ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

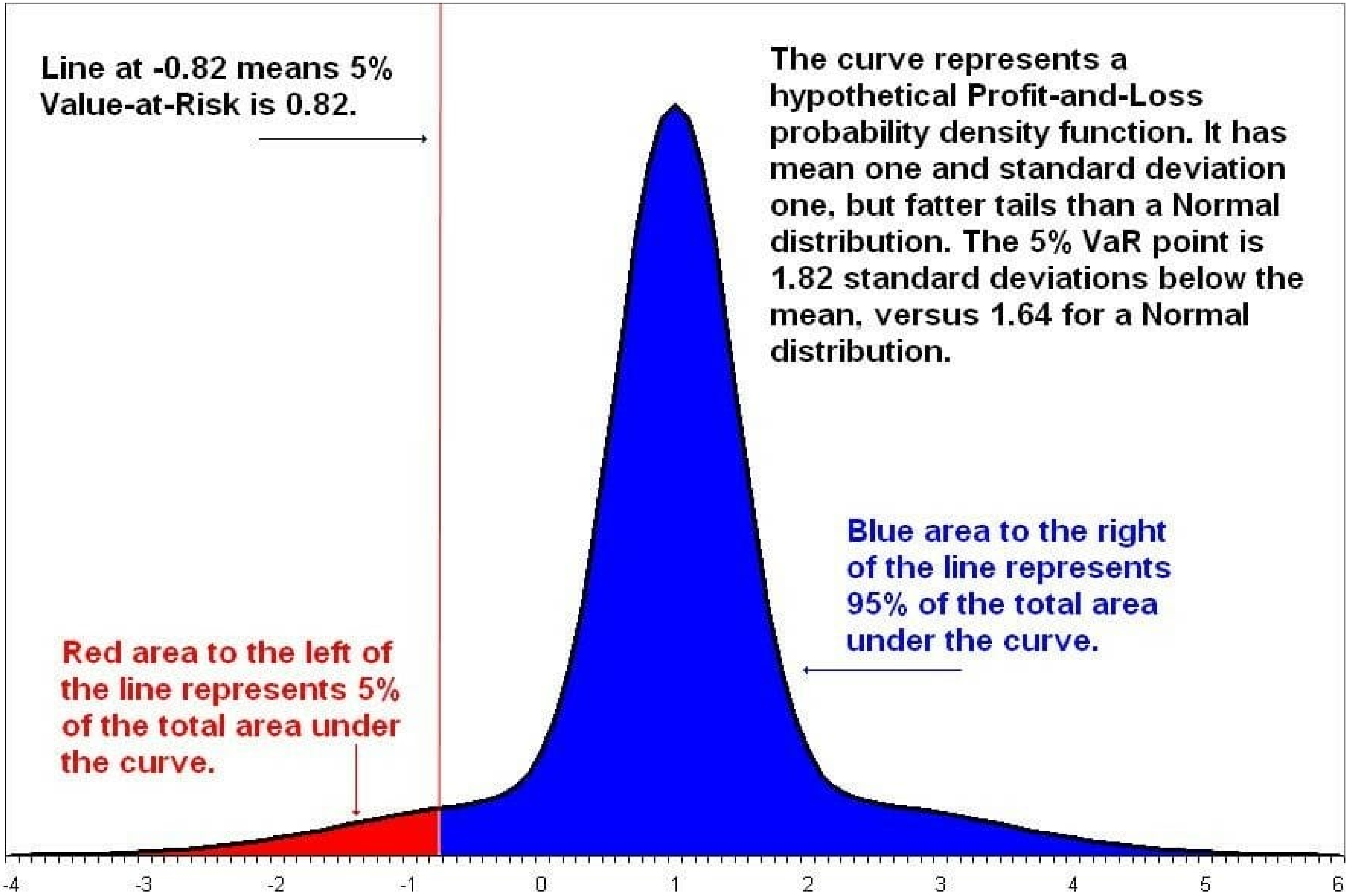
Value at Risk (VaR) και Expected Shortfall

Ορισμός του VaR

- VaR, Value at Risk, Αξία σε Κίνδυνο.
- Η JP Morgan εισήγαγε την χρήση του.

- Μας δίνει σε ένα μόνο νούμερο, την έκταση των απωλειών του Χρημ. Ιδρύματος, για μία δεδομένη πιθανότητα και για ένα δεδομένο χρονικό ορίζοντα.
- «Είμαστε Χ% σίγουροι ότι οι απώλειες μας δεν θα είναι περισσότερες από €V μέσα στο διάστημα Τ».
- Είναι μία συνάρτηση με 2 παραμέτρους: το διάστημα εμπιστοσύνης και το χρονικό διάστημα.

Υπολογισμός VaR



Η χρήση του VaR από τις εποπτικές αρχές

- Οι εποπτικές αρχές χρησιμοποιούν το VaR για να διαμορφώσουν το ύψος του απαιτούμενου κεφαλαίου ασφαλείας από τις τράπεζες.

- Το VaR εφαρμόζεται τόσο στον κίνδυνο αγοράς, όσο και στον πιστωτικό και στον διαχειριστικό κίνδυνο.

- Τα κανονιστικά πλαίσια από την Βασιλεία I, II & III, προτείνουν συγκεκριμένους τρόπους χρήσης του VaR για τον υπολογισμό των απαιτούμενων κεφαλαίων.

- Παράδειγμα: Το απαιτούμενο κεφάλαιο θα πρέπει να είναι Κ φορές το VaR 10-ημερών, με διάστημα εμπιστοσύνης 99%, όπου το $K \geq 3$.

Πλεονεκτήματα του VaR

- Περικλείει μία σημαντική διάσταση κινδύνου μέσα μόνο σε ένα νούμερο.

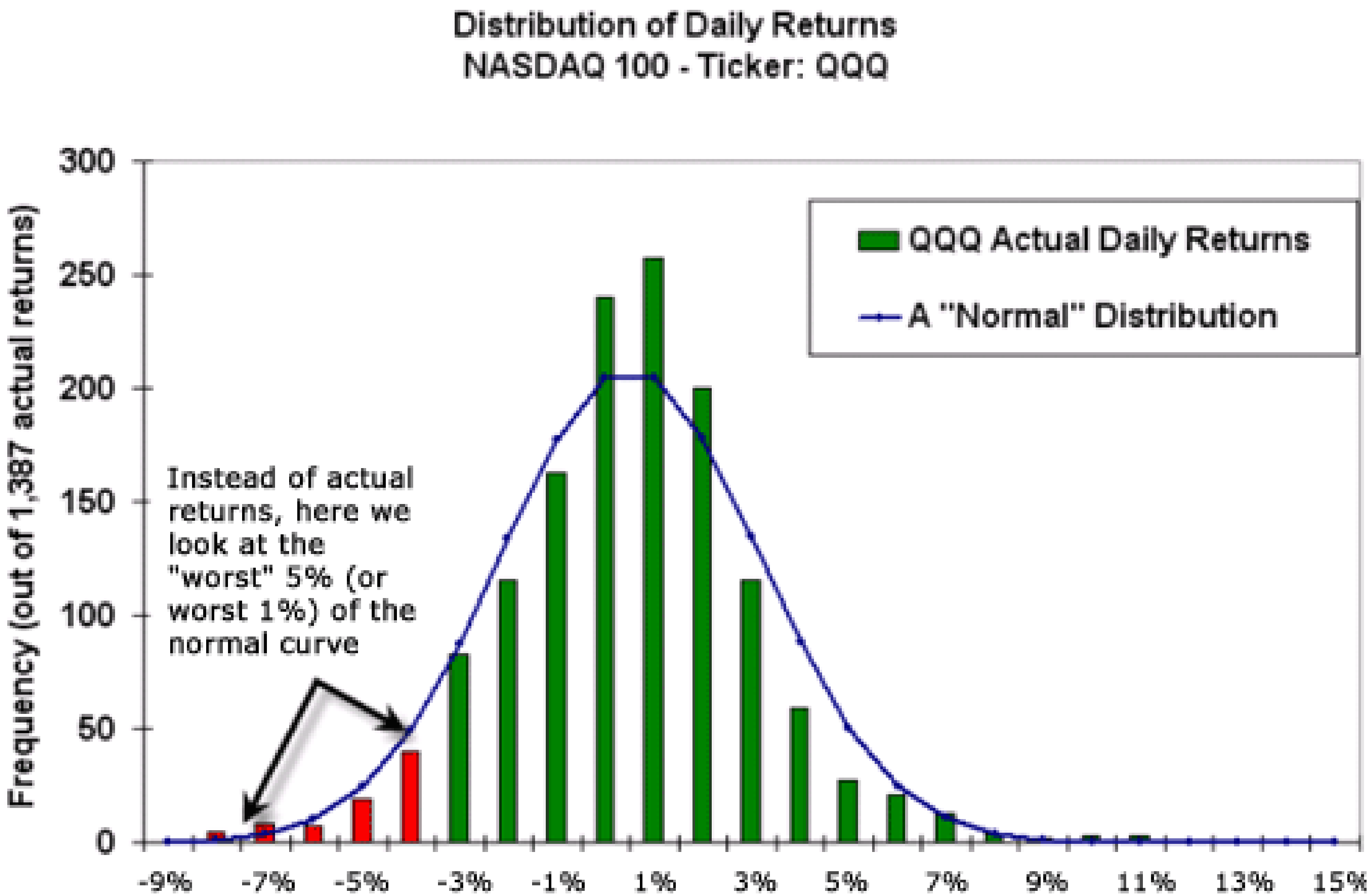
- Είναι εύκολα αντιληπτή η έννοιά του.

- Απαντά σε μία βασική ερώτηση: «Πόσο άσχημα μπορούν να πάνε τα πράγματα;»

Μέθοδοι υπολογισμού του VaR

- Με ιστορικά στοιχεία (ιστορική προσομοίωση).
- Με προσομοιώσεις.

Υπολογισμός VaR με ιστορικά στοιχεία



Υπολογισμός VaR με προσομοιώσεις

- Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει την ανάπτυξη ενός μοντέλου για μελλοντικές αποδόσεις μετοχών και την εκτέλεση πολλαπλών υποθετικών σεναρίων μέσω του μοντέλου.

- Για παράδειγμα, εκτελούμε 100 υποθετικά σενάρια μηνιαίων αποδόσεων για το QQQ. Μεταξύ αυτών, τα δύο αποτελέσματα ήταν μεταξύ -15% και -20% και τρία ήταν μεταξύ -20% και 25%. Αυτό σημαίνει ότι τα χειρότερα πέντε αποτελέσματα (δηλαδή το χειρότερο 5%) ήταν λιγότερο από -15%.

- Επομένως, η προσομοίωση οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα: με 95% εμπιστοσύνη, δεν αναμένουμε να χάσουμε περισσότερο από 15% κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου μήνα.

VaR: Παράδειγμα 1

- Τα κέρδη από ένα χαρτοφυλάκιο σε μία περίοδο 6 μηνών κατανέμονται κανονικά με μέσο κέρδος τα €2εκ. και τυπική απόκλιση τα €10εκ.

- Ποιό είναι το VaR μίας περιόδου 6 μηνών, με διάστημα εμπιστοσύνης 99%;

- Από τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής, γνωρίζουμε ότι το 1% (100% - 99%) βρίσκεται 2.33 τυπικές αποκλίσεις από τον μέσο.

- Η κατανομή είναι των κερδών, άρα θα πρέπει να κινηθούμε αρνητικά από τον μέσο: 2 – 2.33 * 10 = - €21.3εκ.

VaR: Παράδειγμα 2

- Έστω ετήσια επένδυση, όπου όλες οι πιθανές εκβάσεις κυμαίνονται μεταξύ απώλειας €50εκ. και κέρδους €50εκ., ισοπίθανα (ομοιόμορφη κατανομή - uniform distribution).

- Ποιό είναι το VaR μίας περιόδου 1 έτους, με διάστημα εμπιστοσύνης 99%;

- Επειδή έχουμε ομοιόμορφη κατανομή, γνωρίζουμε ότι το 1% βρίσκεται στην έκβαση που ορίζει το χαμηλό 1% του εύρους [-50, +50].

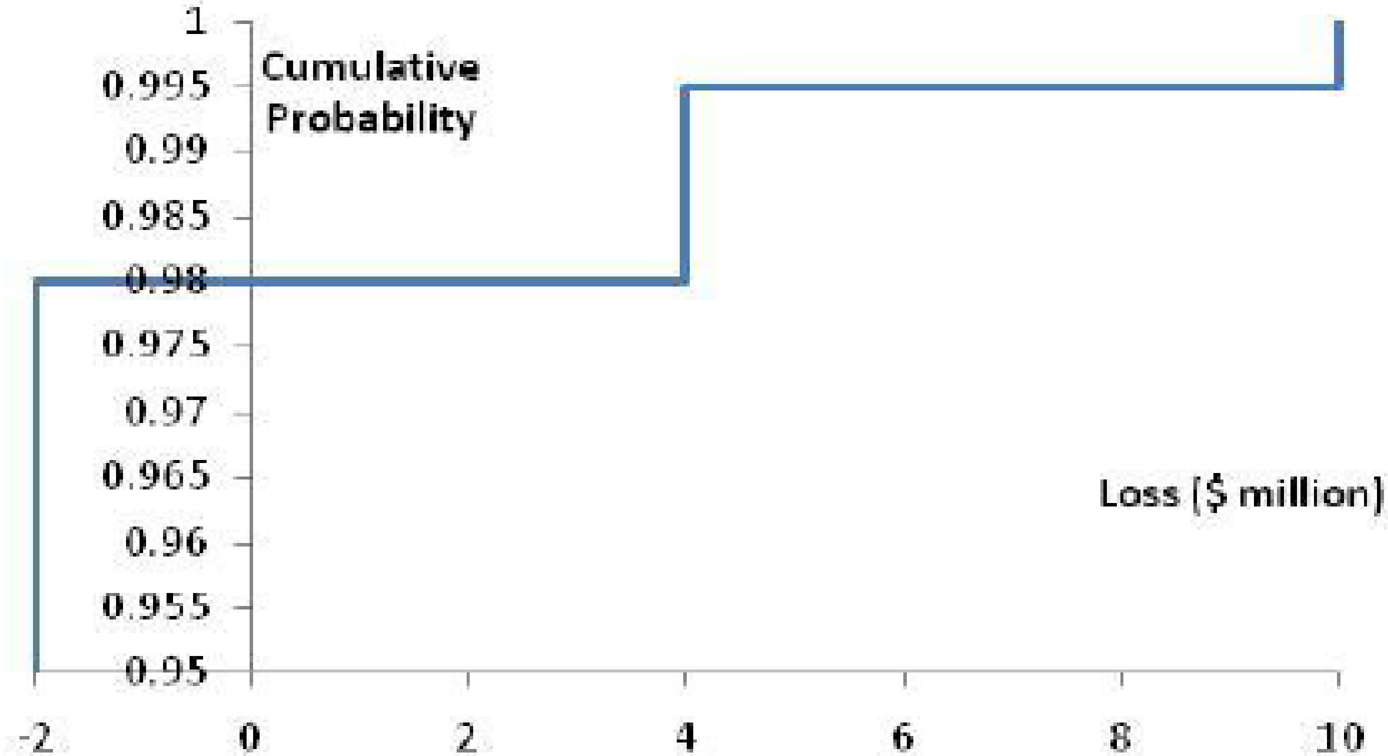
- Το σύνολο του εύρους είναι 100εκ, άρα το χαμηλό 1% (δεδομένης της ομοιόμορφης κατανομής) είναι το - €49εκ.

VaR: Παράδειγμα 3

- Έστω ετήσια επένδυση, όπου με πιθανότητα 98% θα αποφέρει κέρδη ύψους €2εκ., με πιθανότητα 1.5% θα αποφέρει ζημιές ύψους €4εκ. και με πιθανότητα 0.5% θα αποφέρει ζημιές €10εκ.

- Ποιό είναι το VaR μίας περιόδου 1 έτους, με διάστημα εμπιστοσύνης 99%;

VaR: Παράδειγμα 3



Πηγή: Risk Management and Financial Institutions 3e, Chapter 9, Copyright © John C. Hull 2012

VaR: Παράδειγμα 3

- Το διάγραμμα της διαφάνειας 9 μας δείχνει τις τιμές της αθροιστικής πιθανότητας, ενώ η μέτρηση γίνεται σε όρους ζημιών.

- Οι αρνητικές τιμές είναι κέρδη, και οι θετικές είναι οι ζημιές.

- Για το ύψος της πιθανότητας που μας ενδιαφέρει, κινούμαστε σε μία νοητή οριζόντια γραμμή και σταματάμε στο σημείο που αυτή τέμνει την γραμμή των αθροιστικών πιθανοτήτων.

- Σε εκείνο το σημείο κινούμαστε κάθετα προς τα κάτω και βλέπουμε σε ποιο κέρδος ή ζημιά αντιστοιχεί η αθροιστική πιθανότητα που μας ενδιαφέρει.

- Στο παράδειγμά μας το σημείο που αντιστοιχεί στο 99% είναι το <u>€4εκ</u>.

VaR: Παράδειγμα 4

- Έστω ότι για την επένδυση του Παραδείγματος 3 θέλουμε να υπολογίσουμε το VaR ενός έτους για διάστημα <u>εμπιστοσύνης 99.5%.</u>

- Η οριζόντια νοητή γραμμή για αθροιστική πιθανότητα 99.5% συμπίπτει με την γραμμή του διαγράμματος για το διάστημα απωλειών €4εκ και €10εκ.

- Ακολουθώντας την ίδια στρατηγική με αυτή του Παραδείγματος 3, βλέπουμε πως όλες οι απώλειες μεταξύ €4εκ και €10εκ έχουν πιθανότητα 99.5% να μην ξεπεραστούν.

- Ισοδύναμα, υπάρχει 0.5% πιθανότητα να υπάρξουν απώλειες οι οποίες θα ξεπερνούν οποιοδήποτε σημείο μεταξύ των €4εκ και των €10εκ.

VaR: Παράδειγμα 4

- Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να προσδιοριστεί μία μοναδική τιμή για το VaR.

- Μία λογική σύμβαση, είναι να υπολογίσουμε το συγκεκριμένο VaR ως το μέσο της απόστασης του διαστήματος €4εκ και €10εκ.

- Στην περίπτωσή μας, το μέσο (midpoint) της απόστασης είναι οι <u>απώλειες ύψους €7εκ</u>.

Προβλήματα με την χρήση του VaR

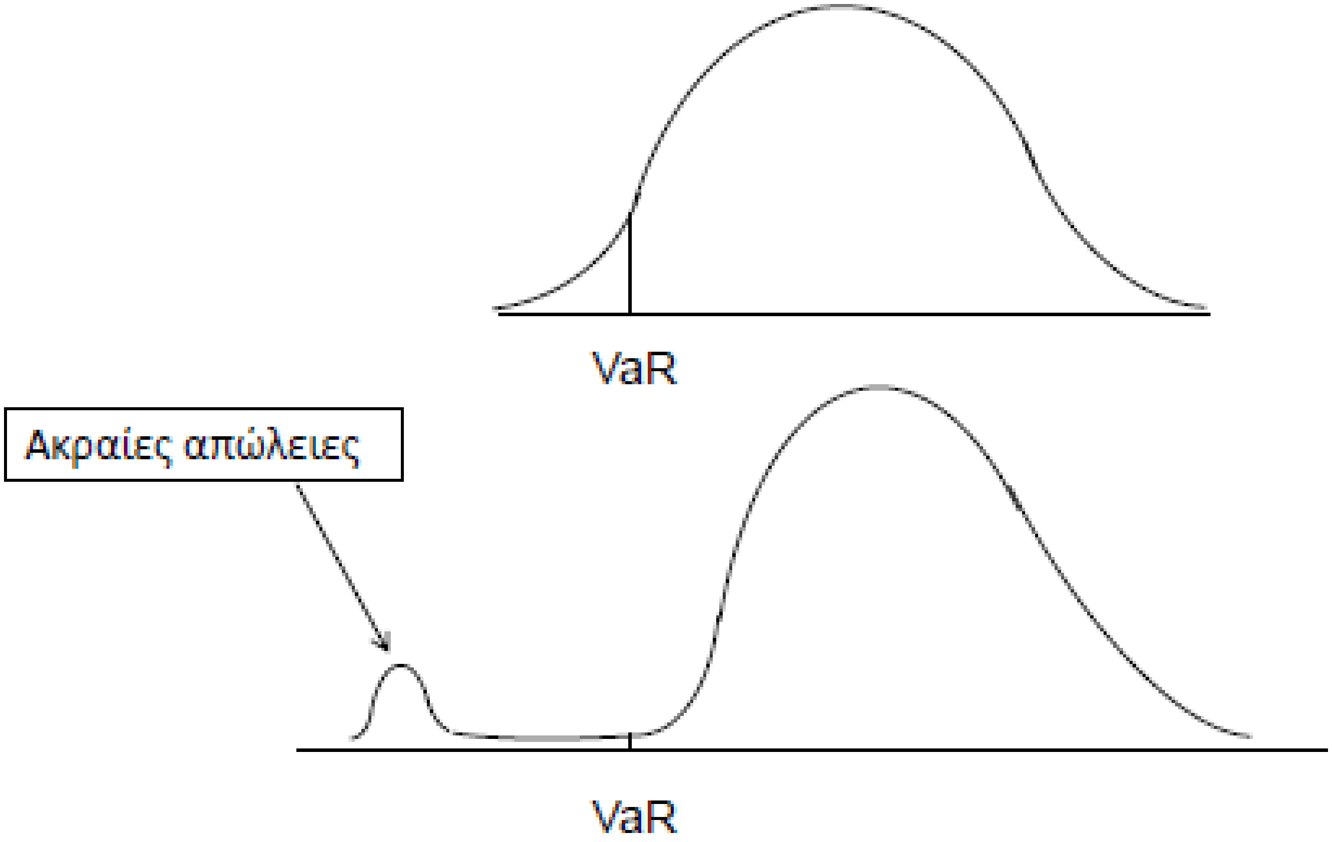
- Όταν το VaR χρησιμοποιείται για να θέσει όρια σε έναν διαπραγματευτή της τράπεζας, μπορεί να δημιουργηθούν προβλήματα από κάποια συγκαλυμμένη ανάληψη κινδύνου που δεν μπορεί να μετρηθεί από το VaR.

- Έστω ότι μία τράπεζα θέτει ως όριο σε έναν διαπραγματευτή της το VaR 1-ημέρας σε δ.ε. 99%, να μην ξεπερνά τα €10εκ.

- Ο διαπραγματευτής μπορεί να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο όπου με πιθανότητα 99.1% οι ζημιές δεν θα ξεπερνάνε τα €10εκ και με πιθανότητα 0.9% είναι €500εκ!

- Ο διαπραγματευτής καλύπτει τα όρια που τέθηκαν, αλλά ξεκάθαρα έχει εκθέσει την τράπεζα σε υπερβολικό κίνδυνο.

Προβλήματα με την χρήση του VaR



Αναμενόμενη απώλεια – Expected Shortfall

- Ένα μέτρο το οποίο θα μπορούσε να δώσει καλύτερα κίνητρα για τους διαπραγματευτές είναι το expected shortfall.

- Άλλοι όροι που αναφέρονται σε αυτό: conditional value at risk, conditional tail expectation, expected tail loss.

- Ενώ το VaR απαντά στην ερώτηση «Πόσο άσχημα μπορούνε να πάνε τα πράγματα», το Expected Shortfall απαντά στην ερώτηση «Εάν τα πράγματα πάνε άσχημα, ποιά είναι η αναμενόμενη απώλεια;»

- Όπως και το VaR, το Expected Shortfall είναι συνάρτηση 2 παραμέτρων, του χρονικού ορίζοντα και του διαστήματος εμπιστοσύνης.

Αναμενόμενη απώλεια – Expected Shortfall

- Το Expected Shortfall για έναν ορίζοντα Τ, και για απώλειες που ξεπερνάνε το Χ% της κατανομής των κερδών – ζημιών, είναι η αναμενόμενη απώλεια για μία περίοδο Τ, <u>δεδομένου ότι βρισκόμαστε κάτω από όριο Χ%</u> (δηλαδή ότι ξεπερνάμε το αντίστοιχο VaR).

- Παράδειγμα: έστω Χ=99%, Τ=10 ημέρες και VaR=€64εκ.

- Το Expected Shortfall είναι οι μέσες απώλειες σε μία περίοδο 10 ημερών, δεδομένου ότι οι απώλειες είναι μεγαλύτερες από το όριο των €64εκ.

- Δύο χαρτοφυλάκια με ίδιο VaR μπορεί να έχουν σημαντικά διαφορετικό Expected Shortfall.

VaR & Απαιτούμενα Κεφάλαια

- Οι εποπτικές αρχές χρησιμοποιούν το VaR για να υπολογίσουν τα απαραίτητα εποπτικά κεφάλαια.

- Για τον κίνδυνο αγοράς χρησιμοποιούν το VaR 10-ημερών για διάστημα εμπιστοσύνης 99%, ενώ για τον πιστωτικό και για τον λειτουργικό κίνδυνο το VaR 1-έτους για διάστημα εμπιστοσύνης 99.9% (τα οποία πολλαπλασιάζουν με συγκεκριμένες παραμέτρους).

- Εάν για παράδειγμα ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα έχει VaR 1-έτους (99.9%) ίσο με €50εκ., σημαίνει ότι το ίδρυμα αυτό σε ακραίες καταστάσεις (θεωρητικά μία φορά τα χίλια χρόνια!) θα χάσει σε ένα έτος €50εκ.

- Αυτό επίσης σημαίνει ότι εάν έχει κρατήσει κεφάλαια ίσα με €50εκ. κατά 99.9% δεν θα πτωχεύσει μέσα στην διάρκεια ενός έτους.

VaR & Απαιτούμενα Κεφάλαια

- Έστω ότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μέτρο κινδύνου για να καθορίσουμε τα κεφάλαια που θα πρέπει να κρατήσουμε για ασφάλεια.

- Είναι το VaR το καλύτερο μέτρο;

- Οι Artzner et al. (1999, Mathematical Finance) πρότειναν 4 ιδιότητες που πρέπει να έχει ένα μέτρο κινδύνου (για να είναι ένα coherent measure (λογικό και συνεπές μέτρο)):

1. Monotonicity
2. Translation Invariance
3. Homogeneity
4. Subadditivity

VaR & Απαιτούμενα Κεφάλαια (Coherent Risk Measures Criteria)

- Monotonicity: Εάν ένα χαρτοφυλάκιο έχει χειρότερα αποτελέσματα από ένα άλλο χαρτοφυλάκιο σε οποιαδήποτε κατάσταση, τότε το μέτρο κινδύνου του πρώτου θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από του δεύτερου.

- Translation Invariance: Εάν προσθέσουμε ένα ποσό μετρητών K σε ένα χαρτοφυλάκιο, τότε το απαιτούμενο κεφάλαιο ασφαλείας θα πρέπει να μειωθεί κατά K.

- Homogeneity: Πολλαπλασιάζοντας το μέγεθος ενός χαρτοφυλακίου με λ, θα πρέπει και το μέτρο κινδύνου να είναι λ φορές μεγαλύτερο.

- Subadditivity: Το μέτρο κινδύνου για δύο χαρτοφυλάκια τα οποία έχουμε ενώσει, δεν θα πρέπει να ξεπερνά το άθροισμα των επιμέρους μέτρων κινδύνου τους.

VaR & Απαιτούμενα Κεφάλαια (Coherent Risk Measures Criteria)

- Monotonicity: Ισχύει για το VaR.

- Translation Invariance: Ισχύει για το VaR.

- Homogeneity: Ισχύει για το VaR.

- <u>Subadditivity: ΔΕΝ ισχύει πάντα για το VaR</u>.

Είναι το VaR coherent risk measure?

- Παράδειγμα: Έστω δύο ανεξάρτητα επενδυτικά πλάνα έχουν το καθένα πιθανότητα 2% να σημειώσουν απώλειες €10εκ. και πιθανότητα 98% να σημειώσουν απώλεια €1εκ., μέσα σε χρονικό ορίζοντα 1-έτους.

- Για κάθε ένα από τα πλάνα, το VaR 1-έτους για 97.5% πιθανότητα είναι ίσο με €1εκ.

- Εάν τα ενώσουμε σε ένα χαρτοφυλάκιο, αυτό θα έχει:
- 2%*2%=0.04% πιθανότητα για απώλειες €20εκ.
- 2*2%*98%=3.92% πιθανότητα για απώλειες €11εκ.
- 98%*98%=96.04% πιθανότητα για απώλειες €2εκ.

- Το VaR (97.5% 1-έτους) για το ενωμένο χαρτοφυλάκιο είναι €11εκ., ενώ το άθροισμα των επιμέρους μέτρων κινδύνου των χαρτοφυλακίων είναι €2εκ. Αυτό παραβιάζει την subadditivity condition.

Είναι το Expected Shortfall coherent risk measure?

- <u>Παράδειγμα:</u> Έστω ότι έχουμε τα 2 επενδυτικά πλάνα του Παραδείγματος 1.

- Για κάθε ένα από τα πλάνα, το VaR 1-έτους για 97.5% πιθανότητα είναι ίσο με €1εκ.

- Για να υπολογίσουμε το expected shortfall θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις απώλειες οι οποίες σημειώνονται στην περιοχή του ακραίου 2.5% των ζημιών.

- Στο πρώτο 0.5% της περιοχής του 2.5% (δηλαδή στο 0.5%/2.5%=20% της περιοχής) οι απώλειες είναι €1εκ (όσο και στο υπόλοιπο 97.5% των μη ακραίων απωλειών). Στο υπόλοιπο 2% του 2.5% (δηλαδή στο 2%/2.5%=80% της περιοχής) οι απώλειες είναι €10εκ.

- Το expected shortfall είναι ίσο με: 20%*€1εκ+80%*€10εκ=€8.2εκ.

Είναι το Expected Shortfall coherent risk measure?

- Εάν συνδυάσουμε τα 2 επενδυτικά πλάνα σε ένα χαρτοφυλάκιο:

- Από το ακραίο 2.5% της κατανομής των ζημιών, το 2.46% αντιστοιχεί σε ζημιά €11εκ. ενώ το υπόλοιπο 0.04% αντιστοιχεί σε ζημιά €20εκ.

- Αντίστοιχα με την προηγούμενη διαφάνεια, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι το expected shortfall για το χαρτοφυλάκιο είναι: (0.04%/2.5%)*€20εκ. + (2.46%/2.5%)*€11εκ.=€11.144εκ.

- Το συνολικό expected shortfall των επιμέρους στοιχείων του χαρτοφυλακίου είναι 8.2+8.2 = 16.4 > 11.144, άρα το expected shortfall ικανοποιεί την subadditivity condition σε αυτό το παράδειγμα.

Η σημασία της subadditivity condition

- Η subadditivity condition δεν είναι απλά ένα θεωρητικό κριτήριο.

- Πολλές φορές όταν οι τράπεζες συνδυάζουν τα χαρτοφυλάκιά τους, παρόλο που υπάρχει μεγαλύτερη διαφοροποίηση του κινδύνου, το συνολικό VaR μπορεί να αυξάνεται.

- Αυτό είναι ιδιαίτερα αρνητικό χαρακτηριστικό για μια τράπεζα γιατί την υποχρεώνει να διακρατεί περισσότερα κεφάλαια για ασφάλεια, χάνοντας τις αποδόσεις που θα απολάμβανε εάν έκανε επενδύσεις με αυτά τα κεφάλαια.

Spectral Risk Measures

- Ένα μέτρο κινδύνου (risk measure) μπορεί να χαρακτηριστεί από την στάθμιση που δίνει στην κατανομή των ζημιών.

- Το VaR, για παράδειγμα, δίνει 100% στάθμιση στο X-ιοστό εκατοστημόριο της κατανομής, για το οποίο υπολογίζουμε το VaR και 0% σε όλα τα υπόλοιπα εκατοστημόρια.

- Το Expected Shortfall δίνει ίση στάθμιση σε όλα τα εκατοστημόρια που ξεπερνάνε το X-ιοστό, στην κατανομή ζημιών, και 0 στάθμιση σε όλα τα εκατοστημόρια τα οποία είναι κάτω από X-ιοστό.

- Μπορούμε να ορίσουμε τα spectral risk measures κάνοντας επιπρόσθετες υποθέσεις για τις σταθμίσεις που δίνουν στην κατανομή ζημιών.

- Ένα γενικό αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ότι τα spectral risk measures είναι coherent όταν η στάθμιση που δίνεται στο q-th εκατοστημόριο είναι μία μη-φθίνουσα συνάρτηση του q.

VaR: Χαρτοφυλακίου (1)

- Έστω ότι το χαρτοφυλάκιο έχει μόνο μία μετοχή (την X) και αξίζει €10εκ.
- Έστω ότι έχουμε ορίζοντα 10 ημερών και μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε VaR(99%).
- Τυπική απόκλιση ημέρας = 2%, ή €200,000.

- Η μέση απόδοση είναι πολύ μικρή σε σχέση με την μεταβλητότητα, και συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι είναι ίση με το μηδέν.
- <u>Επιπλέον υπόθεση</u>: Η απόδοση της μετοχής κατανέμεται κανονικά.

- Το 1% της κανονικής κατανομής βρίσκεται στο -2.33, άρα αυτό σημαίνει ότι με πιθανότητα 99% η αξία του χαρτοφυλακίου μας δεν θα μειωθεί την επόμενη μέρα περισσότερο από 2.33*200,000 = €466,000. (VaR(99%))

- Ο χρονικός μας ορίζοντας είναι οι 10 ημέρες οπότε θα πρέπει να υπολογίσουμε το αντίστοιχο VaR.
- Υποθέτουμε ανεξαρτησία μεταξύ των ημερήσιων αποδόσεων της μετοχής, οπότε: $10^{1/2}$*466,000 = €1,473,621. (VaR(99%) 10-ημερών).

VaR: Χαρτοφυλακίου (2)

- Έστω ότι το χαρτοφυλάκιο έχει μόνο μία μετοχή (την Υ) και αξίζει €5εκ.
- Έστω ότι έχουμε ορίζοντα 10 ημερών και μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε VaR(99%).
- Τυπική απόκλιση ημέρας = 1%, ή €50,000.

- Η μέση απόδοση είναι πολύ μικρή σε σχέση με την μεταβλητότητα, και συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι είναι ίση με το μηδέν.
- <u>Επιπλέον υπόθεση</u>: Η απόδοση της μετοχής κατανέμεται κανονικά.

- Το 1% της κανονικής κατανομής βρίσκεται στο -2.33, άρα αυτό σημαίνει ότι με πιθανότητα 99% η αξία του χαρτοφυλακίου μας δεν θα μειωθεί την επόμενη μέρα περισσότερο από 2.33*50,000 = €116,500. (VaR(99%))

- Ο χρονικός μας ορίζοντας είναι οι 10 ημέρες οπότε θα πρέπει να υπολογίσουμε το αντίστοιχο VaR.
- Υποθέτουμε ανεξαρτησία μεταξύ των ημερήσιων αποδόσεων της μετοχής, οπότε: $10^{1/2}$ *116,500 = €368,405. (VaR(99%) 10-ημερών).

VaR: Χαρτοφυλακίου (3)

- Έστω ότι το χαρτοφυλάκιο έχει δύο μετοχές (τις X και Y) και αξίζει €15εκ.
- X: Τυπική απόκλιση = €200,000. Y: Τυπική απόκλιση = €50,000.
- Συσχέτιση μεταξύ αποδόσεων A και B: 0.3.
- Η τυπική απόκλιση του αθροίσματος τους δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y}$$

- Συνεπώς: $\sigma_{X+Y} = \sqrt{200,000^2 + 50,000^2 + 2 \times 0.3 \times 200,000 \times 50,000}$
- Η μέση απόδοση υποθέτουμε ότι είναι μηδέν.
- Οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου κατανέμονται κανονικά (λόγω της υπόθεσης ότι οι αποδόσεις των μετοχών κατανέμονται από κοινού κανονικά).
- Το 1% της κανονικής κατανομής βρίσκεται στο -2.33, άρα αυτό σημαίνει ότι με πιθανότητα 99% η αξία του χαρτοφυλακίου μας δεν θα μειωθεί την επόμενη μέρα περισσότερο από 2.33*220,227 = €513,129 (VaR(99%))
- Υποθέτουμε ανεξαρτησία μεταξύ των ημερήσιων αποδόσεων της μετοχής, οπότε: $10^{1/2}$ * 513,129 = €1,622,657. (VaR(99%) 10-ημερών).

VaR: Χαρτοφυλακίου (4)

- Από την παραπάνω προσέγγιση είναι εμφανή τα οφέλη της διαφοροποίησης του κινδύνου, μέσω της δημιουργίας χαρτοφυλακίων.

- Το VaR(99%) 10-ημερών της X: €1,473,621.
- Το VaR(99%) 10-ημερών της Y: €368,405.
- Το VaR(99%) 10-ημερών του χαρτοφυλακίου (X&Y): €1,622,657.

- Συνολικό όφελος σε όρους VaR: (1,473,621+ 368,405)- 1,622,657=€219,369.

- Το σημείο κλειδί είναι η συσχέτιση μεταξύ των μετοχών που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο.
- Εάν η συσχέτιση είναι ίση με 1, δεν υπάρχει όφελος διαφοροποίησης, όσο απέχει από την 1 (προς το -1) τόσο μεγαλώνει το όφελος της διαφοροποίησης.

VaR Χαρτοφυλακίου : Γενίκευση

- Έστω ότι ένα χαρτοφυλάκιο αξίας P απαρτίζεται από n περιουσιακά στοιχεία, με ένα ποσό $\alpha_i (1 \leq i \leq n)$ να έχει επενδυθεί σε καθένα από αυτά.
- Ορίζουμε Δx_i την ημερήσια απόδοση του i στοιχείου.
- Η αλλαγή σε ποσά στο στοιχείο i είναι η $\alpha_i \, \Delta x_i$ και του χαρτοφυλακίου:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta x_i$$

- Η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου υποθέτουμε ότι είναι μηδέν.
- Έστω ότι η τυπική απόκλιση του στοιχείου i είναι η σ_i και ότι η συσχέτιση μεταξύ 2 στοιχείων (έστω i και j) είναι η ρ_{ij}.
- Η διακύμανση του ΔP δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{i,j} a_i a_j \sigma_i \sigma_j$$

- Η οποία μπορεί να γραφεί και ως:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i}^{n} \rho_{i,j} a_i a_j \sigma_i \sigma_j$$

VaR Χαρτοφυλακίου : Γενίκευση

- Έαν διαιρέσουμε την αλλαγή της αξίας του χαρτοφυλακίου σε ποσά, με την αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος της προηγούμενης ημέρας, θα έχουμε ποσοστιαίες αποδόσεις. (ΔP / P)

- Αντίστοιχα θα πρέπει να διαιρέσουμε και τα ποσά τα οποία έχουν επενδυθεί σε κάθε μετοχή (α_i), με την αξία του χαρτοφυλακίου.
- Αυτό θα μας δώσει την στάθμιση κάθε στοιχείου στο χαρτοφυλάκιο:
- $w_i = \alpha_i / P$

- Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου σε αυτή την περίπτωση είναι η:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{i,j} w_i w_j \sigma_i \sigma_j$$

- Εναλλακτικά: $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}_{i,j} w_i w_j$ ή $\sigma_P^2 = w^T C w$

- όπου C: πίνακας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων.

VaR Χαρτοφυλακίου: Monte Carlo Simulation

- Ένας εναλλακτικός τρόπος από όσα είδαμε μέχρι τώρα είναι να χρησιμοποιήσουμε προσομοιώσεις Monte Carlo για να δημιουργήσουμε την κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου (ΔP).
- Έστω ότι επιθυμούμε να υπολογίσουμε το VaR 1-ημέρας για ένα χαρτοφυλάκιο. Ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

1. Τιμολογούμε το χαρτοφυλάκιο σήμερα, με τον συνηθισμένο τρόπο, χρησιμοποιώντας τις τρέχουσες τιμές της αγοράς.
2. Μέσω μίας γεννήτριας τυχαίων αριθμών που ακολουθούν μία πολυμεταβλητή κανονική κατανομή, (υπάρχει ενσωματωμένη στα περισσότερα υπολογιστικά προγράμματα), παίρνουμε τυχαίες τιμές για τα διάφορα $\Delta \mathrm{x_i}$, δηλαδή τις αποδόσεις των σχετικών μεταβλητών.
3. Χρησιμοποιούμε τις σχετικές αποδόσεις για να υπολογίσουμε την νέα αξία της κάθε σχετικής μεταβλητής (π.χ. τιμές μετοχών, ομολόγων, ισοτιμίες κλπ.) στο τέλος της επόμενης ημέρας.
4. Επανυπολογίζουμε την αξία του χαρτοφυλακίου με τις νέες τιμές από το βήμα 3.
5. Αφαιρούμε από την νέα αξία που υπολογίσαμε στο βήμα 4, την τρέχουσα αξία του βήματος 1, και έτσι υπολογίζουμε μία απόδοση για το χαρτοφυλάκιο (ΔP).
6. Επαναλαμβάνουμε πάρα πολλές φορές (>1000) και έτσι δημιουργούμε μία κατανομή για το ΔP, την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το VaR.

VaR Χαρτοφυλακίου : Monte Carlo Simulation

- Εάν για παράδειγμα θέλουμε το VaR (99%) και έχουμε κάνει 5,000 επαναλήψεις, το VaR θα είναι η 50η χειρότερη απόδοση.

- Για VaR N-ημερών, πολλαπλασιάζουμε το VaR 1-ημέρας με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού N.

- Ένα μειονέκτημα του Monte Carlo είναι ότι μπορεί να είναι πάρα πολύ αργό υπολογιστικά λόγω του πολύ μεγάλου αριθμού των εμπλεκόμενων περιουσιακών στοιχείων στα χαρτοφυλάκια.

- Μία λύση είναι να χρησιμοποιηθεί μία σχέση που θα συνδέει απευθείας τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου με τις αποδόσεις των επιμέρους περιουσιακών στοιχείων. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να παρακάμψουμε τα βήματα 3 και 4 και να επιταχύνουμε κατά πολύ την διαδικασία. (partial simulation approach).