Ειδικά Θέματα Διαχείρισης Κινδύνου

Μεταβλητότητα (Volatility)

Σημασία της μέτρησης της μεταβλητότητας

- Σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή ένα χρημ/κό ίδρυμα είναι εκτεθειμένο σε έναν μεγάλο αριθμό μεταβλητών της αγοράς:
    - επιτόκια
    - συναλλαγματικές ισοτιμίες
    - τιμές μετοχών
    - τιμές ομολόγων
    - τιμές εμπορευμάτων

- Οι τιμές των μεταβλητών της αγοράς είναι ενδογενείς.

- Σε αντίθεση, για παράδειγμα, με τις τιμές των μακροοικονομικών μεταβλητές οι οποίες μετράνε τα μεγέθη της οικονομίας και είναι εξωγενείς.

Σημασία της μέτρησης της μεταβλητότητας (2)

- Έστω $X_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$
- Ας υποθέσουμε ότι η μεταβλητή Y τη χρονική στιγμή t είναι μια συνάρτηση (γραμμική) της μεταβλητής X, δηλ $Y_t = a + bX_t$
- Τότε $\mathrm{V}ar(Y_t) = b^2 Var(X_t) = b^2\sigma^2$
- Ας υποθέσουμε τώρα ότι η μεταβλητή Y τη χρονική στιγμή t είναι μια συνάρτηση (γραμμική) της μεταβλητής X αλλά και της προσδοκίας για τη μελλοντική τιμή της Y τη χρονική στιγμή t+1, βάσει της πληροφορίας μέχρι τη χρονική στιγμή t, δηλ $Y_t = a + bX_t + cE(Y_{t+1}|F_t)$
- $\mathrm{V}ar(Y_t) = ?$

Σημασία της μέτρησης της μεταβλητότητας (συνέχεια)

- Η μεταβλητότητα ποσοτικοποιεί την αβεβαιότητα για την μελλοντική τιμή μιας μεταβλητής της αγοράς.

- Είναι σημαντικό για τους διαχειριστές των κινδύνων να παρακολουθούν την μεταβλητότητα των μεταβλητών της αγοράς ούτως ώστε να έχουν μία εκτίμηση των πιθανών απωλειών για το χαρτοφυλάκιο ή το χρημ/κό ίδρυμα.

- Μία μεταβλητή με μεγάλη μεταβλητότητα είναι πιθανό να πάρει μία τιμή εξαιρετικά δυσμενή για το χρημ/κό ίδρυμα την επόμενη μέρα, σε σχέση με μία μεταβλητή με πολύ μικρότερη μεταβλητότητα.

Μεταβλητότητα (Volatility): Ορισμός (συνέχεια)

- Η μεταβλητότητα μίας μεταβλητής "σ" ορίζεται ως η <u>τυπική απόκλιση των αποδόσεων της μεταβλητής</u> αυτής ανά μονάδα χρόνου.
- Έστω S_i η τιμή μίας μεταβλητής στο τέλος της ημέρας i.

- Η ημερήσια απόδοση r_i για την μεταβλητή S την ημέρα i, ορίζεται ως:

$$r_i = ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Μεταβλητότητα (Volatility): Παράδειγμα 1ο

- **Παράδειγμα**: Έστω η τιμή ενός χρημ/κού περιουσιακού στοιχείου είναι €60 και η ημερήσια μεταβλητότητά του είναι 1.2.

- Μας δίνει η παραπάνω μέτρηση κάποια αίσθηση για την τιμή του περιουσιακού στοιχείου, την επόμενη μέρα;

- Εάν οι αλλαγές στην τιμή του περιουσιακού στοιχείου ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο 0 και τυπική απόκλιση 1.2, μπορούμε να είμαστε κατά 95% σίγουροι ότι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου θα κυμανθεί μεταξύ:

  60 – 1.96 x 1.2 = €57.65 και 60 + 1.96 x 1.2 = €62.35

Μεταβλητότητα (Volatility): Παράδειγμα 1ο (συνέχεια)

- Συνεπώς, <u>η γνώση της μεταβλητότητας του περιουσιακού στοιχείου, μας δίνει μία αίσθηση για το εύρος της τιμής του περιουσιακού στοιχείου την επόμενη μέρα.</u>

- <u>Βασική υπόθεση:</u>

  - <u>Οι αλλαγές στην τιμή του περιουσιακού στοιχείου κατανέμονται με γνωστή κατανομή (στο παράδειγμα κανονική κατανομή, από εκεί προκύπτει και το ±1.96 τυπικές αποκλίσεις, για διάστημα εμπιστοσύνης 95%).</u>

Μεταβλητότητα (Volatility): Μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα

- Μπορούμε γνωρίζοντας τη μεταβλητότητα για χρονική μονάδα μίας ημέρας, να εξάγουμε συμπεράσματα για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα;

- **Υποθέτοντας ότι οι αλλαγές στην τιμή του περιουσιακού στοιχείου είναι ανεξάρτητες από ημέρα σε ημέρα** (μία υπόθεση που ισχύει σε μεγάλο βαθμό στα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία) η διακύμανση των αλλαγών της τιμής για μία περίοδο T ημερών είναι T φορές η διακύμανση των αλλαγών της τιμής για μία ημέρα.

- Η τυπική απόκλιση των αλλαγών των τιμών (μεταβλητότητα) είναι η τετραγωνική ρίζα της αντίστοιχης διακύμανσης, συνεπώς η μεταβλητότητα για μία περίοδο T ημερών θα είναι ίση με $\sqrt{T}$ φορές την μεταβλητότητα για περίοδο μίας ημέρας.

- Η αβεβαιότητα αυξάνεται με ρυθμό ίσο με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου (αυξάνεται με μειούμενο ρυθμό).

Μεταβλητότητα (Volatility): Παράδειγμα 2ο

- **Παράδειγμα**: Έστω η τιμή ενός χρημ/κού περιουσιακού στοιχείου είναι €60 και η ημερήσια μεταβλητότητά του είναι 1.2.

- Ποιά είναι η μεταβλητότητα του περιουσιακού στοιχείου για περίοδο 5 ημερών;

- Η τυπική απόκλιση των 5 ημερών είναι ίση με $\sqrt{5}$ x 1.2 =2.68.
- Εάν οι αλλαγές στην τιμή του περιουσιακού στοιχείου ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο 0 και τυπική απόκλιση2.68, μπορούμε να είμαστε κατά 95% σίγουροι ότι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου θα κυμανθεί μεταξύ:

60 – 1.96 x 2.68 = €54.74 και 60 + 1.96 x 2.68 = €65.26

Μεταβλητότητα (Volatility): Παράδειγμα 2ο (συνέχεια)

- Το εύρος των πιθανών τιμών του περιουσιακού στοιχείου στο παράδειγμά μας αυξήθηκε όταν μετακινηθήκαμε από ορίζοντα μίας ημέρας σε ορίζοντα πέντε ημερών.

- Εύρος τιμών σε ορίζοντα 1 ημέρας: [57.65, 62.35]

- Εύρος τιμών σε ορίζοντα 5 ημερών: [54.74, 65.26]

- Η αύξηση του εύρους των πιθανών τιμών (της αβεβαιότητας δηλαδή) δεν είναι ανάλογη της αύξησης του χρονικού ορίζοντα (5-πλάσια) αλλά ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της αύξησης του χρονικού ορίζοντα.

- <u>Βασική υπόθεση</u>: Οι αλλαγές στην τιμή του περιουσιακού στοιχείου είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (αυτοσυσχέτιση κοντά στο μηδέν). (Θα δούμε στην ενότητα του Value at Risk, τι συμβαίνει όταν έχουμε αυτοσυσχέτιση).

Μεταβλητότητα (Volatility): Ρυθμός Διακύμανσης Variance Rate

- Ο ρυθμός διακύμανσης είναι το τετράγωνο της μεταβλητότητας (δηλαδή το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης).

- Ο ρυθμός διακύμανσης αλλάζει ανάλογα με τον χρόνο, δηλαδή ο ρυθμός διακύμανσης των 5 ημερών είναι 5 φορές τον ρυθμό διακύμανσης της 1 ημέρας.

- Επί της ουσίας παρόμοιο μέτρο με την μεταβλητότητα.

Μεταβλητότητα (Volatility): Τι την προκαλεί;

- Βάσει των παραδοσιακών παραδοχών των μοντέλων αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων, οι μεταβολές στις τιμές τους προέρχονται από νέες πληροφορίες για αυτά.

- Η νέα πληροφορία οδηγεί σε μία αλλαγή της τιμής του περιουσιακού στοιχείου, η οποία προκαλεί μεταβλητότητα.

- Εάν η πληροφορία αποκλειστικά δημιουργεί την μεταβλητότητα, τότε θα έπρεπε η μεταβλητότητα των τιμών από το κλείσιμο των αγορών τις Παρασκευές μέχρι το κλείσιμό τους τις Δευτέρες, να είναι 3 φορές η μεταβλητότητα από το κλείσιμο μίας μέρας μέχρι το κλείσιμο της επόμενης μέρας (χωρίς την μεσολάβηση ημερών χωρίς διαπραγμάτευση)

- Ακαδημαϊκές έρευνες (Fama (1965), French (1980) και French & Roll (1986)), έδειξαν ότι η μεταβλητότητα των 3 ημερών (μαζί με Σ/Κ) είναι μόνο 22%, 19% ή 10.7% (αντίστοιχα) μεγαλύτερη από την μεταβλητότητα μίας ημέρας!!

Μεταβλητότητα (Volatility): Τι την προκαλεί; (συνέχεια)

- Ένας λόγος που θα μπορούσε να ισχύει η μικρότερη της θεωρητικής αύξησης της μεταβλητότητας είναι ότι όταν είναι κλειστές οι αγορές, δεν παράγεται τόση νέα πληροφορία.

- Μία ακαδημαϊκή εργασία του Roll (1984) σύγκρινε πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα στο διάστημα 3 ημερών που περιλαμβάνει το Σ/Κ σε σχέση με την μεταβλητότητα της μίας ημέρας, για τις τιμές παραγώγων πορτοκαλιών. Το αποτέλεσμα ήταν 1.54 φορές την μεταβλητότητα της μίας ημέρας.

- Το σκεπτικό είναι ότι οι ειδήσεις που αφορούν τα πορτοκάλια είναι οι ειδήσεις που αφορούν τον καιρό, που είναι ισοπίθανο να προκύψουν οποιαδήποτε ημέρα.

Μεταβλητότητα (Volatility): Μέρες Διαπραγματεύσεων ή Ημερολογιακές Ημέρες;

- Λόγω του ότι η μεταβλητότητα συνδέεται περισσότερο με τις ημέρες όπου οι αγορές είναι ανοικτές, οι αναλυτές τείνουν να χρησιμοποιούν για την μέτρηση της μεταβλητότητας τον αριθμό των ημερών διαπραγμάτευσης.

- Συνήθης υπόθεση: <u>252 ημέρες διαπραγμάτευσης (trading days) τον χρόνο</u>.

- Η μεταβλητότητα ενός έτους $\sigma_{έτους} = \sigma_{ημέρας} \times \sqrt{252}$

- Ως αποτέλεσμα, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι η ημερήσια μεταβλητότητα είναι περίπου 6% της ετήσιας.

Μεταβλητότητα (Volatility): Υπολογισμός με την χρήση ιστορικών δεδομένων

- Ένας τρόπος υπολογισμού της μεταβλητότητας ενός περιουσιακού στοιχείου είναι μέσω των ιστορικών μεταβολών της τιμής του.

- Βασική υπόθεση: Η μεταβλητότητα που παρατηρήσαμε σε μία παρελθοντική χρονική περίοδο, είναι η πραγματική και παραμένει σταθερή στον χρόνο.

- Επί της ουσίας, χρησιμοποιούμε τα ιστορικά δεδομένα για να υπολογίσουμε μία εκτίμηση της μεταβλητότητας.

Μεταβλητότητα (Volatility): Υπολογισμός με την χρήση ιστορικών δεδομένων (συνέχεια)

- Έστω:
  - n+1 ο αριθμός των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούμε για την μέτρηση.
  - S_i , η αξία του περιουσιακού στοιχείου στο τέλος της χρονικής μονάδας i.
  - τ, το μήκος της χρονικής μονάδας (1 για μια ημέρα)
- Και έστω ότι οι αλλαγές στην τιμή του περιουσιακού στοιχείου ανά χρονική μονάδα (r_i) εκφράζονται ως:

$$r_i = ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Μεταβλητότητα (Volatility): Υπολογισμός με την χρήση ιστορικών δεδομένων (συνέχεια)

- Η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης (s) της αλλαγής της τιμής ανά χρονική μονάδα (r_i) δίνεται από τον τύπο:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \bar{r}\right)^2}$$

- ‘Η εναλλακτικά, εάν αντικαταστήσουμε την μέση απόδοση και προχωρήσουμε σε κάποιους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^2}$$

Μεταβλητότητα (Volatility): Υπολογισμός με την χρήση ιστορικών δεδομένων - Παράδειγμα

Ημέρα	Τιμή Κλεισίματος	Λόγος Τελικής προς Αρχικής	Ημερήσια Απόδοση
0	30		
1	30.3	1.01000	0.00995
2	28.4	0.93729	-0.06476
3	29.5	1.03873	0.03800
4	31.1	1.05424	0.05282
5	30.2	0.97106	-0.02937
6	30.9	1.02318	0.02291
7	31.5	1.01942	0.01923
8	30.2	0.95873	-0.04215
9	29.8	0.98675	-0.01333
10	29.9	1.00336	0.00335
11	30	1.00334	0.00334
12	30	1.00000	0.00000
13	30.2	1.00667	0.00664
14	30.9	1.02318	0.02291
15	30.1	0.97411	-0.02623
16	29.2	0.97010	-0.03036
17	28.8	0.98630	-0.01379
18	30.4	1.05556	0.05407
19	30.6	1.00658	0.00656
20	31	1.01307	0.01299

- Οι τιμές μίας μετοχής για 21 διαδοχικές ημέρες διαπραγμάτευσης.
- Άρα n=20, καθώς χάνουμε μία παρατήρηση για τον υπολογισμό των αποδόσεων.
- Υπολογίζουμε τις επιμέρους παραστάσεις του τύπου εκτίμησης της τυπικής απόκλισης (2ος τύπος, διαφάνεια 17):

$$\sum r_i = 0.03279 \qquad \sum r_i^2 = 0.01776$$

- Αντικαθιστώντας στον 2ο τύπο της διαφάνειας 17 (και θέτοντας όπου n=20):

$$s = \sqrt{\frac{0.01776}{19} - \frac{0.03279^2}{380}} = 0.03053$$

Μεταβλητότητα (Volatility): Υπολογισμός με την χρήση ιστορικών δεδομένων – Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η τυπική απόκλιση των ημερήσιων αποδόσεων της μετοχής του παραδείγματος είναι 3.053%.

- Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την ετήσια μεταβλητότητα, πάλι θα διαιρέσουμε με τ. Σε αυτή την περίπτωση, δεδομένου ότι η μονάδα χρόνου που χρησιμοποιήσαμε για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης είναι η ημέρα, το τ = 1/252 (252: trading days per year). Ουσιαστικά πολλαπλασιάζουμε την εκτίμηση της ημερήσιας τυπικής απόκλισης με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των ημερών ενός έτους.

- Σε αυτή την περίπτωση η εκτίμηση της ετήσιας μεταβλητότητας είναι ίση με 48.466%.

Δικαιώματα προαίρεσης (call options)

- Έστω ότι υπάρχει διαθέσιμο κεφάλαιο 1,000 ευρώ.
- Η μετοχή της εταιρίας Χ έχει τιμή 20 ευρώ.
- Άρα κάποιος μπορεί να αγοράσει 50 μετοχές με το κεφάλαιο των 1,000 ευρώ.
- Αν η τιμή αυξηθεί κατά 5 ευρώ, ο επενδυτής θα έχει κέρδος 250 ευρώ ή 25% (υποθέτοντας μηδενικά κόστη).

- Έστω τώρα ένα call option στη μετοχή της εταιρίας Χ με τιμή άσκησης (strike price) τα 20.
- Συνήθως τα συμβόλαια είναι για 100 μετοχές το κάθε ένα.
- Έστω ότι το κάθε συμβόλαιο κοστίζει 100 ευρώ, δηλ 1 ευρώ ανά μετοχή.
- Ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει 10 συμβόλαια.
- Συνεπώς, ουσιαστικά η έκθεσή του είναι σε 1,000 μετοχές.
- Αν η τιμή της μετοχής ανέβει στα 25 ευρώ, το κέρδος θα είναι 4,000 ευρώ ή 400%.

Δικαιώματα προαίρεσης (2)

- Έστω τώρα ότι η τιμή της μετοχής μειωθεί κατά 5 ευρώ.
- Στην 1η περίπτωση, ο επενδυτής θα έχει ζημιά 250 ευρώ ή -25% (υποθέτοντας μηδενικά κόστη).

- Στη 2η περίπτωση, η ζημιά θα είναι 1,000 ευρώ ή -100%.

Μεταβλητότητα (Volatility): Τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα από τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης (implied volatility)

- Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της μεταβλητότητας είναι μέσω των τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης (options).

- Η φόρμουλα αποτίμησης των δικαιωμάτων των Black-Scholes-Merton περιέχει την μεταβλητότητα (σ), η οποία όμως δεν είναι παρατηρήσιμη.

$$c = S_0 \, N(d_1) - K \, e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K \, e^{-rT} \, N(-d_2) - S_0 \, N(-d_1)$$

$$\text{όπου} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\text{και} \quad d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Μεταβλητότητα (Volatility): Τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα από τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης (implied volatility) (συνέχεια)

- Η τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα είναι η τιμή της μεταβλητότητας η οποία εάν αντικατασταθεί στην φόρμουλα αποτίμησης (μαζί με την διάρκεια του δικαιώματος, την τιμή του υποκείμενου τίτλου, την τιμή εξάσκησης και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο), θα μας δώσει την αγοραία τιμή του δικαιώματος.

- Η φόρμουλα αποτίμησης Black-Scholes-Merton δεν είναι δυνατόν να αντιστραφεί.

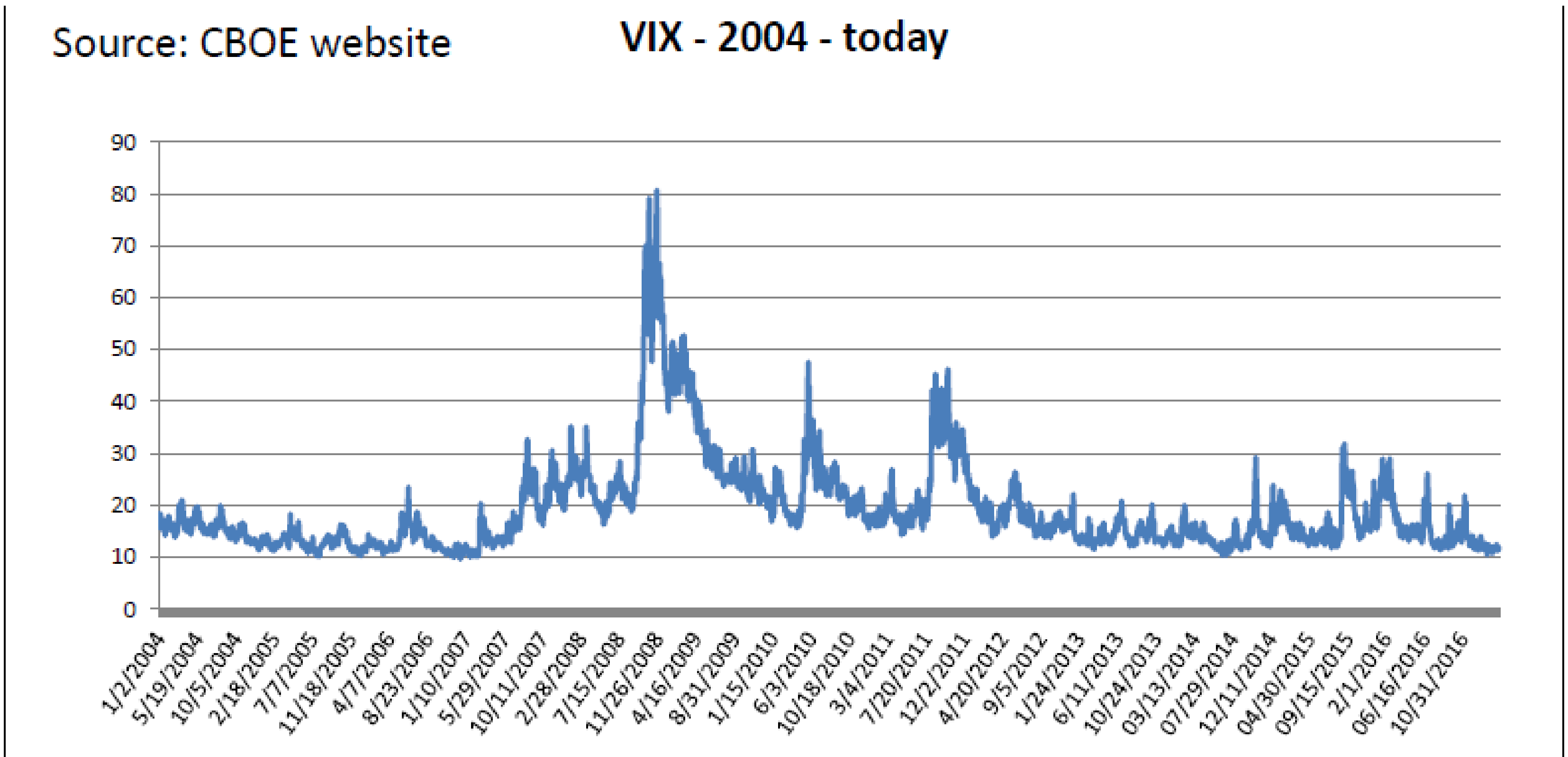
- Συνεπώς ο τρόπος επίλυσης της ως προς την μεταβλητότητα είναι μέσω επαναληπτικών δοκιμαστικών προσεγγίσεων (simulations).

Μεταβλητότητα (Volatility): Τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα από τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης (implied volatility) (παράδειγμα)

- Έστω ένα 3-μηνο δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου, γραμμένο σε μία μετοχή η οποία δεν δίνει μερίσματα. (παράδειγμα από το βιβλίο Risk Management and Financial Institutions 1st edition, John C.Hul)
- Τιμή δικαιώματος (c): €1.875
- Τιμή μετοχής (S_0): €21
- Τιμή εξάσκησης (K): €20
- Επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (r): 10%
- Εάν δοκιμάσουμε να θέσουμε σ=20%, c = €1.76 < €1.875 (άρα θέλουμε μεγαλύτερη τιμή μεταβλητότητας για να ανέβει η αξία του δικαιώματος).
- Εάν δοκιμάσουμε σ = 30%, c= €2.10 > €1.875 (άρα θέλουμε τιμή μεταβλητότητας μεταξύ 20% και 30%).
- …
- Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε στο ότι η μεταβλητότητα που λύνει την εξίσωση έχει τιμή 23.5% τον χρόνο.

Μεταβλητότητα (Volatility): Τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα από τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης στον δείκτη S&P500 (VIX)

- Χρησιμοποιώντας φόρμουλες αποτίμησης (παρόμοιες στο πνεύμα με αυτές των Black – Scholes – Merton) σε πάνω από ένα δικαιώματα πάνω στον δείκτη S&P500, το Chicago Board Options Exchange (CBOE) τεκμαίρει μία προσέγγιση της ετησιοποιημένης μεταβλητότητας της αγοράς.



Μεταβλητότητα (Volatility): Τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα – Υποθέσεις

- Βασικές υποθέσεις του μοντέλου Black – Scholes:
  - Οι μεταβολές στις τιμές των υποκείμενων τίτλων ακολουθούν κανονική κατανομή.
  - Οι αγορές είναι αποτελεσματικές, δεν υπάρχει δυνατότητα πρόβλεψης των αλλαγών των τιμών.
  - Η μεταβλητότητα είναι σταθερή.
  - Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι σταθερό.

- Υπό συνθήκες κανονικότητας, τα μοντέλα αυτά μας δίνουν πληροφορία για τις προβλέψεις της αγοράς όσον αφορά την μελλοντική μεταβλητότητα.

- Η χρησιμότητα των μοντέλων εξαρτάται από την ισχύ των υποθέσεων.

Μεταβλητότητα (Volatility): Ιστορική μεταβλητότητα ή Τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα

- Η τεκμαιρόμενη μεταβλητότητα χρησιμοποιείται εκτεταμένα από τους συναλλασσόμενους στις αγορές (traders).

- Σε μεγάλο βαθμό όμως, για σκοπούς διαχείρισης κινδύνου γίνεται χρήση της μεταβλητότητας από ιστορικά δεδομένα.

- Οι υποθέσεις της κανονικότητας των μεταβολών των τιμών των αγοραίων μεταβλητών και της σταθερότητας της μεταβλητότητας εξετάζονται στην συνέχεια στους υπολογισμούς από ιστορικά δεδομένα.

Μεταβλητότητα (Volatility): Κατανομές μεταβολών χρημ/κών μεταβλητών

- Μέχρι στιγμής, είτε με την μέτρηση της μεταβλητότητας μέσω ιστορικών δεδομένων, είτε μέσω των μοντέλων αποτίμησης δικαιωμάτων, υποθέσαμε ότι οι μεταβολές στις χρημ/κές μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή.
- Ισχύει στην πράξη η υπόθεσή μας αυτή;

Ποσοστό ημερών όπου η απόλυτη τιμή των ημερήσιων μεταβολών των συναλλαγματικών ισοτιμιών, είναι μεγαλύτερη από 1 τυπ.απ., 2 τ.α., ..., 6 τ.α. και θεωρητική πρόβλεψη με βάση την κανονική κατανομή.

Table 10.1 Percentage of Days When Absolute Size of Daily Exchange Rate Moves Is Greater Than One, Two,..., Six Standard Deviations (S.D. = standard deviation of percentage daily change)

	Real World (%)	Normal Model (%)
> 1 S.D.	23.32	31.73
> 2 S.D.	4.67	4.55
> 3 S.D.	1.30	0.27
> 4 S.D.	0.49	0.01
> 5 S.D.	0.24	0.00
> 6 S.D.	0.13	0.00

Μεταβλητότητα (Volatility): Κατανομές μεταβολών χρημ/κών μεταβλητών

- Όπως φαίνεται και στον πίνακα της προηγούμενης διαφάνειας, στην πραγματικότητα είναι πιο πιθανό να συμβούν μεταβολές μικρότερες από μία τυπική απόκλιση και μεγαλύτερες από 2 τυπικές αποκλίσεις, σε σχέση με την κανονική κατανομή.

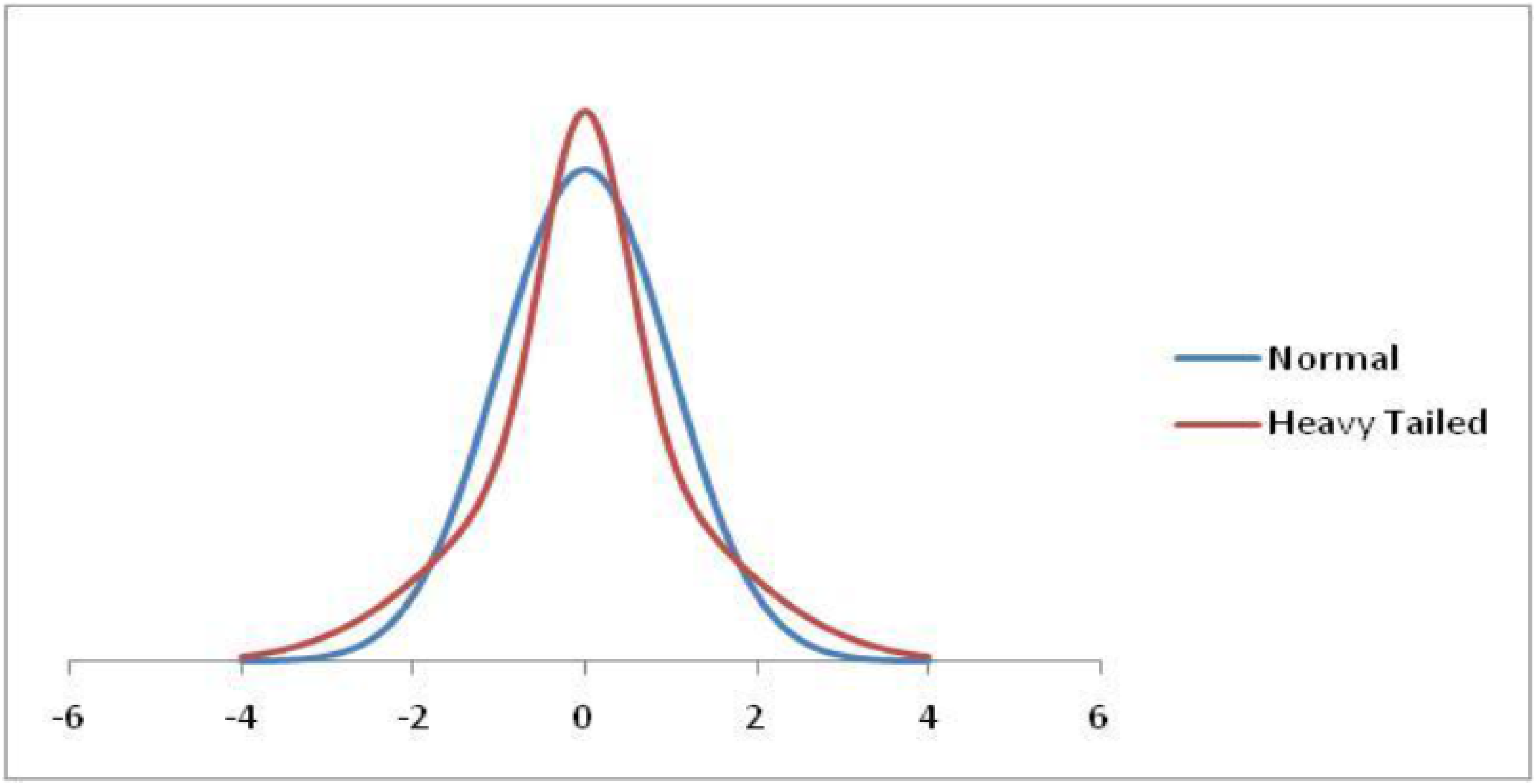
- Στην πράξη, οι μεταβολές των χρηματοοικονομικών μεταβλητών ακολουθούν μία λεπτόκυρτη κατανομή.

- Η λεπτόκυρτη κατανομή έχει πιο ψηλή κορυφή (δηλαδή είναι πιο πιθανό να υπάρξουν παρατηρήσεις κοντά στον μέσο) και πιο χοντρά άκρα (fat tails) (δηλαδή είναι πιο πιθανό να υπάρξουν ακραίες παρατηρήσεις).

- Παράλληλα είναι λιγότερο πιθανό να υπάρξουν παρατηρήσεις σε ενδιάμεσες τιμές, σε σχέση με την κανονική κατανομή.

Μεταβλητότητα (Volatility): Κατανομές μεταβολών χρημ/κών μεταβλητών (συνέχεια)

Σύγκριση κανονικής κατανομής (normal, Μπλε γραμμή) με λεπτόκυρτη κατανομή (heavy tailed, Κόκκινη γραμμή), με ίδιο μέσο και τυπική απόκλιση.



Source: Risk Management and Financial Institutions 3e, Chapter 10, Copyright © John C. Hull 2012

Μεταβλητότητα (Volatility): Έλεγχος ημερήσιας μεταβλητότητας

- Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ότι η μεταβλητότητα είναι σταθερή μέσα στον χρόνο.

- Στην πράξη η μεταβλητότητα δεν παραμένει σταθερή και οι διαχειριστές του κινδύνου παρακολουθούν καθημερινά την εξέλιξή της.

- Ορίζουμε ως σ_n την ημερήσια μεταβλητότητα για την περίοδο μεταξύ της ημέρας *n-1* και της ημέρας *n*, όπως μπορούμε να την μετρήσουμε στο τέλος της ημέρας *n-1*. (Ο αντίστοιχος ρυθμός διακύμανσης είναι $(\sigma_n)^2$).

- Ορίζουμε ως S_i την αξία της χρημ/κής μεταβλητής στο τέλος της ημέρας i.

- Η απόδοση μπορεί να εκφραστεί ως $r_i = S_i / S_{i-1} - 1$.

Μεταβλητότητα (Volatility): Έλεγχος ημερήσιας μεταβλητότητας

- Έστω ότι χρησιμοποιούμε m μέρες για την εκτίμηση της μεταβλητότητας. Στην πράξη γίνονται μία σειρά από παραδοχές που μόνο λίγο αλλάζουν την εκτίμηση της μεταβλητότητας:
  - Θεωρείται ότι η μέση μεταβολή είναι ίση με το 0, καθώς για τόσο μικρά διαστήματα οι μεταβολές είναι πολύ μικρές σε σχέση με την μεταβλητότητα.
  - Αντί m-1 χρησιμοποιείται m, φεύγοντας από την αμερόληπτη εκτίμηση.

$$\sigma_n{}^2 = \frac{\sum_{\iota=1}^{m} r_{n-i}{}^2}{m}$$

Μεταβλητότητα (Volatility): Υπολογισμός με την χρήση ιστορικών δεδομένων – Απλουστευτικές παραδοχές (παράδειγμα)

Ημέρα	Τιμή Κλεισίματος	Λόγος Τελικής προς Αρχικής	Ημερήσια Απόδοση
0	30		
1	30.3	1.01000	0.00995
2	28.4	0.93729	-0.06476
3	29.5	1.03873	0.03800
4	31.1	1.05424	0.05282
5	30.2	0.97106	-0.02937
6	30.9	1.02318	0.02291
7	31.5	1.01942	0.01923
8	30.2	0.95873	-0.04215
9	29.8	0.98675	-0.01333
10	29.9	1.00336	0.00335
11	30	1.00334	0.00334
12	30	1.00000	0.00000
13	30.2	1.00667	0.00664
14	30.9	1.02318	0.02291
15	30.1	0.97411	-0.02623
16	29.2	0.97010	-0.03036
17	28.8	0.98630	-0.01379
18	30.4	1.05556	0.05407
19	30.6	1.00658	0.00656
20	31	1.01307	0.01299

- Οι τιμές μίας μετοχής για 21 διαδοχικές ημέρες διαπραγμάτευσης.
- Προηγούμενη εκτίμηση: 0.03053
- Εδώ, ποσοστιαίες μεταβολές, υπόθεση για μέση μεταβολή ίση με 0, χρήση του συνολικού αριθμού παρατηρήσεων.
- Νέα εκτίμηση: 0.0298.
- Οι 2 εκτιμήσεις είναι πολύ κοντά.
- Οι απλουστεύσεις είναι δικαιολογημένες και λογικές, για την φύση αυτών των μεταβλητών.
- Οι απλουστεύσεις αυτές απλοποιούν και επιταχύνουν την διαδικασία εκτίμησης της μεταβλητότητας, ένας σημαντικός παράγοντας στην πράξη.

Μεταβλητότητα (Volatility): Έλεγχος ημερήσιας μεταβλητότητας – Σταθμισμένα μοντέλα

- Γνωρίζουμε ότι στην πράξη, οι πιο πρόσφατες τιμές της μεταβλητότητας μας δίνουν μεγαλύτερη πληροφορία σε σχέση με απομακρυσμένες τιμές της.

- Ένα ακραίο παράδειγμα είναι η εκδήλωση ενός σοκ στην αγορά. Το σοκ αυτό θα αυξήσει την μεταβλητότητα των χρημ/κών μεταβλητών, έτσι οι πρόσφατες παρατηρήσεις θα είναι αυτές που θα μας δίνουν σωστές προβλέψεις.

- Όταν περάσει αρκετός χρόνος από το σοκ, η μεταβλητότητα θα μειωθεί, συνεπώς οι πιο πρόσφατες τιμές της (που θα είναι και μειωμένες) θα μας βοηθάνε να σχηματίσουμε ορθότερες προβλέψεις, σε σύγκριση με το να λαμβάναμε εξίσου υπόψη τις παρατηρήσεις αμέσως μετά το σοκ.

Μεταβλητότητα (Volatility): Έλεγχος ημερήσιας μεταβλητότητας – Σταθμισμένα μοντέλα (συνέχεια)

- Συνεπώς αντί να υπολογίσουμε ένα απλό μέσο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν σταθμικό μέσο, με σταθμίσεις (α) οι οποίες θα είναι μεγαλύτερες για τις πρόσφατες παρατηρήσεις και όσο απομακρυνόμαστε πίσω στον χρόνο θα μειώνονται:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r_{n-i}^2$$

$$\text{όπου } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

- Τις σταθμίσεις (α) μπορούμε να τις ορίσουμε εμείς, μέσω παρατήρησης των ιστορικών δεδομένων.

Μεταβλητότητα (Volatility): Έλεγχος ημερήσιας μεταβλητότητας – Μοντέλα κινητού μέσου εκθετικής στάθμισης (Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) model)

- Μία συγκεκριμένη μορφή του προηγούμενου μοντέλου είναι το EWMA model.

- Σε αυτό το μοντέλο, θέτουμε όπου $\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$, όπου το λ είναι μία σταθερά που παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1 και υποθέτουμε ότι $m=\infty$.

- Τότε: $$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)r_{n-1}^2$$

- Το EWMA βασίζεται στην υπόθεση ότι το λ είναι σταθερό.

Μεταβλητότητα (Volatility): Έλεγχος ημερήσιας μεταβλητότητας – Μοντέλα κινητού μέσου εκθετικής στάθμισης (Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) model) (παράδειγμα)

- Έστω λ = 0.90 (το γνωρίζουμε από ιστορικά δεδομένα),
- Η μεταβλητότητα $\sigma_{n-1} = 0.01$(η εκτίμηση για την μεταβλητότητα της ημέρας n-1, η οποία σχηματίστηκε την ημέρα n-2). $\sigma_{n-1}^2 = 0.0001$
- Ενώ την ημέρα n-1, η μεταβλητή αυξήθηκε 2%, $r_{n-1}^2 = 0.0004$

- Η εκτίμηση για την διακύμανση της ημέρας n είναι:

$$\sigma_n^2 = 0.9 \times 0.0001 + (1 - 0.9) \times 0.0004 = 0.00013$$

- Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα μπορούμε να υπολογίσουμε την εκτίμηση της μεταβλητότητας: 1.14% ανά ημέρα.
- Η προηγούμενη εκτίμηση για την μεταβλητότητα (η οποία σχηματίστηκε στο n-2 για το n-1, ήταν 1%.
- Επειδή η πραγματική μεταβολή την ημέρα n-1 ήταν πιο μεγάλη από την αντίστοιχη πρόβλεψη, η νέα εκτίμηση προσαρμόστηκε και είναι μεγαλύτερη.