delta A/\Delta r| < |\Delta L/\Delta r|$ και έτσι $\Delta E/\Delta r > 0$

II.

I. Εισαγωγή στον Κίνδυνο Επιτοκίου

II. Σταθμισμένη Διάρκεια (Duration)

III. Duration Gap

IV. Οι αρρυθμίες της Σταθμισμένης Διάρκειας

V. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1) Κυρτότητα (Convexity)

2) Η τιμολόγηση των Brady Bonds

II. ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

- Παράδειγμα Σταθμισμένης Διάρκειας (Duration)
- Σταθμισμένη Διάρκεια Ομολόγου
- Σταθμισμένη Διάρκεια και Ευαισθησία στις αλλαγές επιτοκίων
- Παράδειγμα εξουδετέρωσης κινδύνου επιτοκίου
- Η Άλγεβρα στον Ορισμό της Σταθμισμένης Διάρκειας
- Σ.Δ. Διηνεκούς Ροής
- Σ.Δ. Ράντας
- Σ.Δ. Ομολογίας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ

Η σταθμισμένη διάρκεια αποτελεί δείκτη ευαισθησίας (ποσοστιαίας αλλαγής στην τιμή) ενός περιουσιακού στοιχείου ως προς τις μεταβολές των επιτοκίων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (από διάλεξη για τον Κίνδυνο Επιτοκίου)

- $M_A = M_L = 1$ έτος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ

- Assets: \$100 εκατ. δάνειο, με την πρόβλεψη ότι \$50 εκατ. θα αποπληρωθούν σε 6 μήνες και τα υπόλοιπα \$50 εκατ. σε 12, με ετήσιο επιτόκιο 15%.
- Liabilities: CD 1 χρόνου, απόδοση 15% και Μ.Α. \$115 εκατ.

\$57,5 \$53,75

|---------------------|-------------------------|

0 ½ 1 έτος

PV = 57,5 / 1,075 = 53,49

$PV = 53,75 / (1,075)^2 = 46,51$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ

- Στο παράδειγμα, η σταθμισμένη διάρκεια του δανείου είναι το σταθμισμένο άθροισμα των περιόδων έως τη λήξη, με συντελεστή στάθμισης έκαστης περιόδου την παρούσα αξία της χρηματοροής της περιόδου ως κλάσμα της τρέχουσας τιμής του δανείου.

Χρονική περίοδος	Στάθμιση
½ έτη	$w_{1/2} = 53{,}49/100 = 0{,}5349$
1 έτος	$w_1 = 46{,}51/100 = 0{,}4651$

- $D_A = w_{1/2} \times (1/2 \text{ έτη}) + w_1 \times (1 \text{ έτος})$

  $= 0{,}5349 \times 1/2 + 0{,}4651 \times 1 = 0{,}7326$ έτη

- $D_L = 1$ έτος, επειδή $w_1 = 1$
- Συνεπώς, $D_A < D_L$ παρόλο που $M_A = M_L$

ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΟΜΟΛΟΓΟΥ

Σταθμισμένη Διάρκεια, Προσαρμοσμένη Σταθμισμένη Διάρκεια, Κυρτότητα

Ευρωομόλογο με C = €80, F = €1.000 και M= 6 περίοδοι, (r=8%)

t	ΧΡΗΜΑΤΟ-ΡΟΗ CF_t	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗΣ $V_{0,t}$	ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ $CF_t\,V_{0,t}$	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΤΑΘΜΙΣΗΣ $(1/P)xCF_t\,V_{0,t} = w_t$	Συμβολή της κάθε περιόδου στην Σταθμισμένη Διάρκεια $w_t\,t$	Συμβολή της κάθε περιόδου στην Κυρτότητα $w_t\,t(t+1)$
1	80	$(1,08)^{-1}$= 0,926	74,07	0,07407	0,07407	0,14815
2	80	$(1,08)^{-2}$= 0,857	68,59	0,06859	0,13718	0,41152
3	80	$(1,08)^{-3}$= 0,794	63,51	0,06351	0,19053	0,76208
4	80	$(1,08)^{-4}$= 0,735	58,80	0,05880	0,23520	1,17605
5	80	$(1,08)^{-5}$= 0,681	54,45	0,05445	0,27225	1,63340
6	1.080	$(1,08)^{-6}$= 0,630	680,58	0,68058	4,08348	28,58449
ΑΘΡΟΙΣΜΑ			1.000,00		4,99271	32,71569

D = 4,99271 , **MD=**4,99271/(1,08)=**4,62288** , **CX=**32,71569/$(1,08)^2$=**28,04843**

$$\Delta P/P \cong -MD\,\Delta r + (1/2)CX\,(\Delta r)^2$$

ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ & ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ

- **Το παραπάνω ομόλογο γίνεται επιθυμητό για επενδυτές με επενδυτικό ορίζοντα 5 έτη διότι:**
- **Γενικώς, ισχύει η σχέση ότι η ποσοστιαία μεταβολή στην μελλοντική αξία ενός χαρτοφυλακίου, Τ, *Η* περιόδους από σήμερα, περιγράφεται ως εξής:**
- **Έτσι:** $$\widetilde{T}_{H,t} = (H - D)\frac{\Delta r}{1+r}$$
- **<u>Εξουδετέρωση</u> του κινδύνου επιτυγχάνεται όταν Η=D. Τότε η επίδραση από την αλλαγή στην τιμή και η αντίθετη επίδραση από την αλλαγή στο ύψος του ανατοκισμού αλληλοεξουδετερώνονται.**
- **Όταν Η < D (και Δr > 0) , τότε στη ρευστοποίηση της περιόδου Η, η πτώση των τιμών υπερισχύει της ανόδου της αξίας του χαρτοφυλακίου από τον υψηλότερο ανατοκισμό. Όταν Η > D ισχύει το αντίστροφο.**
- **Όταν** $H = 0 \Rightarrow \widetilde{T}_0 = -D\frac{\Delta r}{1+r}$ **Αυτή είναι η ευαισθησία στην αλλαγή της τιμής**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΞΟΥΔΕΤΕΡΩΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Το προηγούμενο ομόλογο, έχει λήξη 6 έτη αλλά σταθμισμένη διάρκεια 5 έτη. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί από έναν επενδυτή που επιθυμεί να επενδύσει για 5 έτη. Ο Επενδυτής αυτός με επενδυτικό ορίζοντα 5 έτη, εξουδετερώνει τον κίνδυνο επιτοκίου αν αγοράσει εκείνο το ομόλογο που έχει σταθμισμένη διάρκεια 5 έτη, δηλαδή ίση με τον επενδυτικό του ορίζοντα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Έστω ***r=8%.*** Μια ασφαλιστική εταιρεία πρέπει να πληρώσει σε ***5 χρόνια €1,469 εκατ***. *Πώς μηδενίζει τον κίνδυνο επιτοκίου*, όταν δεν υπάρχουν 5-ετή ομολογίες τελικής απόδοσης (zero coupon) στην αγορά;
- *Απάντηση*: Πρέπει να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο ομολόγων με ***D = 5 χρόνια***. Το εξαετές ομόλογο του προηγούμενου πίνακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί, καθώς έχει D = 4,993 ≈ 5 χρόνια.

```
          80        80        80        80        80      1080
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
0         1         2         3         4         5         6
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΞΟΥΔΕΤΕΡΩΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Περίπτωση Α: *Έστω ότι το r παραμένει στο 8%.*

a) Η τιμή του ομολόγου τον 5ο χρόνο θα είναι:

P_5= €1,080 εκατ. / 1,08 = €1 εκατ.

b) Ανατοκισμός τοκομεριδίων:

$$80[(1{,}08)^4 + (1{,}08)^3 + (1{,}08)^2 + (1{,}08) + 1] =$$

$$80\frac{1-(1{,}08)^5}{1-1{,}08} = 80\frac{(1{,}08)^5 - 1}{0{,}08} = 0{,}469$$

$\Rightarrow$ Συνολικά έσοδα: 1 + 0,469 = €1,469 εκατ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΞΟΥΔΕΤΕΡΩΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Περίπτωση Β: *Έστω ότι r=7%.*

a) P_5 = € 1,009 εκατ.

b) Ανατοκισμός τοκομεριδίων = € 0,460 εκατ. $\Rightarrow$ Συνολικά έσοδα = € 1,469 εκατ.

Περίπτωση Γ: *Έστω ότι r=9%.*

a) P_5 = € 0,991 εκατ.

b) Ανατοκισμός τοκομεριδίων = € 0,478 εκατ. $\Rightarrow$ Συνολικά έσοδα = €1,469 εκατ.

Άσκηση: Εξετάστε τι συμβαίνει όταν *r=6% και r=10%.* Θα διαπιστώσετε ότι η εξουδετέρωση δεν είναι τέλεια λόγω κυρτότητας (convexity).

<u>Περίπτωση Α</u>: Απλή χρηματοροή € 1 την περίοδο t:

- |---------------- €1 --------|---------------- €1 --------

  0 ↑t H ↑t
- H ≡ επενδυτικός ορίζοντας
- t ≡ χρονική στιγμή πριν ή μετά το τέλος του H
- $V_{0,t}$ ≡ $(1+r)^{-t}$ η παρούσα αξία – τη χρονική στιγμή 0 – €1 που χορηγείται τη χρονική στιγμή t
- $V_{H,t}$ ≡ $(1+r)^{H-t}$ η μελλοντική αξία - τη χρονική στιγμή H - €1 που χορηγείται τη χρονική στιγμή t
- Έστω ότι το r μεταβάλλεται σε r+Δr

$$\Rightarrow \Delta V_{H,t} = (H-t)(1+r)^{H-t-1}\Delta r \Rightarrow \tilde{V}_{H,t} \equiv \frac{\Delta V_{H,t}}{V_{H,t}} = (H-t)\frac{\Delta r}{1+r}$$

ΑΛΓΕΒΡΑ: ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ & ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑ

- Αν H > t $\Rightarrow \{\Delta r > 0 \Rightarrow \widetilde{V}_{H,t} > 0\}$

  (κίνδυνος επανεπένδυσης)

- Αν H < t $\Rightarrow \{\Delta r > 0 \Rightarrow \widetilde{V}_{H,t} < 0\}$

  (κίνδυνος αλλαγής της τιμής)

- Ο κίνδυνος επιτοκίου εξαλείφεται όταν:

  H = t $\Rightarrow \quad \widetilde{V}_{H,t} = 0$

  όταν, δηλαδή, αγοράζονται ομόλογα χωρίς τοκομερίδιο, των οποίων η διάρκεια, Μ, είναι ίση με τον επενδυτικό ορίζοντα Η.

- Αν H = 0 $\Rightarrow \widetilde{V}_{0,t} = -t\,\dfrac{\Delta r}{1+r}$

  (ευαισθησία της τιμής)

Περίπτωση Β: *Χαρτοφυλάκιο πολλαπλών χρηματοροών*:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & C_1 & & C_2 & & C_3 & & C_{M-1} & & C_M \\ | & \text{----------} & | & \text{----------} & | & \text{----------} & | & \text{------------------------} & | & \text{----------} & | \\ 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & M-1 & & M \end{array}$$

Οι τίτλοι σταθερού εισοδήματος είναι χαρτοφυλάκια σταθερών χρηματοροών.

Η αξία του παραπάνω χαρτοφυλακίου την περίοδο Η είναι:

$$T_H \equiv \sum_{t=1}^{M} C_t V_{H,t} \Rightarrow \Delta T_H = \sum_{t=1}^{M} C_t V_{H,t} \left(\frac{\Delta V_{H,t}}{V_{H,t}} \right) = \sum_{t=1}^{M} C_t V_{H,t} (H - t) \frac{\Delta r}{1 + r}$$

ΑΛΓΕΒΡΑ: ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ

$$\Rightarrow \Delta T_H = \left[H \sum_{t=1}^{M} C_t V_{H,t} - \sum_{t=1}^{M} t \cdot C_t \cdot V_{H,t} \right] \cdot \frac{\Delta r}{1+r} = \left[H \cdot T_H - \sum_{t=1}^{M} t \cdot C_t \cdot V_{H,t} \right] \cdot \frac{\Delta r}{1+r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T_H}{T_H} = \widetilde{T}_{H,t} = \left[H - \sum_{t=1}^{M} w_t \cdot t \right] \cdot \frac{\Delta r}{1+r}$$

Όπου, $$w_t \equiv \frac{C_t V_{H,t}}{T_H} = \frac{(1+r)^{-H} C_t V_{H,t}}{(1+r)^{-H} T_H} = \frac{C_t V_{0,t}}{T_0}$$

- Ορίζουμε τη σταθμισμένη διάρκεια ως:

$$D = \sum_{t=1}^{M} w_t \times t$$

ΑΛΓΕΒΡΑ: ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ

- **Δηλαδή D = Σταθμισμένος μέσος όρος των περιόδων έως τη λήξη των σταθερών χρηματοροών ενός χαρτοφυλακίου, με σταθμίσεις τις παρούσες αξίες των χρηματοροών ως κλάσματα της συνολικής παρούσας αξίας του χαρτοφυλακίου.**
- **Έτσι:** $$\widetilde{T}_{H,t} = (H - D)\frac{\Delta r}{1 + r}$$
- **<u>Εξουδετέρωση</u> του κινδύνου επιτυγχάνεται όταν H=D. Τότε η επίδραση από την αλλαγή στην τιμή και η αντίθετη επίδραση από την αλλαγή στο ύψος του ανατοκισμού αλληλοεξουδετερώνονται.**
- **Όταν H < D (και Δr > 0) , τότε στη ρευστοποίηση της περιόδου H, η πτώση των τιμών υπερισχύει της ανόδου της αξίας του χαρτοφυλακίου από τον υψηλότερο ανατοκισμό. Όταν H > D ισχύει το αντίστροφο.**
- **Όταν H = 0** $\Rightarrow \widetilde{T}_0 = -D\frac{\Delta r}{1 + r}$ **Αυτή είναι η ευαισθησία στην αλλαγή της τιμής**

ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΗ ΑΛΓΕΒΡΑ: ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΔΙΗΝΕΚΟΥΣ ΡΟΗΣ (PERPETUITY)

Άσκηση: Διηνεκής Ροή προσφέρει ετήσιο τοκομερίδιο C επ' άπειρον, $M = \infty$. Υπολογίσατε τη Σταθμισμένη Διάρκειά της, D.

Λύση: Τιμή διηνεκούς ροής, $P = C/r$.

Επίσης, $\Delta P/\Delta r = -(1/r^2)\, C \;\Rightarrow\; \Delta P/P = -(1/r)\,\Delta r$

Όμως, για κάθε χαρτοφυλάκιο σταθερών ροών:

$$\Delta P / P = -D \frac{\Delta r}{1+r}$$

Συνεπώς,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta P}{P} &= -\frac{1}{r}\Delta r \\ \frac{\Delta P}{P} &= -D\frac{\Delta r}{1+r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = \frac{1+r}{r} = 1 + \frac{1}{r}$$

Παρατηρείστε ότι η D είναι ανεξάρτητη του C.

Σ.Δ. ΔΙΗΝΕΚΟΥΣ ΡΟΗΣ

- Αν r = 20% $\Rightarrow$ D= 6 έτη
- Αν r = 10% $\Rightarrow$ D=11 έτη
- Αν r = 5% $\Rightarrow$ D=21 έτη
- Αν r = 2% $\Rightarrow$ D=51 έτη

Εναλλακτική λύση

$$\frac{\Delta P}{P} = -D\,\frac{\Delta r}{1+r} \Rightarrow D = -(1+r)\left(\frac{1}{P}\right)\frac{\Delta P}{\Delta r}$$

Ξεκινήστε με κάποιο C και κάποιο r και υπολογίστε την τιμή P. Στη συνέχεια, μεταβάλετε το r σε r' = r+Δr. Υπολογίστε τη νέα τιμή P' και τη μεταβολή στην τιμή, ΔP=P'-P. Με δεδομένα τα P, r, Δr και ΔP, υπολογίστε το D από τον τύπο.

ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΗ ΑΛΓΕΒΡΑ: ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΡΑΝΤΑΣ (ANNUITY)

```
         C          C          C                                         C
|--------|----------|----------|-----------------------------------------|
0        1          2          3                                         M
```

$$P = \frac{C}{r} \cdot \left[1 - (1+r)^{-M}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{C}{r^2}\left[1 - (1+r)^{-M}\right] + \frac{C}{r} \cdot M \cdot (1+r)^{-M-1}$$

$$D = -\frac{1+r}{P} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta r} \Rightarrow$$

Συνεπώς, $D = \dfrac{1+r}{r} - \dfrac{M}{(1+r)^{M} - 1}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ Σ.Δ. ΡΑΝΤΑΣ

a) D ανεξάρτητη του C

b) $M\uparrow \Rightarrow D\uparrow$, με το όριο να είναι το $\dfrac{1+r}{r}$

c) $r\uparrow \Rightarrow D\downarrow$

ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

$$D = \frac{1+r}{r} - \frac{M \cdot \left(\frac{C}{F} - r\right) + (1+r)}{(1+r)^{M} \cdot \frac{C}{F} - \left(\frac{C}{F} - r\right)}$$

ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

a) Για ομολογίες στο άρτιο (par bonds):

$$\frac{C}{F} = r \Rightarrow D = \frac{1+r}{r} \cdot \left[1 - (1+r)^{-M}\right]$$

b) Για ομολογίες χωρίς τοκομερίδιο (pure discount bonds):

$$\frac{C}{F} = 0 \Rightarrow D = M$$

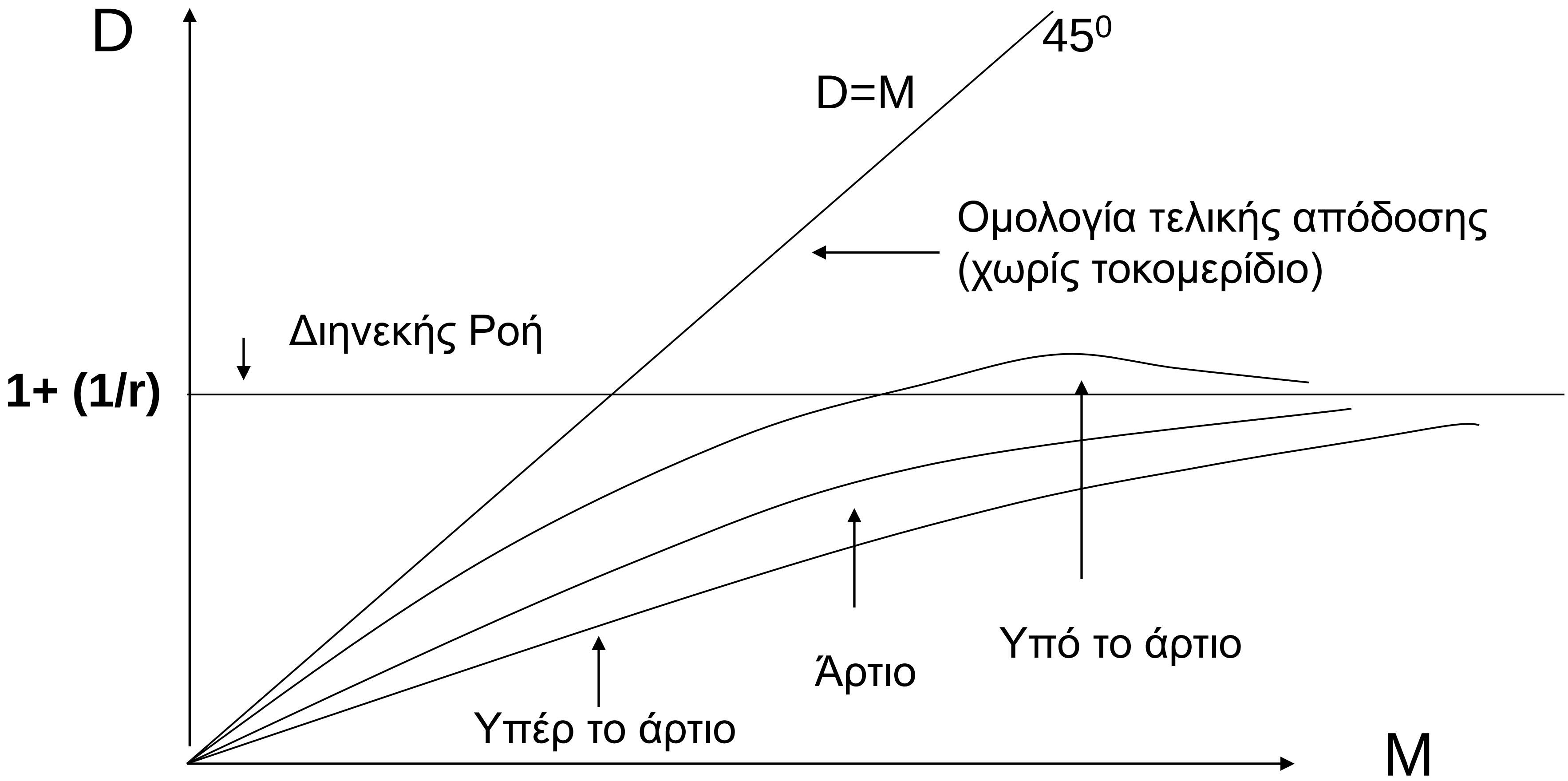
<u>Ιδιότητες Σ.Δ. Ομολογιών</u>

a) $M\uparrow \Rightarrow D\uparrow$ (για ομολογίες Υπέρ- ή Στο- Άρτιο)

b) $r\uparrow \Rightarrow D\downarrow$

c) $C\uparrow \Rightarrow D\downarrow$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ



Σταθμισμένη Διάρκεια ως συνάρτηση της διάρκειας έως τη λήξη, M, και με δεδομένες τιμές για r και F

Σ.Δ. ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟ-ΤΟ-ΑΡΤΙΟ

r = 10%

C/F	**M**							
	10	**20**	**30**	**40**	**50**	**100**	**...**	**∞**
10%	6,76	9,36	10,37	10,76	10,91	11,00	...	11,00
5%	7,66	10,74	11,43	11,39	11,24	11,01	...	11,00
1%	9,27	15,45	17,05	15,61	13,69	11,06	...	11,00
0,1%	9,92	19,32	27,06	32,14	28,79	11,63	...	11,00
0%	10	20	30	40	50	100	...	∞

III.

I. Εισαγωγή στον Κίνδυνο Επιτοκίου
II. Σταθμισμένη Διάρκεια (Duration)
III. **Duration Gap**
IV. Οι αρρυθμίες της Σταθμισμένης Διάρκειας
V. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
   1) Κυρτότητα (Convexity)
   2) Η τιμολόγηση των Brady Bonds

III. ΑΝΟΙΓΜΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ (DURATION GAP)

- Σ.Δ. Χαρτοφυλακίου
- Άνοιγμα Σταθμισμένης Διάρκειας
- Εξουδετέρωση κινδύνου και Άνοιγμα Σ.Δ.

ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

- Είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος της σταθμισμένης διάρκειας των στοιχείων του χαρτοφυλακίου με συντελεστές στάθμισης την παρούσα αξία των στοιχείων ως κλάσμα της συνολικής αξίας του χαρτοφυλακίου.

<u>Παράδειγμα</u>:

Χαρτοφυλάκιο μετοχών και ομολόγων

Έστω χαρτοφυλάκιο με n_x ομόλογα της εταιρείας X και n_y μετοχές της εταιρείας Y.

Παρούσα Αξία Χαρτοφυλακίου:

$$P_0 = n_x P_0^{(x)} + n_y P_0^{(y)}$$

όπου

ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

$$P_0^{(x)} = \sum_{t=1}^{M} C_t^{(x)} V_{0,t}$$

$$P_0^{(y)} = \sum_{t=1}^{N} C_t^{(y)} V_{0,t}$$

και N > M.

Ξεκινάμε περιγράφοντας τη Σ.Δ. αναλυτικά για όλο το χαρτοφυλάκιο, από t=1 έως t=N:

$$D_p = \sum_{t=1}^{M} t \left\{ n_x C_t^{(x)} + n_y C_t^{(y)} \right\} \left(\frac{V_{0,t}}{P_0}\right) +$$

$$+ \sum_{t=M+1}^{N} t \, n_y \, C_t^{(y)} \left(\frac{V_{0,t}}{P_0}\right) =$$

ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

- Στη συνέχεια, διαχωρίζουμε τις ροές του χαρτοφυλακίου σε ροές ομολογιών και μετοχών και πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε έκαστο τμήμα με την παρούσα αξία του:

$$= \sum_{t=1}^{M} t\, n_x \left(C_t^{(x)} \frac{V_{0,t}}{P_0^{(x)}}\right)\left(\frac{P_0^{(x)}}{P_0}\right) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{N} t\, n_y \left(C_t^{(y)} \frac{V_{0,t}}{P_0^{(y)}}\right)\left(\frac{P_0^{(y)}}{P_0}\right) =$$

$$= \left(\frac{n_x\, P_0^{(x)}}{P_0}\right) D_x + \left(\frac{n_y\, P_0^{(y)}}{P_0}\right) D_y$$

ΑΝΟΙΓΜΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ (DURATION GAP) ΙΣΟΛΟΓΙΣΜΟΥ Χ.Ι.

Υποθέτουμε ότι $\mathbf{r_A = r_L = r}$

$$\frac{\Delta A}{A} = -D_A \cdot \left(\frac{\Delta r}{1+r}\right) \Rightarrow \Delta A = -D_A \cdot A \frac{\Delta r}{1+r}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = -D_L \cdot \left(\frac{\Delta r}{1+r}\right) \Rightarrow \Delta L = -D_L \cdot L \frac{\Delta r}{1+r}$$

$$\Delta E = \Delta A - \Delta L = -\left[D_A \cdot A - D_L \cdot L\right]\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right) =$$

$$= -\left[D_A - \frac{L}{A} D_L\right] \cdot A \cdot \left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)$$

ΑΝΟΙΓΜΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ

Έτσι η ευαισθησία στις αλλαγές των επιτοκίων της καθαρής θέσης ενός ΧΙ είναι συνάρτηση:

a) του ανοίγματος της σταθμισμένης διάρκειας (duration gap), $D_A - \frac{L}{A} D_L$

b) του μεγέθους του ενεργητικού, **A**

c) του μεγέθους της μεταβολής του επιτοκίου, $\frac{\Delta r}{1+r}$

Εξουδετέρωση κινδύνου επιτοκίου επιτυγχάνεται όταν:

$$D_A = \frac{L}{A} D_L$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ DURATION GAP

Παράδειγμα:

- Ενεργητικό: A = € 500 εκατ.
- Παθητικό: L = € 450 εκατ.
- Καθαρή Θέση: E = € 50 εκατ.
- Σ.Δ.: D_A= 4 έτη, D_L= 2,5 έτη
- Επιτόκια: r_A = r_L = 12%

Ερωτήσεις: Έστω r↑ στο 13%. Υπολογίστε τη νέα αγοραία αξία των A', L', E' και την % μεταβολή τους.

Απαντήσεις:

$$\frac{\Delta A}{A} = -4\frac{0{,}01}{1{,}12} = -0{,}036 \Rightarrow \Delta A = -17{,}86 \Rightarrow A' = 482{,}14$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ DURATION GAP

$$\frac{\Delta L}{L} = -2{,}5\,\frac{0{,}01}{1{,}12} = -0{,}022 \Rightarrow \Delta L = -10{,}05 \Rightarrow L' = 439{,}96$$

$$E' = A' - L' = 482{,}14 - 439{,}96 = 42{,}19$$

$$\Rightarrow \Delta E = -7{,}81 \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = -0{,}156$$

- Εναλλακτικά:

$$\Delta E = -\left[4 - \left(\frac{450}{500}\right)2{,}5\right]500\,\frac{0{,}01}{1{,}12} =$$

$$= -(-1{,}75)(500)\,\frac{0{,}01}{1{,}12} = -7{,}81$$

ΕΞΟΥΔΕΤΕΡΩΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ & DURATION GAP

Πώς αποφεύγεται η έκθεση στον κίνδυνο επιτοκίου;

a) $D'_A = 2{,}25$

b) $D'_L = 4{,}44$

c) $D'_A = 3, \quad D'_L = 3{,}33$

IV.

I. Εισαγωγή στον Κίνδυνο Επιτοκίου

II. Σταθμισμένη Διάρκεια (Duration)

III. Duration Gap

IV. Οι αρρυθμίες της Σταθμισμένης Διάρκειας

V. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

   1) Κυρτότητα (Convexity)

   2) Η τιμολόγηση των Brady Bonds

IV. ΟΙ ΑΡΡΥΘΜΙΕΣ ΤΗΣ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ

- **Κοστίζουν οι αλλαγές στον ισολογισμό**
- **Δυναμική η εξουδετέρωση κινδύνου**
- **Η καμπύλη αποδόσεων δεν είναι επίπεδη**
- **Περιουσιακά στοιχεία κυμαινόμενου επιτοκίου**
- **Κυρτότητα**

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΑ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ

I. *Η μείωση του Ανοίγματος Σ.Δ. κοστίζει* (βλ. επόμενες διαλέξεις)

II. *Η εξουδετέρωση του κινδύνου δεν είναι στατικό πρόβλημα, αλλά δυναμικό*.

Παράδειγμα: (Από διάλεξη για τη Σ.Δ.)

Ασφαλιστική εταιρεία αγοράζει 6ετή ομόλογα. C/F=8%, r=8%, F=€ 1.000, D = 5 έτη και P_0=F= €1.000. Η εταιρεία έχει υποχρέωση πληρωμής € 1.469 σε 5 χρόνια.

Εφόσον D = H = 5 έτη, η εταιρεία σήμερα έχει εξουδετερώσει τον κίνδυνο.

Περνάει ένας χρόνος και το r παραμένει 8%.

Εξακολουθεί η εταιρεία να είναι ασφαλισμένη έναντι του κινδύνου επιτοκίου;

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΞΟΥΔΕΤΕΡΩΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

```
           80        80        80         80        80      1080
|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
0          1          2          3          4          5         6
```

Απάντηση:

Μετά 1 έτος, το ομόλογο έχει M = 5 έτη έως τη λήξη, D = 4,31 έτη και ο επενδυτικός ορίζοντας είναι H = 4 έτη. Επομένως, υπάρχει κίνδυνος επιτοκίου!

Η εξουδετέρωση κινδύνου τη χρονική στιγμή t = 1 απαιτεί επένδυση του τοκομεριδίου του 1ου έτους σε έντοκο λήξης 0,125 ετών ή 1,5 μήνα:

$$\frac{80}{1080} \cdot M_C + \frac{1000}{1080} \cdot 4,31 = 4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0,0741 \cdot M_C + 0,9259 \cdot 4,31 = 4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M_C = 0,125$$

ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

II. Συνεπώς, τα χαρτοφυλάκια χρειάζονται δυναμική αναπροσαρμογή:

a) με το πέρασμα του χρόνου

b) όταν μεταβάλλονται τα επιτόκια στην αγορά.

ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

III. Η καμπύλη αποδόσεων δεν είναι επίπεδη.

(Βλ. παράδειγμα Πίνακα)

IV. Πώς υπολογίζεται η Σ.Δ. ομολογιών, δανείων, καταθέσεων με κυμαινόμενο επιτόκιο;

(Είναι συνήθως ο χρόνος μέχρι την επόμενη αναπροσαρμογή).

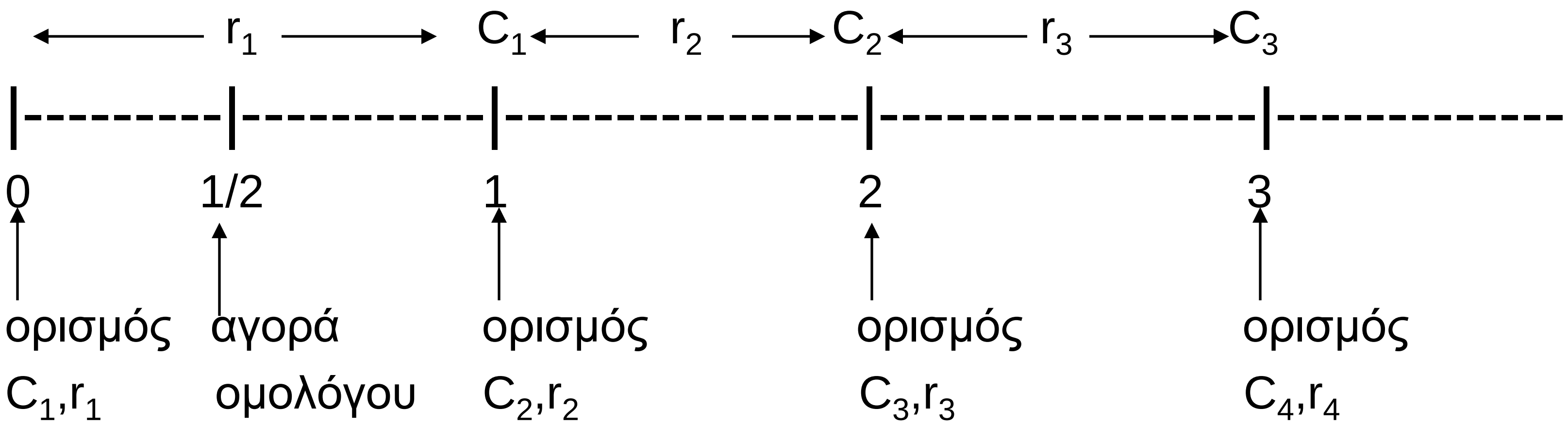
Σ.Δ. & ΑΝΟΔΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΗ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ

t	CF	DF	CF · DF	CF · DF · t
1	80	$(1{,}08)^{-1} = 0{,}9259$	74,07	74,07
2	80	$(1{,}088)^{-2} = 0{,}8448$	67,58	135,16
3	80	$(1{,}094)^{-3} = 0{,}7637$	61,10	183,30
4	80	$(1{,}098)^{-4} = 0{,}6880$	55,04	220,16
5	80	$(1{,}102)^{-5} = 0{,}6153$	49,22	246,10
6	1.080	$(1{,}103)^{-6} = 0{,}5553$	599,75	3598,50
ΑΘΡΟΙΣΜΑ			906,76	4457,29

$$D = \frac{4457{,}29}{906{,}7} = 4{,}91562$$

Σ.Δ. ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΚΥΜΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

Παράδειγμα:



- Υποθέτουμε ότι η καμπύλη αποδόσεων είναι επίπεδη: $r_1=r_2=.....=R$. Έστω ότι αγοράζουμε την ομολογία κυμαινόμενου επιτοκίου στη μέση του έτους:

$$P=\frac{C_1}{1+\frac{1}{2}R}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}R}\cdot\left[\frac{C_2}{1+R}+\frac{C_3}{(1+R)^2}+.......\right]=\frac{C_1}{1+\frac{1}{2}R}+\frac{P_1}{1+\frac{1}{2}R}$$

Σ.Δ. ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΚΥΜΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

- ✓ Αν οι μεταβολές στα τοκομερίδια των επόμενων ετών αναμένεται να είναι ίδιες με τις μεταβολές των αποδόσεων $\Rightarrow$ αναμενόμενη τιμή P_1 παραμένει ανεπηρέαστη από τις αναμενόμενες μεταβολές των αποδόσεων. Είναι σταθερή (για ομόλογα-στο-άρτιο, βλ. σημειώσεις για ομολογίες χωρών).
- ✓ Συνεπώς, το ομόλογο τη στιγμή t = ½ μοιάζει με χαρτοφυλάκιο δύο μελλοντικών <u>σταθερών</u> ροών της περιόδου t = 1, P_1 και C_1.
- ✓ Άρα η Σ.Δ. είναι ο χρόνος που απομένει μέχρι το τέλος του πρώτου έτους: D = 1/2 έτη.

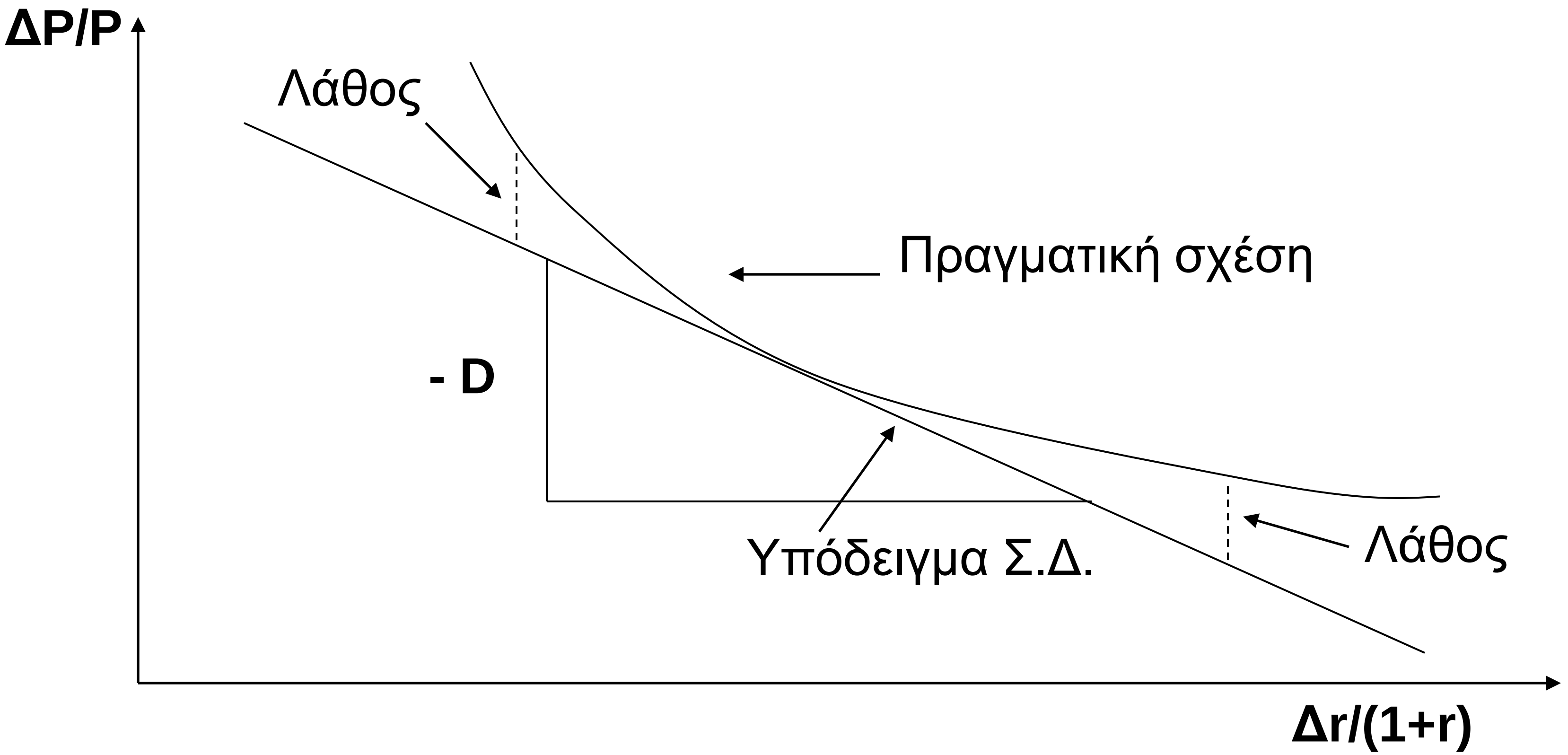
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ V.1

I. Εισαγωγή στον Κίνδυνο Επιτοκίου
II. Σταθμισμένη Διάρκεια (Duration)
III. Duration Gap
IV. Οι αρρυθμίες της Σταθμισμένης Διάρκειας
V. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
   1) Κυρτότητα (Convexity)
   2) Η τιμολόγηση των Brady Bonds

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

V. *Κυρτότητα (Convexity)*

Η Σ.Δ. (duration) δεν λαμβάνει υπόψη της την κυρτότητα στη σχέση μεταξύ ΔP/P και Δr/(1+r). Ο τύπος της Σ.Δ. υποθέτει ότι η σχέση τιμής-αποδόσεων είναι γραμμική.



ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

- ✓ Το λάθος προσέγγισης της εφαρμογής του τύπου Σ.Δ. είναι μεγαλύτερο όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβολή του επιτοκίου $|\Delta r|$.
- ✓ Για $\Delta r > 0$, ο τύπος της Σ.Δ. προβλέπει μεγαλύτερη % πτώση στην τιμή, $-\Delta P/P$, από την πραγματική.
- ✓ Για $\Delta r < 0$, ο τύπος της Σ.Δ. προβλέπει μικρότερη % άνοδο στην τιμή, $+\Delta P/P$, από την πραγματική.
- ✓ Δηλαδή, ο τύπος της Σ.Δ. αγνοεί την ιδιότητα IV για την ασυμμετρία των επιδράσεων που έχουν $\Delta r>0$ και $\Delta r<0$.

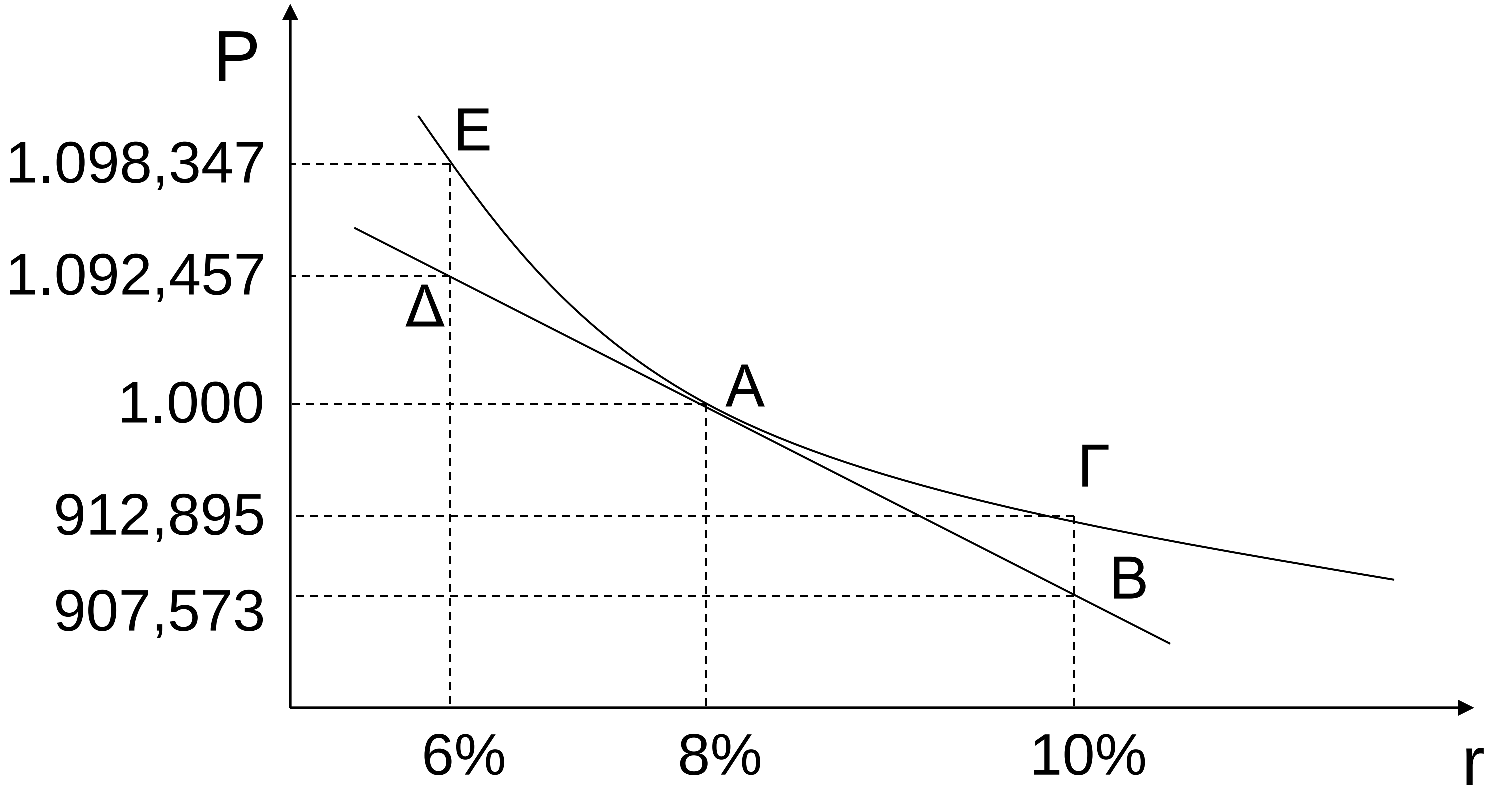
  $r \uparrow \Rightarrow D \downarrow$, έτσι η πραγματική ευαισθησία της τιμής στις μεταβολές του επιτοκίου είναι μικρότερη από αυτήν που υπολογίζει η Σ.Δ.

  $r \downarrow \Rightarrow D \uparrow$, έτσι η πραγματική ευαισθησία της τιμής στις μεταβολές του επιτοκίου είναι μεγαλύτερη από αυτήν που υπολογίζει η Σ.Δ.

ΤΟ ΛΑΘΟΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ DURATION

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω r = 8%. Ομολογία με M=6 έτη, C= € 80, F = P = € 1.000, D = 4,99271 έτη.

Υποθέτουμε ότι Δr = +2% ή -2%. Παρατηρούμε ότι το προσεγγιστικό λάθος είναι μεγάλο, 0,55%.



ΤΟ ΛΑΘΟΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ DURATION

Πρόβλεψη του υποδείγματος Duration

Δr>0, από 8% στο 10%. $\Delta P/P = -4{,}99\ (0{,}02/1{,}08) = -9{,}2457\%$, άρα προβλεπόμενη τιμή: P_B = € 907,54 στο σημείο Β.

Δr<0, από 8% στο 6%. $\Delta P/P = -4{,}99\ (-0{,}02/1{,}08) = +9{,}2457\%$, άρα προβλεπόμενη τιμή: P_Δ= € 1.092,46 στο σημείο Δ.

Πραγματική αλλαγή στην τιμή

Δr>0, $P_\Gamma = (80/0{,}10)\ [1 – (1{,}1)^{-6}\ ] + 1.000/(1{,}1)^6$ = € 912,90

(λάθος υποδείγματος: $P_B – P_\Gamma$ = - € 5,35)

Δr<0, $P_E = (80/0{,}06)\ [1 - (1{,}06)^{-6}\ ] + 1.000/(1{,}06)^6$ = € 1.098,35

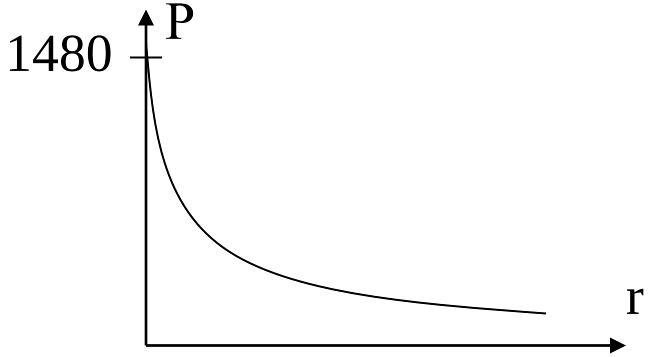
(λάθος υποδείγματος: $P_\Delta – P_E$ = - € 5,89)

Το λάθος προσέγγισης είναι περίπου - 0,55% ή -55 μονάδες βάσης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

1. Η κυρτότητα είναι επιθυμητή στον επενδυτή (long position).

   Η κυρτότητα είναι μη επιθυμητή στον δανειζόμενο (short position).
2. Όσο μεγαλύτερη η μεταβολή του επιτοκίου |Δr|, τόσο μεγαλύτερη η κυρτότητα.
3. Όλοι οι τίτλοι σταθερού εισοδήματος έχουν κυρτότητα.



Στην περίπτωση του προηγούμενου ευρωομολόγου:

$r=0 \Rightarrow P=1480$

$r=\infty \Rightarrow P=0$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ (CONVEXITY)

Για να υπολογίσουμε τη μεταβολή στην τιμή, ΔP, χρησιμοποιούμε την πολυωνυμική προσέγγιση TAYLOR μιας μη-γραμμικής συνάρτησης:

$$\Delta P = \frac{dP}{dr}\Delta r + \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2P}{dr^2}(\Delta r)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3P}{dr^3}(\Delta r)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Αγνοούμε εκθετικούς όρους > 2, και διαιρούμε με το P:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \left(\frac{dP}{dr}\right)\cdot\left(\frac{1}{P}\right)\Delta r + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2P}{dr^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{P}\right)\cdot\left(\Delta r^2\right)$$

$$= \ldots = -\,\mathbf{MD}\,\Delta r + (1/2)\,\mathbf{CX}\,(\Delta r)^2$$

Modified Duration, MD ≡ $[1/(1+r)]\, D = [1/(1+r)]\, \Sigma\, w_t\, t$

Convexity, **CX** ≡ $[d^2P/dr^2] / P = [1/(1+r)^2]\, \Sigma\, w_t\, t\, (t+1)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΥΠΟΥ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Έστω $CF_t \equiv$ σταθερή χρηματοροή (cash flow) τη χρονική στιγμή t

Τιμή: $$P = \sum_{t=1}^{M} (1+r)^{-t} CF_t$$

Πρώτη παράγωγος: $$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{1+r} \cdot \sum_{t=1}^{M} (1+r)^{-t} CF_t \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dP/dr}{P} = -\frac{1}{1+r} \cdot \sum_{t=1}^{M} w_t \cdot t \equiv -\frac{1}{1+r} \cdot D$$

Δεύτερη παράγωγος: $$\frac{d^2P}{dr^2} = \frac{1}{(1+r)^2} \cdot \sum_{t=1}^{M} (1+r)^{-t} \cdot CF_t \cdot t \cdot (t+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{{d^2P}/{dr^2}}{P} = \frac{1}{(1+r)^2} \cdot \sum_{t=1}^{M} w_t \cdot t \cdot (t+1) \equiv \text{CX, convexity}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ D, MD, CX ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Σταθμισμένη Διάρκεια, Προσαρμοσμένη Σταθμισμένη Διάρκεια, Κυρτότητα

Ευρωομόλογο με C = €80, F = €1.000 και M= 6 περίοδοι, (r=8%)

t	ΧΡΗΜΑΤΟ-ΡΟΗ CF_t	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗΣ $V_{0,t}$	ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ $CF_t V_{0,t}$	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΤΑΘΜΙΣΗΣ $(1/P)xCF_t V_{0,t} = w_t$	Συμβολή της κάθε περιόδου στην Σταθμισμένη Διάρκεια $w_t\ t$	Συμβολή της κάθε περιόδου στην Κυρτότητα $w_t\ t(t+1)$
1	80	$(1,08)^{-1}= 0,926$	74,07	0,07407	0,07407	0,14815
2	80	$(1,08)^{-2}= 0,857$	68,59	0,06859	0,13718	0,41152
3	80	$(1,08)^{-3}= 0,794$	63,51	0,06351	0,19053	0,76208
4	80	$(1,08)^{-4}= 0,735$	58,80	0,05880	0,23520	1,17605
5	80	$(1,08)^{-5}= 0,681$	54,45	0,05445	0,27225	1,63340
6	1.080	$(1,08)^{-6}= 0,630$	680,58	0,68058	4,08348	28,58449
ΑΘΡΟΙΣΜΑ			1.000,00		4,99271	32,71569

D = 4,99271 , **MD=**4,99271/(1,08)=**4,62288** , **CX=**32,71569/(1,08)^2=**28,04843**

$$\Delta P/P \cong -MD\ \Delta r + (1/2)CX\ (\Delta r)^2$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΡ/Ρ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΜΕ ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Στο παράδειγμα του προηγούμενου Πίνακα,

MD = 4,6228, CX = 28,04843

Έστω Δr = + 0,02 ή +2%

$\Delta P/P = - MD\,(\Delta r) + 0{,}5\ CX\,(\Delta r)^2$

$= - 4{,}62288\,(0{,}02) + (0{,}5)\,(28{,}048443)\,(0{,}0004)$

$= - 0{,}0868479$ ή $-8{,}685\%$

Πρόβλεψη τιμής: P= € 913,15,

Πραγματική τιμή: P= € 912,89. Λάθος υποδείγματος: 26 λεπτά ή 0,03% *(αντί για –535 λεπτά ή -0,55% με το υπόδειγμα duration).*

Έστω Δr = - 0,02 ή –2%

$\Delta P/P = - MD\,(\Delta r) + 0{,}5\ CX\,(\Delta r)^2$

$= - 4{,}62288\,(-0{,}02) + (0{,}5)\,(28{,}048443)\,(0{,}0004)$

$= 0{,}0980673$ ή $+ 9{,}807\%$

Πρόβλεψη τιμής: P= € 1.098,07

Πραγματική τιμή: P= € 1.098,35. Λάθος υποδείγματος: 28 λεπτά ή 0,03% *(αντί για –589 λεπτά ή -0,54 % με το υπόδειγμα duration)*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ CX ΟΜΟΛΟΓΟΥ

Παράδειγμα: 6-ετές ευρωομόλογο του προηγούμενου πίνακα, (C/F=r=8%).

Αν r=8,01% $\Rightarrow$ P=999.537,85. Αν r=7,99% $\Rightarrow$ P=1.000.462,93

Έστω x = 1 b.p. $\Rightarrow$ - x = -1 b.p.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta P^-}{P} &= -D\frac{x}{1+r} + \frac{1}{2}CX\,(x)^2 \\ \frac{\Delta P^+}{P} &= -D\frac{-x}{1+r} + \frac{1}{2}CX\,(-x)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta P^-}{P} + \frac{\Delta P^+}{P} = CX(x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; CX \equiv 10^8 \cdot \left[\frac{\Delta P^-}{P} + \frac{\Delta P^+}{P}\right] =$$

$$= 10^8 \cdot \left[\frac{999.537{,}85 - 1.000.000}{1.000.000} + \frac{1.000.462{,}93 - 1.000.000}{1.000.000}\right] =$$

$$= 10^8 \cdot 0{,}00000028 = 28$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

I. Όσο αυξάνεται η χρονική διάρκεια έως τη λήξη, τόσο αυξάνεται και η κυρτότητα.

II. Όσο μεγαλύτερο το τοκομερίδιο μιας ομολογίας, τόσο μικρότερη είναι η κυρτότητα.

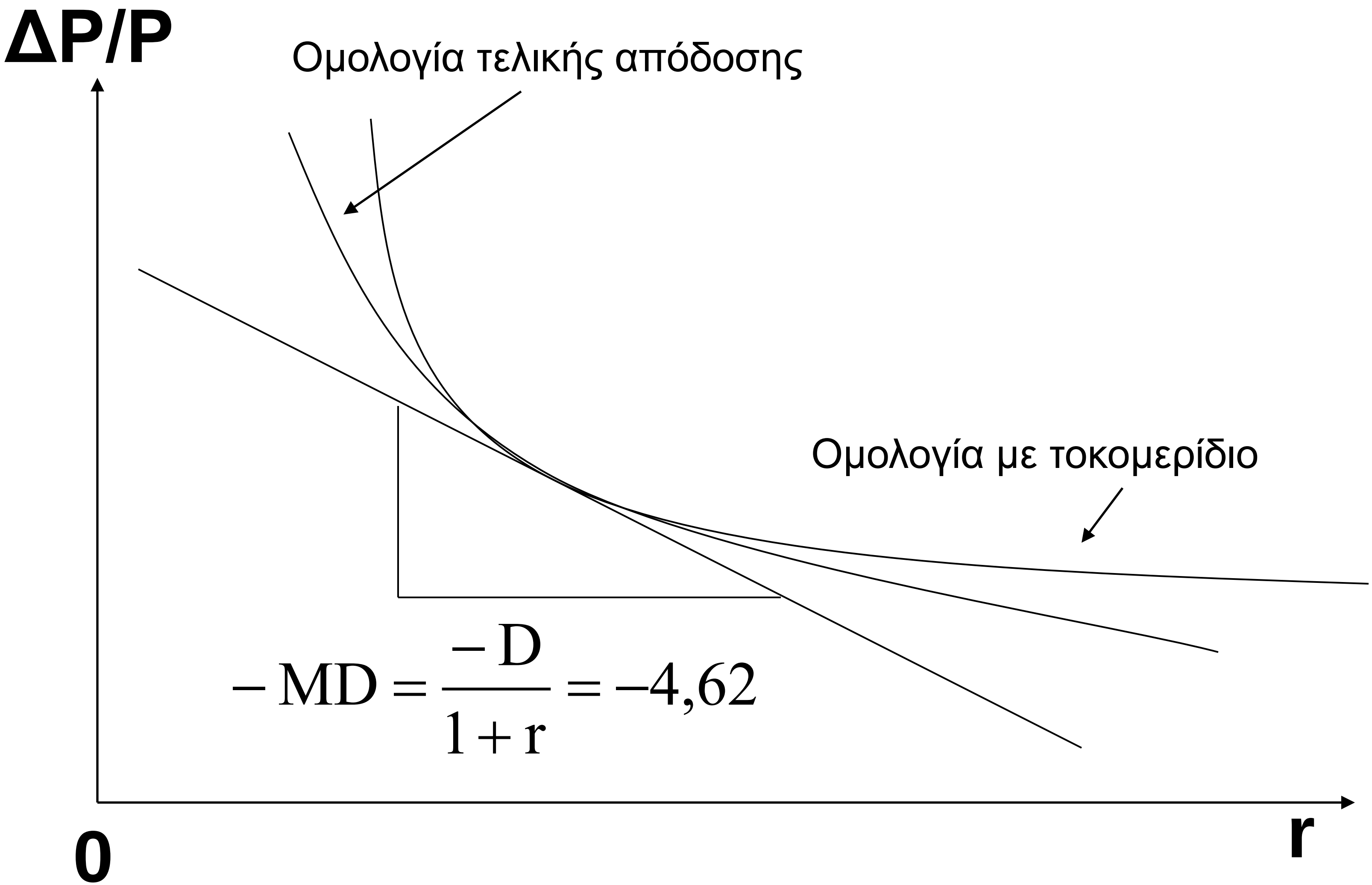
III. Με την ίδια σταθμισμένη διάρκεια, ομολογίες τελικής απόδοσης (π.χ. έντοκα γραμμάτια) έχουν μικρότερη κυρτότητα από τις ομολογίες με τοκομερίδιο. (βλ. σχήμα)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ ΟΜΟΛΟΓΙΩΝ

	Ιδιότητα I			Ιδιότητα II		Ιδιότητα III	
	Ομολογίες			Ομολογίες		Ομολογίες	
	Α	Β	Γ	Α	Δ	Α	Ε
M	6	18	∞	6	6	6	5
r	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%
C	8%	8%	8%	8%	0	8%	0
D	4,99	10,12	13,50	4,99	6	4,99	5
CX	28,05	130,03	312,50	28,05	36,01	28,05	25,72

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Ιδιότητα ΙΙΙ.



$$-\mathrm{MD} = \frac{-\mathrm{D}}{1+\mathrm{r}} = -4{,}62$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

<u>Κυρτότητα Ομολόγου</u> $\quad CX \equiv A / B,\;$ όπου

$$A \equiv 2 \cdot \frac{C}{F} \cdot (1+r)^2 \cdot \left[(1+r)^M - \frac{1+r+rM}{1+r} \right] + M \cdot (M+1) \cdot r^2 \cdot \left(r - \frac{C}{F} \right)$$

$$B \equiv r^2 \cdot (1+r)^2 \cdot \left\{ \frac{C}{F} \left[(1+r)^M - 1 \right] + r \right\}$$

<u>Ομολογία-στο-άρτιο</u>

$$r = \frac{C}{F} \quad \Rightarrow \qquad CX = \frac{2}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1+(M+1)r}{(1+r)^{M+1}} \right\}$$

<u>*Παράδειγμα:*</u> Ευρω-ομόλογο με M = 6 έτη, C/F = r = 8%.

$$CX = \frac{2}{0{,}08^2} \cdot \left[1 - \frac{1+7(0{,}08)}{(1{,}08)^7} \right] = 28{,}0484$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Ομολογία τελικής απόδοσης

$$C/F = 0 \quad \Rightarrow \qquad CX = \frac{M(M+1)}{(1+r)^2}$$

Παράδειγμα:

Έστω 6ετές ομόλογο τελικής απόδοσης με r=8%.

$$CX = \frac{6 \times 7}{(1{,}08)^2} = 36{,}0082$$

Διηνεκής χρονική ροή: $CX = \dfrac{2}{r^2}$

Απόδειξη:

$$P = C/r \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{C}{r^2} \Rightarrow \frac{d^2P}{dr^2} = \frac{2C}{r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2P}{dr^2} \Big/ P = \frac{2}{r^2}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Παρατήρηση: Όσο M $\to \infty$, CX $\to 2/r^2$

Παράδειγμα διηνεκούς χρονικής ροής:

r=8%, C=8%, M=∞ $$CX = \frac{2}{0{,}08^2} = 312{,}5$$

Χρονική ροή (ράντα)

$$CX = \frac{2}{r^2} - \frac{M\left[2(1+r) + r(M+1)\right]}{r(1+r)^2\left[(1+r)^M - 1\right]}$$

Παρατήρηση: Όσο M $\to \infty$, η κυρτότητα της ράντας

CX $\to 2/r^2$

Παράδειγμα: C=80, M=6, r=8%, CX=14,48

CX ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟ-ΤΟ-ΑΡΤΙΟ

r = 10%

C/F	**M**						
	10	**20**	**30**	**40**	**50**	**100**	**….** **∞**
10%	52,8	116,2	157,3	179,5	190,6	199,9	…. 200
5%	63,4	146,1	190,4	204,9	206,7	200,4	…. 200
1%	82,4	248,3	365,3	374,6	327,1	205,2	…. 200
0,1%	89,9	332,4	677,0	986,5	1067,5	258,0	…. 200
0%	90,9	347,1	768,6	1355,4	2107,4	8347,1	…. ∞

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ V.2

I. Εισαγωγή στον Κίνδυνο Επιτοκίου
II. Σταθμισμένη Διάρκεια (Duration)
III. Duration Gap
IV. Οι αρρυθμίες της Σταθμισμένης Διάρκειας
V. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
    1) Κυρτότητα (Convexity)
    2) Η τιμολόγηση των Brady Bonds

V.2 BRADY BONDS

- Ιστορικό
- Δευτερογενής αγορά ομολογιών Brady
- Η παράξενη τιμολόγηση των ομολογιών Brady
- Τιμολόγηση σε σχέση με την αιτία μεταβολής στα επιτόκια
- Η διαφορετική συμπεριφορά των υπερ- και υπό-το-άρτιο ομολόγων στις μεταβολές των επιτοκίων
- Άσκηση για το σπίτι

ΙΣΤΟΡΙΚΟ

- **Ξεκίνησαν το 1989 με το Σχέδιο Μπρέϊντυ, Υπουργού Οικονομίας των Η.Π.Α. (Brady Plan). Τότε πολλές αναπτυσσόμενες χώρες αντιμετώπιζαν οικονομικές δυσκολίες και αδυνατούσαν να τηρήσουν τις δανειακές τους υποχρεώσεις έναντι αμερικανικών τραπεζών.**
- **Οι αμερικανικές τράπεζες αντάλλαξαν τα προβληματικά τους δάνεια – εκφρασμένα σε δολάρια- που είχαν χορηγήσει είτε στις κυβερνήσεις είτε σε εταιρείες ξένων χωρών, με ομολογίες σε δολάρια (debt-for-debt swap), οι οποίες εκδόθηκαν από τις κεντρικές τράπεζες των δανειζόμενων χωρών. (Στην κάθε χώρα, η κεντρική τράπεζα επιβάρυνε τις εγχώριες εταιρείες ή κυβερνήσεις με δάνειο σε εγχώριο νόμισμα).**
- **Περίπου $136 δις δανείων (κυρίως χώρες Λ. Αμερικής) μετατράπηκαν σε ομολογίες Brady.**
- **Οι ομολογίες Brady καθορίστηκαν να έχουν μεγαλύτερη λήξη & μικρότερο τοκομερίδιο σε σχέση με το αρχικό δάνειο ώστε να διευκολυνθούν οι δανειζόμενες χώρες. Επίσης, το κεφάλαιο απέκτησε προστασία με ενεχυριασμένα T-bonds.**
- **Η δευτερογενής αγορά των Brady bonds απέκτησε ρευστότητα.**

ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΗΣ ΑΓΟΡΑ ΟΜΟΛΟΓΙΩΝ BRADY

- Οι τιμές των Brady bonds κυμαίνονται σημαντικά υπό-το-άρτιο επειδή τα τοκομερίδια είναι πολύ μικρά σε σχέση με την απαιτούμενη απόδοση
- Η απαιτούμενη απόδοση, **r,** ισούται με την απαιτούμενη απόδοση για ομολογίες αμερικανικού δημοσίου ή διατραπεζικής αγοράς, $\mathbf{r_F}$: risk-free rate, συν το ασφάλιστρο πιστωτικού κινδύνου, $\mathbf{r_P}$ (risk premium): $\mathbf{r = r_F + r_P}$
- Τα τοκομερίδια είναι μικρά και κυμαινόμενα ως συνάρτηση του risk-free rate, π.χ. C/F = r_F = π.χ. libor rate.
- Όσο πιο μικρή η πιθανότητα αποπληρωμής των τοκομεριδίων και του κεφαλαίου, τόσο πιο μεγάλο το ασφάλιστρο κινδύνου, $\mathbf{r_P}$.
- ***Στην αγορά των Brady bonds, παρατηρήθηκε τα επιτόκια να μειώνονται (αυξάνονται) και οι τιμές επίσης να μειώνονται (αυξάνονται)!***
- Το 1997, ορισμένες φορές συνέβη το ίδιο περίεργο φαινόμενο και στην ελληνική αγορά ομολόγων με κυμαινόμενο επιτόκιο. Πολλοί «επαγγελματίες» ονόμασαν την τότε αγορά «τρελή».

Η ΠΑΡΑΞΕΝΗ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΟΜΟΛΟΓΙΩΝ BRADY

Παράδειγμα: Έστω ομολογία Brady χώρας Ψ με:

- Εναπομένουσα διάρκεια έως τη λήξη, M = 12 έτη.
- Ονομαστική αξία, F = € 100 εκ.
- Η απαιτούμενη απόδοση r = LIBOR + 11%.
- Ετήσιο τοκομερίδιο C/F = LIBOR

Σήμερα είναι η ημέρα προσαρμογής του επόμενου τοκομεριδίου και LIBOR = 6%.

1. Ποια η τιμή του ομολόγου σήμερα;
2. Ποια η τιμή του ομολόγου αύριο αν το LIBOR αυξηθεί στο 6,01%;
3. Από την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής, υπολογίστε τη Σταθμισμένη Διάρκεια, D.

Απάντηση:

1. $$P_0 = \frac{6}{1{,}17} + \frac{1}{1{,}17}\left\{\frac{6}{0{,}17}\left[1 - \frac{1}{(1{,}17)^{11}}\right]\right\} + \frac{100}{(1{,}17)^{12}} = € \; 45{,}12774$$

Η τιμή είναι σε πολύ μεγάλη έκπτωση επειδή το ασφάλιστρο κινδύνου χώρας είναι πολύ μεγάλο, r_p = 11%.

ΠΑΡΑΞΕΝΗ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ

2. Μετά από μία ημέρα, το LIBOR αυξάνεται, το τοκομερίδιο της πρώτης χρονιάς έχει ήδη καθοριστεί και δεν μεταβάλλεται, αλλά αναμένεται να μεταβληθούν τα υπόλοιπα τοκομερίδια.

$$P_1 = \frac{6}{1{,}1701} + \frac{1}{1{,}1701}\left\{\frac{6{,}01}{0{,}1701}\left[1 - \frac{1}{(1{,}1701)^{11}}\right]\right\} + \frac{100}{(1{,}1701)^{12}} = € \, 45{,}14138$$

- Παρατηρήσατε ότι LIBOR ↑ και P ↑ !!
  Προφανώς, η θετική επίδραση στην τιμή από την αναμενόμενη αύξηση του τοκομεριδίου είναι μεγαλύτερη από την αρνητική επίδραση στην τιμή από την αύξηση του συντελεστή προεξόφλησης.
- Σημειώνεται ότι στα ομόλογα σταθερού τοκομεριδίου υπάρχει μόνο η αρνητική επίδραση του συντελεστή προεξόφλησης και γι’ αυτό το λόγο ισχύει πάντοτε η αρνητική σχέση μεταξύ τιμής και επιτοκίων.

ΠΑΡΑΞΕΝΗ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ

3. $$\Delta P / P = +0{,}03022\%,\ \Delta r = 0{,}01\%,\ \Delta P/P = -D\frac{\Delta r}{1+r} \Rightarrow$$

$$D = -\frac{0{,}03022}{0{,}01}\left(1{,}17\right) = -3{,}535 \text{ έτη}$$

Σημειώσατε ότι δεν τίθεται θέμα κυρτότητας μια και η μεταβολή στο επιτόκιο είναι ελάχιστη, 1 μονάδα βάσης.

Παρατηρήσατε ότι η σταθμισμένη διάρκεια, D:

(i) είναι αρνητική

(ii) δεν είναι ίση με 1 χρόνο, όπως περίπου θα αναμένονταν δεδομένου ότι τα τοκομερίδια πρόκειται να αναπροσαρμοστούν σε 1 χρόνο.

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΑΙΤΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΑ ΕΠΙΤΟΚΙΑ

Στο προηγούμενο παράδειγμα η απρόσμενη θετική μεταβολή στην τιμή μετά την αύξηση του επιτοκίου είναι απόρροια του συνδυασμού δύο παραγόντων :

(1) Η ομολογία είναι υπό-το-άρτιο.

(2) Μετεβλήθη το ύψος του LIBOR και όχι του ασφαλίστρου κινδύνου.

Όταν το ασφάλιστρο κινδύνου αυξάνεται (μειώνεται), τότε η τιμή του ομολόγου κυμαινόμενου τοκομεριδίου <u>πάντοτε</u> μειώνεται (αυξάνεται),είτε το ομόλογο πωλείται υπέρ-το-άρτιο είτε πωλείται υπό-το-άρτιο. Αιτία είναι ότι οι μεταβολές του ασφαλίστρου κινδύνου επηρεάζουν μόνον τον συντελεστή προεξόφλησης και όχι το τοκομερίδιο.

Επομένως, στις αγορές ομολόγων χωρών, που τιμολογούνται υπό-το-άρτιο, μετά από μια αύξηση των επιτοκίων η τιμή μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί ανάλογα με την πηγή προέλευσης της αύξησης αυτής, αν δηλαδή αντικατοπτρίζει γενική αύξηση των επιτοκίων παγκοσμίως ή αν προέρχεται από αύξηση του κινδύνου της συγκεκριμένης χώρας.

Η ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΟΜΟΛΟΓΩΝ ΥΠΕΡ- ΚΑΙ ΥΠΟ-ΤΟ-ΑΡΤΙΟ

Άσκηση:

Ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου με τοκομερίδιο που αναπροσαρμόζεται ετησίως σύμφωνα με τις μεταβολές του επιτοκίου r έχει εναπομένουσα λήξη Μ έτη και ονομαστική αξία F = € 1.

Το τοκομερίδιο, C, του τέλους της πρώτης χρονιάς, δεν έχει ακόμα καθοριστεί.

Υποθέσατε ότι το ασφάλιστρο κινδύνου παραμένει σταθερό.

Αποδείξατε ότι :

i. Αν το ομόλογο πωλείται στο άρτιο και τα επιτόκια στην οικονομία μεταβληθούν, η τιμή του <u>δεν θα μεταβληθεί</u>.

ii. Αν το ομόλογο πωλείται υπέρ-το-άρτιο και τα επιτόκια στην οικονομία αυξηθούν, η τιμή του θα μειωθεί.

iii. Αν το ομόλογο πωλείται υπό-το-άρτιο και τα επιτόκια στην οικονομία αυξηθούν, η τιμή του <u>θα αυξηθεί</u>!!

Απάντηση:

$$F = €1 \Rightarrow C = cF = c \Rightarrow P = \frac{C}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^M}\right] + \frac{1}{(1+r)^M}$$

Για να βρούμε τη μεταβολή στην τιμή, υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι όταν το επιτόκιο r μεταβάλλεται, θα μεταβληθεί εξίσου και το τοκομερίδιο C:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = 1$$

Υποθέτουμε, με άλλα λόγια, ότι η μεταβολή στο r δεν είναι λόγω της μεταβολής του ασφαλίστρου κινδύνου, αλλά λόγω μεταβολής των επιτοκίων στην οικονομία.

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{C}{r}\right] \times \left[1 - \frac{1}{(1+r)^M}\right] + \frac{C}{r} \times \frac{\partial}{\partial r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^M}\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{(1+r)^M}\right] =$$

... ΥΠΕΡ- ΚΑΙ ΥΠΟ-ΤΟ-ΑΡΤΙΟ

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{C}{r^2}\right)\left[1-\frac{1}{(1+r)^M}\right]+\frac{C}{r}\times M(1+r)^{-M-1}-M(1+r)^{-M-1}$$

Συνεπώς:

$$\frac{\partial P}{\partial r}=\left(1-\frac{C}{r}\right)\frac{1}{r}\left[1-(1+r)^{-M}\right]-\left(1-\frac{C}{r}\right)M(1+r)^{-M-1}=$$

$$\ldots\ldots=\left(1-\frac{C}{r}\right)\frac{1}{r}\left[1-\frac{1+r(M+1)}{(1+r)^{M+1}}\right]$$

Το τμήμα στις αγκύλες είναι μεταξύ 0 και 1, δηλαδή πάντα θετικό. Συνεπώς :

... ΥΠΕΡ- ΚΑΙ ΥΠΟ-ΤΟ-ΑΡΤΙΟ

i. Αν $C = r \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial r} = 0$

ii. Αν $C > r \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial r} < 0$

iii. Αν $C < r \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial r} > 0$!!!!

Αντίθετα στα ομόλογα σταθερού τοκομεριδίου, $\dfrac{\partial C}{\partial r} = 0$ και συνεπώς, $\dfrac{\partial [C/r]}{\partial r} = -\dfrac{C}{r}$ και όχι $\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{C}{r^2}\right)$ που είχαμε προηγουμένως. Στα ομόλογα σταθερού τοκομεριδίου πάντοτε ισχύει η σχέση : $\dfrac{\partial P}{\partial r} < 0$

ΑΣΚΗΣΗ για το Σπίτι

Αποδείξατε ότι D = -3,535 στο προηγούμενο παράδειγμα, ως εξής:

- Ξεκινήστε με ένα ομόλογο της ίδιας χώρας, που όμως πληρώνει ετήσιο τοκομερίδιο 17% = 11% + 6% = απαιτούμενη απόδοση.

  Διαχωρίστε το σε δύο τμήματα:

  1. Το Brady bond του παραδείγματος
  2. Μια χρονική ροή (annuity)

  και συνεχίστε.