ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Συσχέτιση (Correlation) - Copulas

Σημασία της μέτρησης της συσχέτισης

- Έστω μία εταιρεία που είναι εκτεθειμένη σε δύο μεταβλητές της αγοράς.

- Πιθανή αύξηση των 2 μεταβλητών θα οδηγήσει σε ζημιά για την εταιρία.

- Εάν οι αλλαγές των τιμών των 2 μεταβλητών έχουν υψηλή συσχέτιση, η εταιρία θα έχει πολύ μεγάλη έκθεση στις μεταβολές τους.

- Εάν οι αλλαγές των τιμών των 2 μεταβλητών έχουν αρνητική συσχέτιση, η εταιρία θα έχει μικρή έκθεση στις μεταβολές τους.

- Για την σωστή και ολοκληρωμένη μέτρηση του κινδύνου ένας διαχειριστής θα πρέπει να παρακολουθεί και τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών στις οποίες υπάρχει έκθεση.

Συσχέτιση (Correlation): Ορισμός

- Η συσχέτιση δύο μεταβλητών V_1 και V_2 δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\rho = \frac{E(V_1 V_2) - E(V_1)E(V_2)}{SD(V_1)SD(V_2)}$$

- Όπου E(·) η αναμενόμενη τιμή και SD(·) η τυπική απόκλιση.

- Εάν δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των 2 μεταβλητών:

$$E(V_1 V_2) = E(V_1)E(V_2) \text{ και } \rho = 0$$

- Εάν $V_1 = V_2$ τότε ο αριθμητής και ο παρονομαστής του τύπου της συσχέτισης θα είναι ίσοι, άρα ρ = 1, κάτι αναμενόμενο.

Συνδιακύμανση (Covariance): Ορισμός

- Ο τύπος της συνδιακύμανσης μεταξύ δύο μεταβλητών V_1 και V_2 :

$$\operatorname{cov}(V_1, V_2) = E(V_1 V_2) - E(V_1)E(V_2)$$

- Όπου E(·) η αναμενόμενη τιμή.
- Ο τύπος της συσχέτισης μπορεί να γραφεί και ως:

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(V_1, V_2)}{SD(V_1)SD(V_2)}$$

- Παρόλο που διαισθητικά είναι πιο εύκολα κατανοητή η έννοια της συσχέτισης (ρ), η συνδιακύμανση χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό στα μοντέλα.

Συνδιακύμανση (Covariance): Ορισμός

- Η (δειγματική) συνδιακύμανση μεταξύ δύο μεταβλητών V_1 και V_2 δίνεται από τον παρακάτω τύπο (χρησιμοποιώντας m παρατηρήσεις):

$$\operatorname{cov}(V_1, V_2) = \frac{\sum_{i=1}^{m}(V_{1,i} - \overline{V}_1)(V_{2,i} - \overline{V}_2)}{m-1}$$

Συνδιακύμανση (Covariance): Ορισμός

- Δύο μεταβλητές ορίζονται ως στατιστικά ανεξάρτητες, όταν η γνώση για την μία από αυτές δεν επηρεάζει την κατανομή πιθανοτήτων της άλλης.

- Αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$f(V_2 | V_1 = x) = f(V_2)$$

- Όπου f(·) η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

- Εάν η συσχέτιση μεταξύ των 2 μεταβλητών είναι 0, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει εξάρτηση μεταξύ τους;

- Όχι απαραίτητα!

Συσχέτιση Vs Εξάρτησης (παράδειγμα)

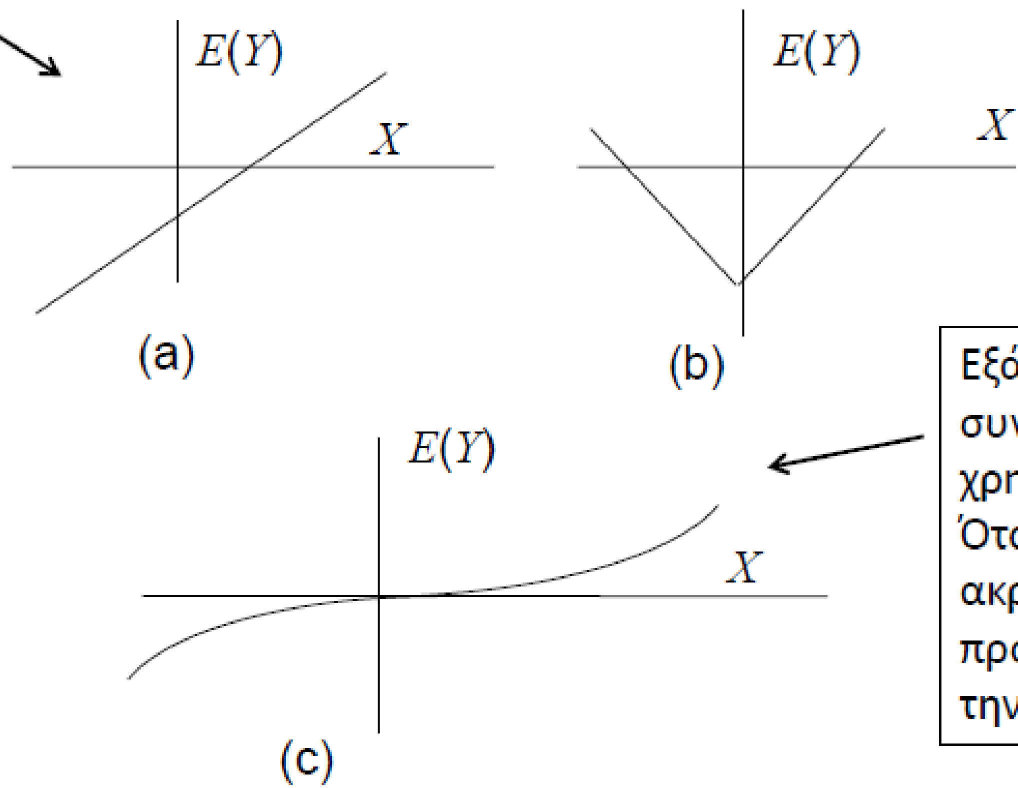
- Αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν 3 ισοπίθανες τιμές για την μεταβλητή V_1 : –1, 0, ή +1.
- Και εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι όταν V_1 = -1 ή +1, τότε V_2 = 1 και όταν V_1 = 0, τότε και V_2 = 0.
- Σε αυτή την περίπτωση:
  - Υπάρχει ξεκάθαρα εξάρτηση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Όταν γνωρίζουμε την τιμή της V_1 γνωρίζουμε με βεβαιότητα την τιμή της V_2 , ενώ όταν γνωρίζουμε την V_2 , μας δίνει πληροφορία για την κατανομή πιθανοτήτων της V_1 .
  - Ο συντελεστής συσχέτισης των δύο μεταβλητών είναι ίσος με το μηδέν!

- <u>Ο συντελεστής συσχέτισης μετράει έναν συγκεκριμένο τύπο εξάρτησης, την γραμμική εξάρτηση.</u>
- <u>Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τύποι εξαρτήσεων, πολλοί από τους οποίους έχουν εφαρμογή και στην μέτρηση του κινδύνου.</u>

Συσχέτιση Vs Εξάρτησης (παράδειγμα)

Γραμμική εξάρτηση

V-shaped εξάρτηση, όπως του παραδείγματος



Εξάρτηση που συναντάμε συχνά σε χρημ/κές μεταβλητές. Όταν η X παίρνει ακραίες τιμές, προκύπτει εξάρτηση με την Y.

Source: Risk Management and Financial Institutions, Chapter 6, Copyright © John C. Hull 2006

Μέτρηση της Συσχέτισης

- Όπως και στην περίπτωση της μεταβλητότητας και της διακύμανσης, έτσι και για την συσχέτιση και την συνδιακύμανση υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι μέτρησης.

- Έστω ότι οι αποδόσεις των μεταβλητών X και Y δίνονται από τους ακόλουθους τύπους: $x_i=(X_i-X_{i-1})/X_{i-1}$ και $y_i=(Y_i-Y_{i-1})/Y_{i-1}$.

- Η συνδιακύμανση την ημέρα n: $\mathrm{cov}_n= E(x_n y_n)-E(x_n)E(y_n)$.

- Συχνά γίνεται η απλουστευτική υπόθεση ότι η αναμενόμενη ημερήσια απόδοση είναι ίση με 0, συνεπώς η συνδιακύμανση μετράται ως:

  $\mathrm{cov}_n= E(x_n y_n)$.

- Χρησιμοποιώντας ίση στάθμιση σε έναν αριθμό m τελευταίων παρατηρήσεων, η συνδιακύμανση υπολογίζεται ως:

$$\mathrm{cov}_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{n-1} y_{n-1}$$

Μέτρηση της Συσχέτισης (συνέχεια)

- Με παρόμοια στάθμιση μπορούμε να υπολογίσουμε και τις διακυμάνσεις των 2 μεταβλητών:

$$\mathrm{var}_{x,n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{n-1}^{2} \qquad \mathrm{var}_{y,n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{n-1}^{2}$$

- Έχοντας εκτιμήσει την συνδιακύμανση και τις επιμέρους διακυμάνσεις των δύο μεταβλητών, μπορούμε να εκτιμήσουμε και την συσχέτιση:

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}_n}{\sqrt{\mathrm{var}_{x,n}\,\mathrm{var}_{y,n}}}$$

Μέτρηση της Συσχέτισης με το EWMA model

- Στην πράξη, όπως και στην περίπτωση της μεταβλητότητας, οι πρόσφατες παρελθοντικές παρατηρήσεις παρέχουν σημαντικότερη πληροφορία σε σχέση με τις πολύ παλαιότερες παρατηρήσεις.

- Οι διαχειριστές κινδύνου μπορούν να υπολογίσουν την συνδιακύμανση (άρα και την συσχέτιση) δίνοντας διαφορετικές σταθμίσεις αναλόγως την χρονική απόσταση από το παρόν.

- Το μοντέλο EWMA για συνδιακύμανση:

$$\mathrm{cov}_n = \lambda\,\mathrm{cov}_{n-1} + (1-\lambda)x_{n-1}y_{n-1}$$

- Όσο πιο υψηλό είναι το «λ» τόσο μεγαλύτερη βαρύτητα δίνουμε στις πιο παλιές παρατηρήσεις και τόσο μικρότερη βαρύτητα στις πρόσφατες (και αντίστροφα).

Μέτρηση της Συσχέτισης με το EWMA model (παράδειγμα)

- Έστω λ=0.95 και η συσχέτιση μεταξύ X και Y, την ημέρα n-1, ρ_{xy}=0.6.
- Έστω επίσης ότι οι μεταβλητότητες της X και της Y την ημέρα n-1 είναι 1% και 2%, αντίστοιχα.
- Από την σχέση συσχέτισης και συνδιακύμανσης, η συνδιακύμανση την ημέρα n-1, είναι ίση με: $cov_{n-1}=0.6\times0.01\times0.02=0.00012$.
- Έστω επίσης ότι οι ποσοστιαίες αλλαγές στις τιμές των X και Y, την ημέρα n-1, είναι 0.5% και 2.5%, αντίστοιχα.
- Οι διακυμάνσεις και η συνδιακύμανση των X και Y αναθεωρούνται βάση του EWMA ως εξής:

$$\sigma_{x,n}^2 = 0.95\times0.01^2 + 0.05\times0.005^2 = 0.00009625$$

$$\sigma_{y,n}^2 = 0.95\times0.02^2 + 0.05\times0.025^2 = 0.00041125$$

$$\text{cov}_n = 0.95\times0.00012 + 0.05\times0.005\times0.025 = 0.00012025$$

Μέτρηση της Συσχέτισης με το EWMA model (παράδειγμα - συνέχεια)

- Η νέα μεταβλητότητα της Χ είναι 0.981%, ενώ η νέα μεταβλητότητα της Υ είναι 2.028% (οι τετραγωνικές ρίζες των νέων διακυμάνσεων).

- Ο νέος συντελεστής συσχέτισης είναι:

$$\rho = \frac{0.00012025}{0.00981 \times 0.02028}$$

- Η μεταβλητότητα της Χ μειώθηκε, της Υ αυξήθηκε, ενώ αυξήθηκε και η συσχέτισή τους.

Μέτρηση της Συσχέτισης με το GARCH model

- Ένα εναλλακτικό μοντέλο με το οποίο μπορούμε να «ενημερώνουμε» τις εκτιμήσεις μας για την συνδιακύμανση (άρα και την συσχέτιση) είναι το GARCH.

- Η διαφορά από το EWMA είναι όπως και στην περίπτωση της διακύμανσης, ότι δίνει στάθμιση και στην μακροχρόνια μέση συνδιακύμανση μεταξύ των μεταβλητών.

- Το μοντέλο GARCH για συνδιακύμανση:

$$\mathrm{cov}_n = \omega + \alpha x_{n-1} y_{n-1} + \beta \, \mathrm{cov}_{n-1}$$

- Η χρήση του γίνεται με αντίστοιχο τρόπο του GARCH για την διακύμανση και του EWMA για την συνδιακύμανση.
- Μπορεί να γίνει χρήση του GARCH για πρόβλεψη μελλοντικών συνδιακυμάνσεων.

Θέματα Εκτίμησης του πίνακα Διακυμάνσεων - Συνδιακυμάνσεων

- Ο πίνακας αυτός περιέχει στην διαγώνιο τις διακυμάνσεις των μεταβλητών και στα μη-διαγώνια στοιχεία τις αντίστοιχες συνδιακυμάνσεις μεταξύ των μεταβλητών.

- Για να είναι εσωτερικά συνεπής ένας πίνακας (N×N), θα πρέπει να τηρείται η συνθήκη: $w^T \Omega w \geq 0$ για οποιοδήποτε διάνυσμα w (N×1) (ο πίνακας τότε χαρακτηρίζεται ως positive – semidefinite).

- Για να εξασφαλίσουμε ότι τηρείται η παραπάνω συνθήκη, θα πρέπει να προσέχουμε οι διακυμάνσεις και οι συνδιακυμάνσεις να υπολογίζονται με συνεπή τρόπο, δηλαδή με τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων (m).

Θέματα Εκτίμησης του πίνακα Διακυμάνσεων – Συνδιακυμάνσεων (παράδειγμα)

- Ο παρακάτω πίνακας δεν είναι εσωτερικά συνεπής:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}$$

- Η διακύμανση της κάθε μίας μεταβλητής είναι ίση με 1, άρα η συνδιακυμάνσεις είναι ίσες με τις συσχετίσεις.
- Βλέπουμε ότι:
  - Η πρώτη μεταβλητή έχει υψηλή συσχέτιση με την τρίτη μεταβλητή (0.9).
  - Η δεύτερη μεταβλητή έχει υψηλή συσχέτιση με την τρίτη μεταβλητή (0.9).
  - Παρόλα αυτά η πρώτη με την δεύτερη μεταβλητή έχουν μηδενική συσχέτιση!
- Εάν χρησιμοποιήσουμε w=(1,1,-1) και ελέγξουμε εάν ισχύει η συνθήκη, μπορούμε να δείξουμε ότι δεν ισχύει, άρα ο πίνακας δεν είναι θετικά ημι-ορισμένος.

Παραγοντικά μοντέλα

- Ο αριθμός των συσχετίσεων που πρέπει να εκτιμηθούν για N μεταβλητές, είναι N(N+1)/2.
- Αυτός ο αριθμός μπορεί να είναι πολύ μεγάλος σε κάποιες περιπτώσεις και να δημιουργεί προβλήματα στην εκτίμηση.
- Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα παραγοντικό μοντέλο (factor models).
- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία σειρά από μεταβλητές (V_i).
- Σε ένα μονο-παραγοντικό μοντέλο, κάθε (V_i) θα είχε ένα κομμάτι το οποίο εξαρτάται από έναν κοινό παράγοντα F και ένα κομμάτι ($ε_i$) που δεν σχετίζεται με τις υπόλοιπες (V), ούτε με τον κοινό παράγοντα:

$$V_i = b_i F + \varepsilon_i$$

- Τα ε ακολουθούν ανεξάρτητες κανονικές κατανομές.
- Οποιαδήποτε συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών (V_i και V_j) προκύπτει από την εξάρτησή τους από τον κοινό παράγοντα και είναι ίση με b_i b_j V(F).

Παραγοντικά μοντέλα (συνέχεια)

- Το βασικό πλεονέκτημα της χρήσης παραγοντικών μοντέλων είναι ότι θέτουμε κάποια δομή στις συσχετίσεις.
- Αυτό βέβαια σημαίνει ότι κάνουμε την υπόθεση ότι η δομή που θέτουμε είναι σωστή.
- Με το μονο-παραγοντικό μοντέλο για N μεταβλητές, αντί να πρέπει να εκτιμήσουμε N(N+1)/2 παραμέτρους, θα πρέπει να εκτιμήσουμε N + 1: $b_1, b_2, \ldots, b_N$ και V(F).
- Τα παραγοντικά μοντέλα μπορούν να επεκταθούν και να συμπεριλάβουν μεγαλύτερο αριθμό παραγόντων (έστω M):

$$V_i = b_{1,i}F_1 + b_{2,i}F_2 + \cdots + b_{M,i}F_M + \varepsilon_i$$

- Σε αυτή την περίπτωση, αν οι παράγοντες F_m είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι, η συσχέτιση μεταξύ (V_i και V_j) είναι ίση με:

$$\sum_{m=1}^{M} b_{m,i} b_{m,j} V(F_m)$$

Από κοινού Κατανομές

- Έστω η τ.μ. X έχει την εξής συνάρτηση πιθανότητας

x	0	1	2
$f(x)$	0.50	0.20	0.30

- Στο παράδειγμα, $f(1) = P(X = 1) = 1/5$.
- Όταν θέλουμε να μελετήσουμε 2 μεταβλητές ταυτόχρονα, χρησιμοποιούμε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

		x=length		
		129	130	131
y=width	15	0.12	0.42	0.06
	16	0.08	0.28	0.04

- Στο παραπάνω παράδειγμα, $f(129,15) = P(X = 129, Y = 15) = 0.12$.

Οριακές Κατανομές

- Έστω η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

		x=length		
		129	130	131
y=width	15	0.12	0.42	0.06
	16	0.08	0.28	0.04

- $P(X = 129) = P(X = 129, Y = 15) + P(X = 129, Y = 16) = 0.20$
- Γενικά, η οριακή κατανομή της X

x	129	130	131
$f_X(x)$	0.20	0.70	0.10

- Ομοίως,

y	15	16
$f_Y(y)$	0.60	0.40

Οριακές Κατανομές (2)

- Γενικά, για τον υπολογισμό των οριακών κατανομών (για διακριτές κατανομές),

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x, y)$$

and

$$f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

Οριακές Κατανομές (3)

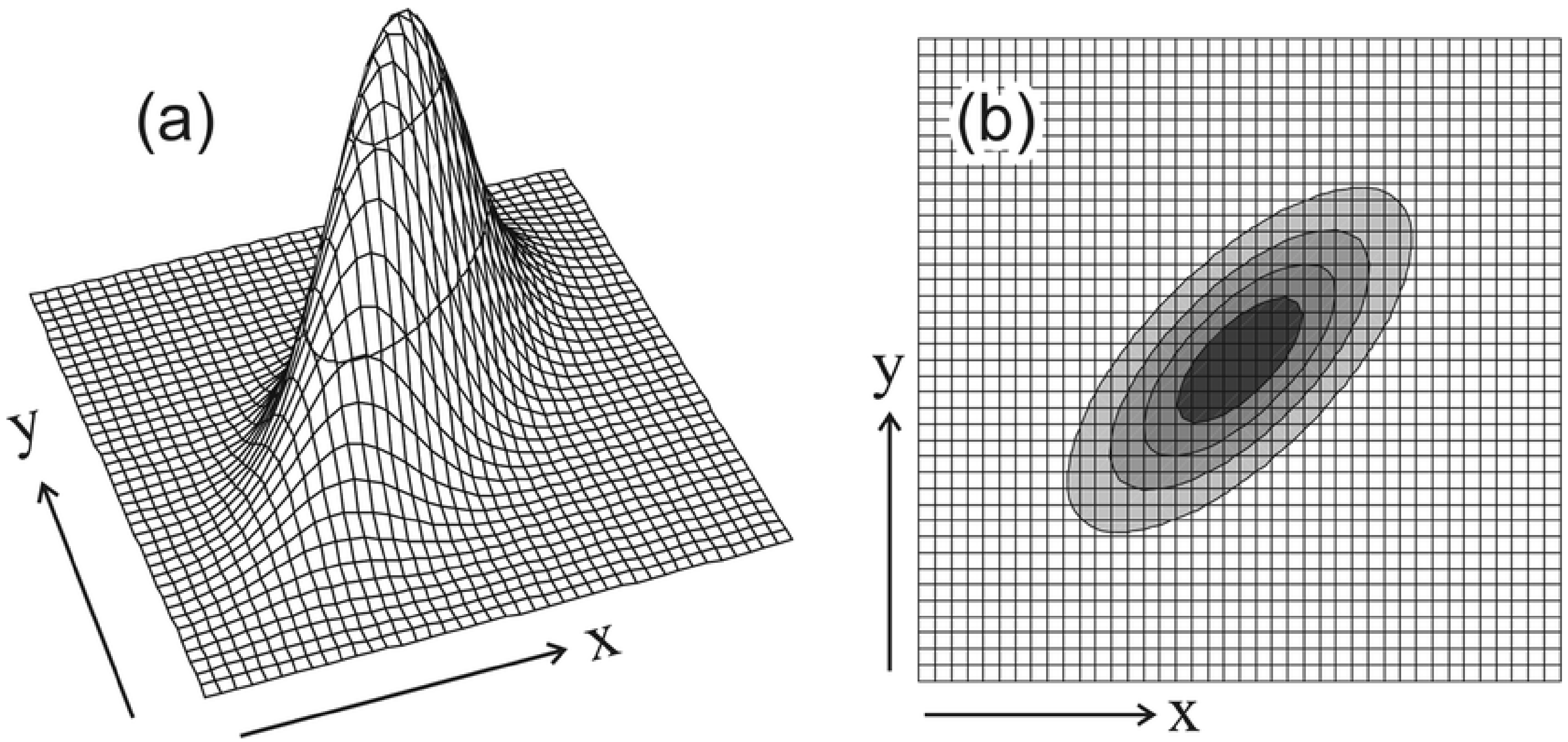
- **Παράδειγμα**: Έστω ότι επιλέγουμε 2 μπαταρίες από ένα σύνολο 12 μπαταριών, όπου 3 είναι καινούριες, 4 χρησιμοποιημένες οι οποίες όμως λειτουργούν και 5 χαλασμένες. Έστω X η τ.μ που συμβολίζει τον αριθμό των καινούριων μπαταριών που επιλέξουμε και Y συμβολίζει τον αριθμό των χρησιμοποιημένων μπαταριών.
- Υπολογίστε την $f_{X,Y}(x, y)$

Οριακές Κατανομές (4)

- Η μεταβλητές X και Y παίρνουν τις τιμές 0,1,2. Άρα τα πιθανά ζεύγη είναι τα (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2).
- Δεδομένου όμως ότι ο συνολικός αριθμός των επιλεγμένων μπαταριών είναι 2, τα ζεύγη (1,2), (2,1) και (2,2) απορρίπτονται.
- $f(0,1) = P(X = 0, Y = 0) =$ Πιθανότητα στην πρώτη επιλογή να επιλέξω μια από τις 5 ελαττωματικές μπαταρίες και στη δεύτερη να επιλέξω μια από τις 4 ελαττωματικές μπαταρίες = $\frac{5}{12}\frac{4}{11} = \frac{10}{66}$

		x= number of *new* chosen		
		0	1	2
y=number of	0	10/66	15/66	3/66
used	1	20/66	12/66	
chosen	2	6/66		

Διμεταβλητή Κανονική Κατανομή



Copulas

- Έστω ότι έχουμε χαρτοφυλάκιο με 2 μετοχές.
- Ποια είναι οι πιθανότητα η απόδοση και των δυο μετοχών να μειωθεί κατά 2%?
- Χρειαζόμαστε την από κοινού κατανομή.

Copulas

- Έστω ότι γνωρίζουμε τις οριακές κατανομές δύο μεταβλητών (έστω V_1 και V_2).

- Πώς θα μπορούσαμε να κάνουμε κάποια υπόθεση για την δομή της συσχέτισης μεταξύ αυτών των 2 μεταβλητών και να ορίσουμε την από κοινού κατανομή τους;

- Μία προφανής επιλογή είναι να υποθέσουμε ότι ακολουθούν μία από κοινού διμεταβλητή κανονική κατανομή (άλλες παρόμοιες κατανομές επίσης)

- Συχνά όμως δεν υπάρχει κάποιος προφανής λογικός τρόπος να ορισθεί μία δομή μεταξύ των συσχετίσεων δύο οριακών κατανομών (εάν για παράδειγμα οι μεταβλητές (V_1 και V_2) δεν κατανέμονται κανονικά).

- Τα Copulas είναι μία τεχνική που μας βοηθάει να ορίσουμε δομή συσχετίσεων (correlation structure) μεταξύ μεταβλητών σε τέτοιες περιπτώσεις.

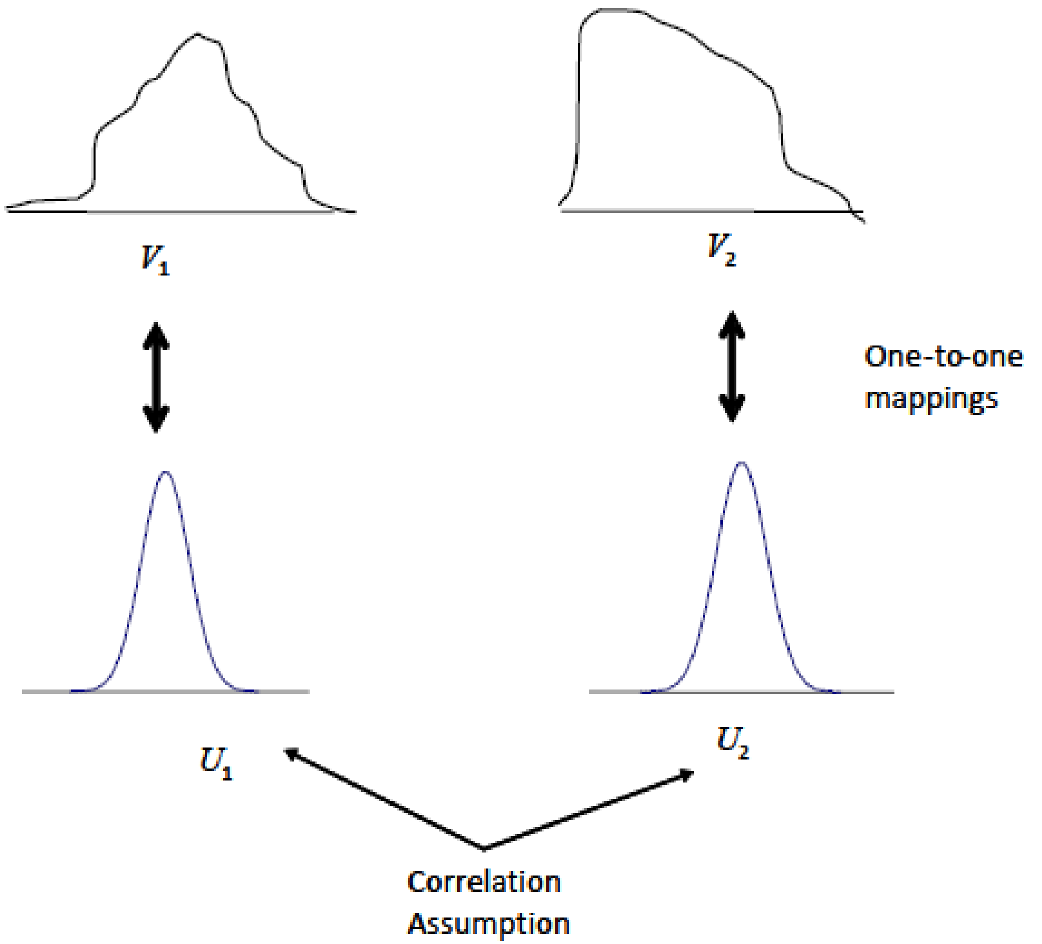
Copulas: Πώς λειτουργούν

- Για κάθε τιμή των (V_1 και V_2) υπολογίζουμε το αντίστοιχο εκατοστημόριο (percentile) της κατανομής τους.

- Στην συνέχεια, δημιουργούμε δύο νέες μεταβλητές (έστω τις U_1 και U_2) οι οποίες παίρνουν για κάθε ζεύγος τιμής - εκατοστημορίου των αρχικών μεταβλητών, την τιμή της τυποποιημένης κατανομής για το αντίστοιχο εκατοστημόριο.

- Όταν χρησιμοποιείται η τυποποιημένη κανονική κατανομή για την αντιστοίχιση, ονομάζεται ως Gaussian Copula.

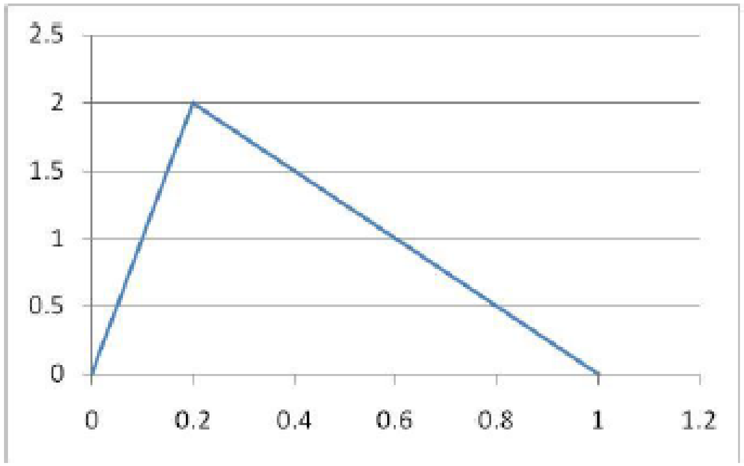
Copulas: Πώς λειτουργούν - Διαγραμματικά

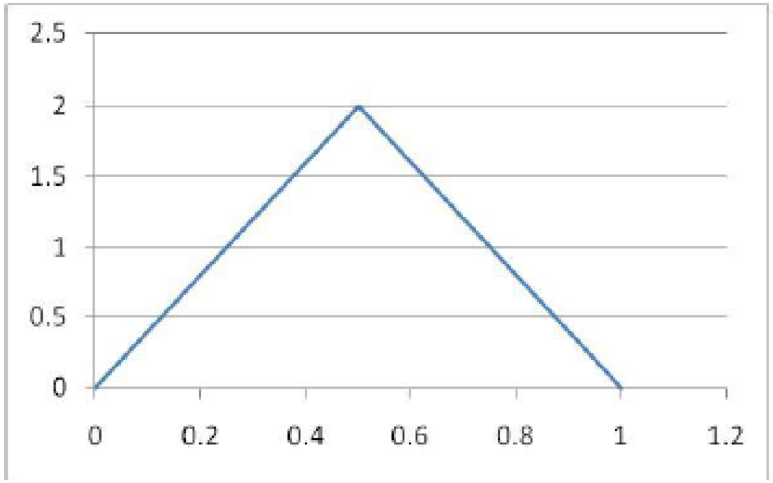


Source: Risk Management and Financial Institutions 3e, Chapter 11, Copyright © John C. Hull 2012

Copulas: Πώς λειτουργούν - Παράδειγμα

- Έστω ότι οι V_1 και V_2 ακολουθούν τις παρακάτω τριγωνικού τύπου κατανομές:





V_1 V_2

Πίνακας Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής

Table of Standard Normal Probabilities for Negative Z-scores

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Table of Standard Normal Probabilities for Positive Z-scores

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Copulas: Πώς λειτουργούν – Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η αντιστοίχιση του V_1 σε U_1 :

V_1	Percentile	U_1
0.2	20	-0.84
0.4	55	0.13
0.6	80	0.84
0.8	95	1.64

- Η αντιστοίχιση του V_2 σε U_2 :

V_2	Percentile	U_2
0.2	8	−1.41
0.4	32	−0.47
0.6	68	0.47
0.8	92	1.41

Copulas: Πώς λειτουργούν – Παράδειγμα (συνέχεια)

- Ποια είναι η πιθανότητα και οι 2 μεταβλητές να έχουν τιμή <0.2;

- Είναι η πιθανότητα η $U_1 < -0.84$ και η $U_2 < -1.41$.

- Εάν υποθέσουμε ότι η συσχέτιση μεταξύ U_1 και U_2 είναι 0.5, χρησιμοποιώντας την αθροιστική συνάρτηση της διμεταβλητής κανονικής κατανομής:

- $M(-0.84, -1.41, 0.5) = 0.043$ (4.3%).

Copulas: Άλλες Κατανομές

- Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε μία οποιαδήποτε άλλη κατανομή για τις U_1 και U_2.

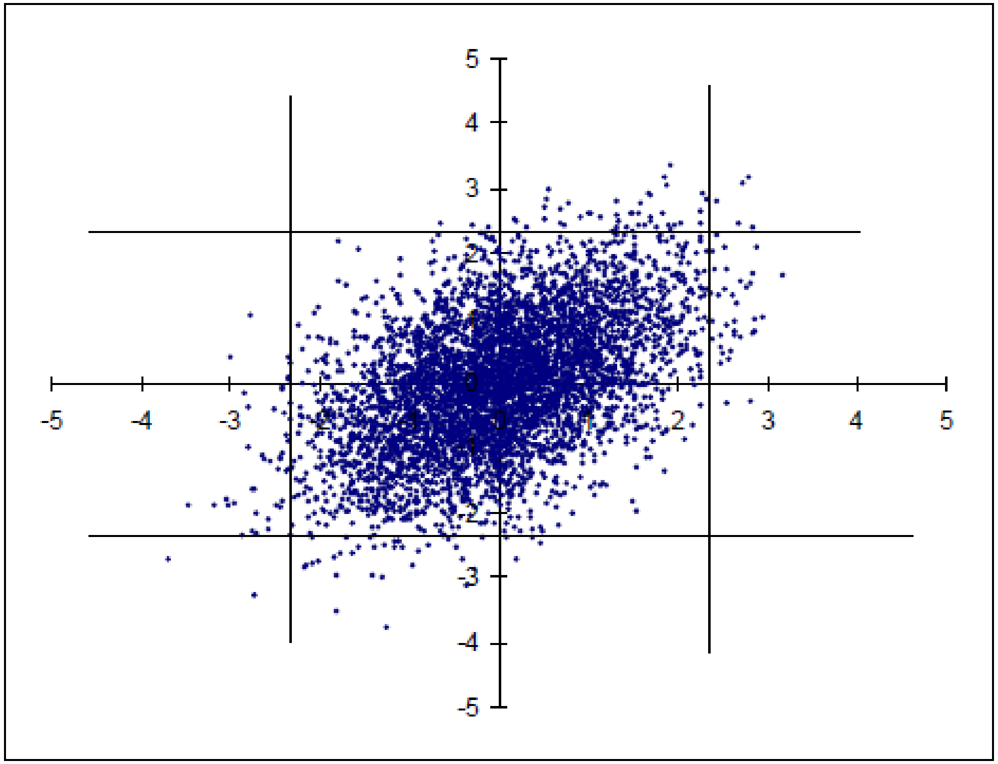
- Μία εναλλακτική θα ήταν η διμεταβλητή Student t κατανομή.

- Η διμεταβλητή Student t κατανομή έχει μεγαλύτερο tail correlation (συσχέτιση στα άκρα των 2 επίμερους μεταβλητών) σε σχέση με την διμεταβλητή Κανονική κατανομή.

- Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε μία Student t-copula.

Copulas: Άλλες Κατανομές – Διάγραμμα 1

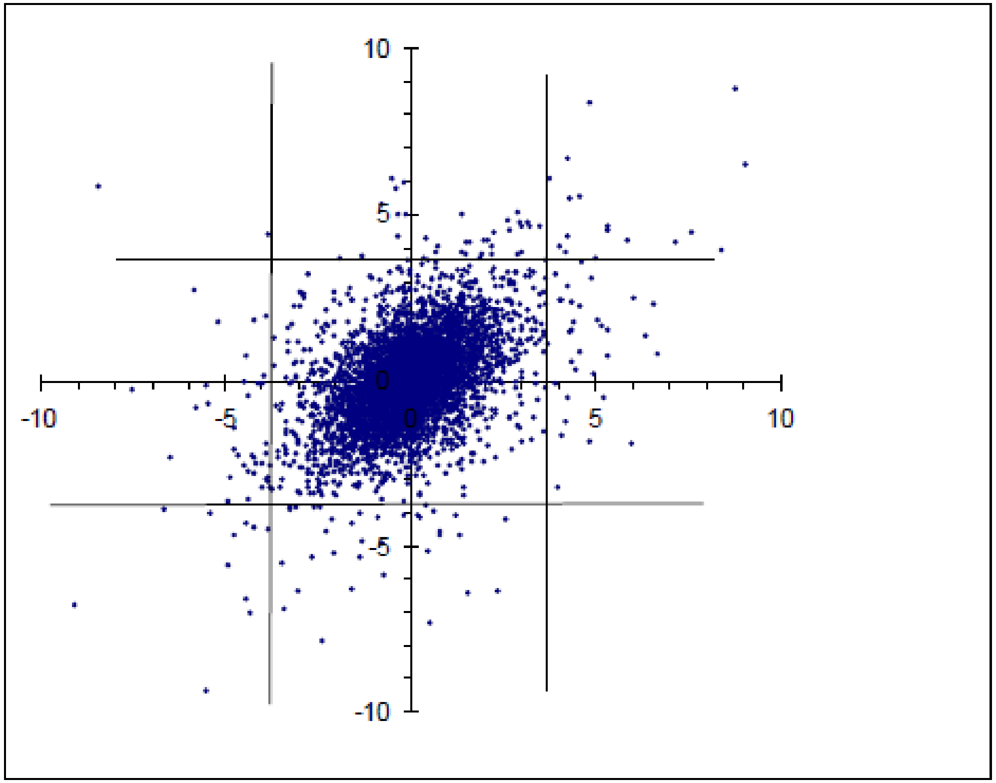
5000 τυχαίες τιμές από μία διμεταβλητή Κανονική κατανομή.



Source: Risk Management and Financial Institutions 3e, Chapter 11, Copyright © John C. Hull 2012

Copulas: Άλλες Κατανομές – Διάγραμμα 1

5000 τυχαίες τιμές από μία διμεταβλητή Student t κατανομή.



Source: Risk Management and Financial Institutions 3e, Chapter 11, Copyright © John C. Hull 2012

Άλλες Copulas

- Θα μπορούσαμε να έχουμε παραπάνω από 2 μεταβλητές.

- Σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε με αντίστοιχο τρόπο ένα πολυμεταβλητό Copula.

- <u>Η βασική λειτουργία των copulas είναι στην αντιστοίχιση των τιμών μεταβλητών που δεν ακολουθούν συγκεκριμένες κατανομές, σε τιμές μεταβλητών που ακολουθούν γνωστές κατανομές.</u>