

Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής
Διδακτορικό Πρόγραμμα



Αποτίμηση Αξιογράφων και Επιλογή Χαρτοφυλακίου

Οκτώβριος 2019

©Δημήτρης Μαλλιάρopoulos

Καθηγητής

Περιεχόμενα

Ενότητα I:

Εισαγωγή: Το DNA των υποδειγμάτων αποτίμησης.....	3
Ο καθορισμός του προεξοφλητικού επιτόκιου.....	Error! Bookmark not defined.
Η τιμή του χρόνου και του κινδύνου.....	Error! Bookmark not defined.
Το αναμενόμενο πραγματικό επιτόκιο.....	Error! Bookmark not defined.
Ο αναμενόμενος Πληθωρισμός.....	Error! Bookmark not defined.
Το αναμενόμενο ασφάλιστρο κινδύνου.....	Error! Bookmark not defined.
Τιμή, απόδοση και προεξοφλητικό επιτόκιο.....	Error! Bookmark not defined.
Η έννοια της μελλοντικής αξίας.....	Error! Bookmark not defined.
Η έννοια της παρούσας αξίας.....	Error! Bookmark not defined.
Αποτίμηση Μετοχών.....	6
Σταθερός διαχρονικά συντελεστής προεξόφλησης.....	6
Στοχαστική διαδικασία μερίσματος.....	8
Στοχαστική διαδικασία της τιμής της μετοχής.....	9
Στοχαστική διαδικασία της τιμής.....	13
Κυμαινόμενος συντελεστής προεξόφλησης.....	14
Γραμμική προσέγγιση του υποδείγματος παρούσας αξίας με κυμαινόμενο συντελεστή προεξόφλησης.....	17
Αποδόσεις και προσδοκίες της αγοράς.....	26
Το υπόδειγμα του καταναλωτή και ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης.....	34
Το βασικό υπόδειγμα καταναλωτή με δυο περιόδους.....	35
Οριακός λόγος υποκατάστασης και στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης.....	36
Το Υπόδειγμα παρούσας αξίας με στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης.....	38
Μαθηματικά εργαλεία.....	40
Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.....	41
Διόρθωση τιμολόγησης για κίνδυνο.....	42
Στατιστικά δεδομένα και χαρακτηριστικά του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης.....	47
Αναμενόμενες αποδόσεις και beta.....	50
Το αποδοτικό όριο των επενδυτικών δυνατοτήτων της οικονομίας.....	51
Το παζλ του ασφάλιστρου κινδύνου των μετοχών.....	54
Το παζλ του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου.....	54
Είναι οι τιμές/αποδόσεις προβλέψιμες;.....	59
Γενίκευση του βασικού υποδείγματος αποτίμησης: Άπειρος επενδυτικός ορίζοντας..	Error! Bookmark not defined.
Επιλογή παραγόντων.....	63
Πως προκύπτουν παραγοντικά υποδείγματα χωρίς την κατανάλωση από το CCAPM? Γενικοί κανόνες.....	63
Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων (CAPM).....	64
Οικονομική λογική.....	65
Υπόδειγμα καταναλωτή με δύο περιόδους και περιορισμό πλούτου.....	65
Λογαριθμική χρησιμότητα με άπειρο ορίζοντα.....	66
Διαχρονικό CAPM (ICAPM).....	68
Δεσμευμένα και αδέσμευτα υποδείγματα αποτίμησης.....	70
Το υπόδειγμα του καταναλωτή με μακροχρόνιους κινδύνους κατανάλωσης.....	75
Εμπειρικοί έλεγχοι	
1. Διαστρωματικοί έλεγχοι του CCAPM.....	75
2. Διαστρωματικοί έλεγχοι του CAPM.....	

Ενότητα II:

Επιλογή χαρτοφυλακίου.....	91
Το αποδοτικό όριο.....	
Χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου.....	
Επιλογή χαρτοφυλακίου με αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου.....	
Θεώρημα δυο αμοιβαίων κεφαλαίων.....	100
Το υπόδειγμα CAPM.....	
Οικονομετρικές μέθοδοι.....	108
Διακύμανση σταθμίσεων χαρτοφυλακίων	
Προβλήματα στην κατασκευή χαρτοφυλακίων Markowitz	
Αντισταθμιστικά (στρατηγικά) χαρτοφυλάκια, M+2 fund separation και ICAPM.....	111

Εισαγωγή:

Η αποτίμηση αξιογράφων (asset pricing) είναι ένα από τα πιο ενδιαφέροντα αντικείμενα της χρηματοοικονομικής. Ποιοι παράγοντες καθορίζουν τις τιμές και τις αποδόσεις μετοχών, ομολόγων, εντόκων γραμματίων του δημοσίου και άλλων αξιογράφων; Πως αλλάζουν τιμές και αποδόσεις στη διάρκεια του οικονομικού κύκλου; Γιατί κάποια αξιόγραφα δίνουν μεγαλύτερες αποδόσεις από άλλα; Αυτά είναι μερικά από τα ερωτήματα στα οποία η θεωρία αποτίμησης αξιογράφων προσπαθεί να δώσει απαντήσεις.

Τα θεωρητικά υποδείγματα αποτίμησης είναι αρκετά και τα εφαρμοσμένα υποδείγματα είναι ακόμη περισσότερα: CAPM, ICAPM, APT και παραγοντικά υποδείγματα είναι μερικά από αυτά. Οι διαφορές μεταξύ των υποδειγμάτων αυτών είναι σημαντικές τόσο όσον αφορά τις βασικές υποθέσεις πάνω στις οποίες στηρίζονται όσο και όσον αφορά τους παράγοντες κινδύνου τους οποίους θεωρούν σημαντικούς για την αποτίμηση αξιογράφων. Πέρα από τις διαφορές τους όμως, ένα από τα κεντρικά συμπεράσματα της σύγχρονης βιβλιογραφίας είναι ότι αρκετά από αυτά τα υποδείγματα είναι διαφορετικές εκδόσεις ενός βασικού υποδείγματος αποτίμησης, του υποδείγματος αποτίμησης αξιογράφων του καταναλωτή (Consumption Capital Asset Pricing Model, CCAPM). Το υπόδειγμα αυτό είναι μια επέκταση του βασικού υποδείγματος της επιλογής κατανάλωσης και αποταμίευσης σε δυο περιόδους της μικροοικονομικής θεωρίας. Στο υπόδειγμα αυτό η αξία ενός τίτλου καθορίζεται από την οριακή χρησιμότητα του καταναλωτή από την κατανάλωση των αναμενόμενων πληρωμών του τίτλου. Ο συντελεστής προεξόφλησης των μελλοντικών πληρωμών είναι στοχαστικός καθώς εξαρτάται από την οριακή χρησιμότητα του καταναλωτή η οποία αλλάζει κατά τη διάρκεια του οικονομικού κύκλου. Αρκετά από τα γνωστά υποδείγματα αποτίμησης μπορούν να αναχθούν σε ειδικές περιπτώσεις αυτού του βασικού υποδείγματος.

Η σημασία αυτής της πρότασης είναι πολλαπλή.

Πρώτον, διότι τα διάφορα υποδείγματα αποτίμησης δένουν μεταξύ τους πάνω σε μια συμπαγή θεωρητική βάση. Ως αποτέλεσμα, η επιλογή των παραγόντων κινδύνου που καθορίζουν τις αποδόσεις δεν είναι αυθαίρετη, αλλά συνδέεται με την οριακή χρησιμότητα, δηλαδή τις προτιμήσεις του καταναλωτή.

Πέραν τούτου όμως, η οριακή χρησιμότητα και κατά συνέπεια ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης αλλάζει στο χρόνο ως συνάρτηση μιας σειράς παραγόντων που καθορίζονται από την τεχνολογία της οικονομίας και την αβεβαιότητα όσον αφορά το οικονομικό περιβάλλον. Συγκεκριμένα, η τεχνολογία της οικονομίας καθορίζει το μέσο ρυθμό μεταβολής του δυνητικού προϊόντος και της κατανάλωσης στο χρόνο, επομένως και τη μέση μεταβολή της οριακής χρησιμότητας, ενώ η διακύμανση της οικονομικής δραστηριότητας γύρω από το μέσο ρυθμό δυνητικής ανάπτυξης καθορίζει τις διακυμάνσεις της μεταβολής της οριακής χρησιμότητας και, κατά συνέπεια, των ασφάλιστρων κινδύνου των αξιογράφων.

Τέλος, η αβεβαιότητα όσον αφορά την ένταση των οικονομικών διακυμάνσεων οδηγεί τους

επενδυτές στη δημιουργία επιπλέον αποταμιεύσεων για να αντιμετωπίσουν μια πιθανή μελλοντική μείωση του εισοδήματός τους και επηρεάζει τις απαιτούμενες αποδόσεις των αξιογράφων.

Δεύτερον, διότι δείχνει ότι όλα τα γνωστά υποδείγματα αποτίμησης έχουν κληρονομήσει το DNA του CCAPM. Κατά συνέπεια, δεν μπορεί κανείς εύκολα να απορρίψει εμπειρικά το CCAPM χωρίς να απορρίψει και τα υποδείγματα που βασίζονται σε αυτό. Αυτό μας οδηγεί σε μια νέα θεώρηση της εμπειρικής έρευνας στα υποδείγματα αποτίμησης. Σύμφωνα με την άποψη αρκετών ερευνητών, το CAPM είναι σε θέση να εξηγήσει καλύτερα τις παρατηρούμενες αποδόσεις μετοχών και μετοχικών χαρτοφυλακίων από το CCAPM. Το συμπέρασμα αυτό είναι προφανώς λανθασμένο καθώς απόρριψη του CCAPM συνεπάγεται αυτόματα και απόρριψη του CAPM ως μια ειδική περίπτωση του CCAPM. Εξάλλου, το CAPM εξηγεί τις αποδόσεις των μετοχών με δεδομένη την απόδοση της αγοράς ενώ το CCAPM εξηγεί (πέρα από τις αποδόσεις των μετοχών) και την ίδια την απόδοση της αγοράς.

Σχηματικά, η θεωρία αποτίμησης βασίζεται σε μια κεντρική αρχή:

$$\text{Τιμή} = \text{προεξοφλημένη αξία μελλοντικών πληρωμών}$$

Όλα τα υπόλοιπα είναι υποθέσεις όσον αφορά τον συντελεστή προεξόφλησης, τον ορίζοντα του επενδυτή και μαθηματικοί μετασχηματισμοί.

Μπορούμε να συνοψίσουμε την θεωρία αποτίμησης σε δύο εξισώσεις:

$$P_t = E_t(M_{t+1}X_{t+1}) \quad (1)$$

$$M_{t+1} = f(F_{t+1}) \quad (2)$$

όπου P : τιμή αξιόγραφου, X : πληρωμή του αξιόγραφου, M : στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης και F ένας παράγοντας (ή ένα σετ παραγόντων) κινδύνου.

Κάθε ειδικό υπόδειγμα μπορεί να θεωρηθεί ως μια υπόθεση σχετικά με την συνάρτηση $f(\cdot)$.

Παίρνοντας μια γραμμική προσέγγιση της (2), έχουμε:

$$M_{t+1} = a + bF_{t+1} \quad (2')$$

Τα επιμέρους υποδείγματα διαφοροποιούνται ως προς το F .

Έτσι για παράδειγμα:

- το CCAPM υποθέτει ότι: F = ρυθμός μεταβολής κατανάλωσης, Δc ,
- το CAPM υποθέτει ότι: F = απόδοση χαρτοφυλακίου πλούτου (αγοράς),
- το ICAPM υποθέτει ότι: F = απόδοση χαρτοφυλακίου πλούτου + μεταβλητές κατάστασης.

Στις σημειώσεις αυτού του μαθήματος θα βρείτε μια συστηματική παρουσίαση των θεωρητικών

βάσεων της αποτίμησης αξιολογίων (Ενότητα Ι). Σκοπός της παρουσίασης είναι να συνδεθούν τα γνωστά υποδείγματα αποτίμησης μεταξύ τους για να γίνουν καλύτερα αντιληπτές οι διαφορές τους αλλά και οι περιορισμοί τους. Για το σκοπό αυτό θα ξεκινήσουμε με το απλούστερο υπόδειγμα τιμολόγησης, το γνωστό υπόδειγμα παρούσας αξίας με σταθερούς συντελεστές προεξόφλησης. Μετά θα παρουσιάσουμε το υπόδειγμα παρούσας αξίας με κυμαινόμενους συντελεστές προεξόφλησης και στη συνέχεια στο υπόδειγμα του καταναλωτή με στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης. Τέλος, με βάση το υπόδειγμα αυτό θα ορίσουμε κάποια από τα πιο γνωστά υποδείγματα αποτίμησης ως ειδικές περιπτώσεις, όπως το CAPM, το ICAPM και παραγοντικά υποδείγματα της εφαρμοσμένης χρηματοοικονομικής.

Στη δεύτερη ενότητα (Ενότητα ΙΙ) θα ασχοληθούμε με την επιλογή άριστων χαρτοφυλακίων, ξεκινώντας με την κλασική θεωρία επιλογής χαρτοφυλακίου του Markowitz. Το χαρτοφυλάκιο αυτό χαρακτηρίζει την επιλογή επενδυτών οι οποίοι ενδιαφέρονται για την μέση απόδοση και τον κίνδυνο με ορίζοντα επένδυσης μιας περιόδου. Η κατανομή των αποδόσεων θεωρείται κανονική και σταθερή στον χρόνο. Στον κόσμο του Markowitz η επιλογή χαρτοφυλακίου δεν διαφέρει μεταξύ βραχυχρόνιων επενδυτών με ορίζοντα επένδυσης μία περίοδο και μακροχρόνιων επενδυτών με ορίζοντα επένδυσης πολλές περιόδους. Ο λόγος είναι ότι η ετησιοποιημένη αναμενόμενη απόδοση μιας επένδυσης με ορίζοντα k περιόδους είναι ίδια με την αναμενόμενη απόδοση μίας περιόδου. Το ίδιο συμβαίνει και με τον κίνδυνο. Θα ονομάσουμε τους επενδυτές αυτούς «μυωπικούς» διότι επιλέγουν άριστα χαρτοφυλάκια για μία περίοδο και ενδεχομένως αναπροσαρμόζουν τα χαρτοφυλάκια κάθε περίοδο με την εισροή νέας πληροφόρησης για τις αναμενόμενες αποδόσεις και τον κίνδυνο των αξιολογίων. Οι επενδυτές αυτοί δεν ενδιαφέρονται για μακροχρόνιους κινδύνους και κατά συνέπεια δεν επιλέγουν χαρτοφυλάκια που να αντισταθμίζουν μακροχρόνιους κινδύνους.

Στην συνέχεια θα χαλαρώσουμε τις περιοριστικές υποθέσεις του Markowitz με σκοπό να διατυπώσουμε μια εναλλακτική θεωρία επιλογής άριστου χαρτοφυλακίου για μακροχρόνιους στρατηγικούς επενδυτές. Θα ονομάσουμε τους επενδυτές αυτούς στρατηγικούς για δύο λόγους. Πρώτον, οι επενδυτές αυτοί επιλέγουν χαρτοφυλάκια τα οποία αντισταθμίζουν μακροχρόνιους κινδύνους όπως για παράδειγμα τον κίνδυνο μιας οικονομικής ύφεσης, μιας αλλαγής στα επιτόκια, κλιματικής αλλαγής κλπ. Τα χαρτοφυλάκια αυτά είναι στρατηγικά γιατί προστατεύουν από μελλοντικούς κινδύνους. Δεύτερον, οι επενδυτές αυτοί έχουν μεγάλο ορίζοντα σε αντίθεση με τους μυωπικούς επενδυτές. Οι δύο αυτές αρχές είναι συναφείς με το διαχρονικό υπόδειγμα αποτίμησης του Merton. Στο υπόδειγμα αυτό, τα ασφάλιστρα κινδύνου των αξιολογίων καθορίζονται ως συναρτήσεις της συνδιακύμανσης των αποδόσεων των αξιολογίων με μεταβλητές κατάστασης, οι οποίες σηματοδοτούν τον κίνδυνο μιας αλλαγής του σετ επενδυτικών δυνατοτήτων στο μέλλον, σύμφωνα με το υπόδειγμα του Merton. Κατά συνέπεια, το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή αποτελείται από δύο μέρη: (α) το χαρτοφυλάκιο του Markowitz και (β) την αντισταθμιστική ζήτηση για αξιόγραφα τα οποία προστατεύουν το χαρτοφυλάκιο από μελλοντικούς κινδύνους.

Δημήτρης Μαλλιαρόπουλος

Κεφάλαιο 1: Αποτίμηση Μετοχών

Ορολογία:

P : Τιμή μετοχής

D : Μέρισμα

r : Απόδοση

$\beta = \frac{1}{1+r}$ (υποκειμενικός) συντελεστής προεξόφλησης

- Προσοχή: Όλες οι μεταβλητές είναι εκφρασμένες σε πραγματικούς όρους (σταθερές τιμές), δηλαδή αποπληθωρισμένες με τον Γενικό Δείκτη Τιμών Καταναλωτή.
- Για λόγους απλούστευσης θα ασχοληθούμε κατ' αρχήν με τα πιο απλά υποδείγματα με σταθερό συντελεστή προεξόφλησης.

Σταθερός διαχρονικά συντελεστής προεξόφλησης

Το υπόδειγμα υποθέτει ότι η αναμενόμενη πραγματική απόδοση της μετοχής, $E(r)$, είναι σταθερή διαχρονικά, $E(r)=r$. Το r αποτελείται από δύο μέρη:

$r = r^f + z$, όπου

- ο r^f : πραγματικό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (ίδιο με το ρ)
- ο z : ασφάλιστρο κινδύνου

Υποθέσεις :

- Το μέρισμα D καταβάλλεται μια φορά το χρόνο (στο τέλος του έτους)
- Το r είναι σταθερό διαχρονικά
- Ερώτηση: Ποια είναι η τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο επενδυτής σήμερα για την μετοχή (fair price);
- ο Η απάντηση εξαρτάται από τον επενδυτικό ορίζοντα

Επενδυτικός ορίζοντας = 1 περίοδος (έτος)

Η τιμή (fair price) την οποία είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένας επενδυτής σήμερα ("σήμερα" = χρόνος t) για μια μετοχή που σκοπεύει να κρατήσει μια περίοδο (έως το $t+1$) είναι:

$$P_t = \frac{E_t(D_{t+1})}{1+r} + \frac{E_t(P_{t+1})}{1+r} \quad (1)$$

Όπου $E_t(x)$ είναι η αναμενόμενη τιμή της x με βάση την διαθέσιμη πληροφόρηση στο χρόνο t (δεσμευμένος μέσος της x – conditional mean).

Σύμφωνα με την (1): $P_t \uparrow$ όταν $E_t(P_{t+1}) \uparrow$ ή/και $E_t(D_{t+1}) \uparrow$

- Ο όρος $\frac{1}{1+r}$ καλείται συντελεστής προεξόφλησης. Ο ρόλος του έγκειται στο να μεταφράζει μελλοντικά έσοδα σε σημερινές αξίες.
- Σύμφωνα με την (1), η τιμή την οποία ένας επενδυτής είναι διατεθειμένος να πληρώσει σήμερα για μια μετοχή ισούται με το άθροισμα του αναμενόμενου μερίσματος και της αναμενόμενης τιμής πώλησης, μεταφρασμένα σε σημερινές τιμές με ένα σταθερό συντελεστή

προεξόφλησης.

Επενδυτικός ορίζοντας = 2 περίοδοι (έτη)

Από την (1) \Rightarrow

$$P_{t+1} = \frac{E_t(D_{t+2})}{1+r} + \frac{E_t(P_{t+2})}{1+r} \quad (2)$$

(2) στην (1) \Rightarrow

$$P_t = \frac{E_t(D_{t+1})}{1+r} + \frac{E_t(D_{t+2})}{(1+r)^2} + \frac{E_t(P_{t+2})}{(1+r)^2} \quad (3)$$

Επενδυτικός ορίζοντας = T περίοδοι (έτη)

Αυξάνοντας τον επενδυτικό ορίζοντα μέχρι T \Rightarrow

$$P_t = \sum_{j=1}^T \frac{E_t(D_{t+j})}{(1+r)^j} + \frac{E_t(P_{t+T})}{(1+r)^T} \quad (4)$$

Η (4) εκφράζει την τιμή ισορροπίας ως το άθροισμα των προεξοφλημένων αναμενόμενων μερισμάτων (πρώτος όρος) και της προεξοφλημένης αναμενόμενης μελλοντικής τιμής της μετοχής (δεύτερος όρος). Ο τελευταίος όρος ονομάζεται συχνά «κερδοσκοπική φούσκα» (speculative bubble”).

Κερδοσκοπική φούσκα:

Η λογική μιας κερδοσκοπικής φούσκας είναι ότι η τιμή ανεβαίνει σήμερα όταν οι επενδυτές προσδοκούν άνοδο της τιμής στο μέλλον :

$$P_t \uparrow \text{ αν } E_t(P_{t+T}) \uparrow \text{ καθώς } \frac{E_t(P_{t+T})}{(1+r)^T} \uparrow$$

- Η σημασία του κερδοσκοπικού παράγοντα στον καθορισμό της τιμής ενός αξιογράφου είναι συνάρτηση του ορίζοντα του επενδυτή. Σε τεχνικούς όρους, για να εξαλείψουμε την κερδοσκοπική φούσκα, υποθέτουμε ότι ο ορίζοντας του επενδυτή είναι άπειρος, δηλαδή αφήνουμε το T να πάει στο άπειρο, $T \rightarrow \infty$.

Από την (4) :

$$P_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_t(D_{t+j})}{(1+r)^j} + \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{E_t(P_{t+T})}{(1+r)^T} \right] \Rightarrow \quad (5)$$

$$P_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_t(D_{t+j})}{(1+r)^j} \text{ εάλν } \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{E_t(P_{t+T})}{(1+r)^T} \right) = 0 \quad (6)$$

- Η κερδοσκοπική φούσκα εξαφανίζεται υπό την προϋπόθεση ότι $\lim_{T \rightarrow \infty} E_t(P_{t+T}) < \infty$ δηλαδή όταν η αναμενόμενη τιμή δεν τείνει στο άπειρο.
- Προσέξτε ότι ο όρος $(1+r)^T$ τείνει στο άπειρο όταν $T \rightarrow \infty$ εφόσον $r > 0$.
- Η σχέση (6) εκφράζει την τιμή της μετοχής ως την παρούσα αξία όλων των αναμενόμενων μερισμάτων με προεξοφλητικό επιτόκιο r.
- Η παρούσα αξία της μετοχής (τιμή) είναι αρνητική συνάρτηση του επιτοκίου προεξόφλησης.

- ο Ο λόγος είναι ότι ένα υψηλότερο επιτόκιο προεξόφλησης σηματοδοτεί ότι οι επενδυτές προσδίδουν μικρότερη αξία στα μελλοντικά έσοδα τους σε σύγκριση με έσοδα σήμερα.
- Καθώς $r = \rho + z$ η τιμή μιας μετοχής είναι τόσο μικρότερη, όσο υψηλότερο είναι το πραγματικό επιτόκιο ρ και όσο υψηλότερο είναι το ασφάλιστρο κινδύνου z .

Σημείωση 1 : Η αξία της μετοχής καθορίζεται αποκλειστικά από την ικανότητα της να πληρώνει μερίσματα. Αν υποθέσουμε στην (5) $E_t(D_{t+j}) = 0, j = 1, \dots, \infty$ τότε $P_t = 0$.

- ο Γενικά: Η αξία κάθε τίτλου καθορίζεται αποκλειστικά από την ικανότητά του να δημιουργεί εισόδημα στο μέλλον για τον επενδυτή (όχι κέρδη για την επιχείρηση).

Σημείωση 2: Ο συντελεστής προεξόφλησης r στο παραπάνω υπόδειγμα θεωρείται σταθερός διαχρονικά.

- ο Η υπόθεση αυτή είναι μη ρεαλιστική καθώς υπάρχουν εμπειρικές ενδείξεις ότι τόσο το πραγματικό επιτόκιο ρ όσο και το ασφάλιστρο κινδύνου αλλάζουν στο χρόνο.
- ο Αργότερα θα γνωρίσουμε υποδείγματα αποτίμησης τα οποία προσπαθούν να εξηγήσουν την μεταβλητότητα του συντελεστή προεξόφλησης στο χρόνο.
- ο Προς το παρόν, όμως, θα συνεχίσουμε να θεωρούμε το r σταθερό.
- Πρακτικά η σχέση (6) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό της σημερινής τιμής ισορροπίας P_t καθώς περιέχει προσδοκίες μελλοντικών μερισμάτων.
- Για να καθορίσουμε το P_t πρέπει να εξαλείψουμε τις προσδοκίες μελλοντικών μερισμάτων και να τις αντικαταστήσουμε με μετρήσιμα μεγέθη. Για το σκοπό αυτό πρέπει να κάνουμε μια υπόθεση σχετικά με την στοχαστική διαδικασία D_t . Η υπόθεση ενός γενεσιουργού μηχανισμού του D (Data Generating Process) θα μας επιτρέψει να κάνουμε προβλέψεις για τα μελλοντικά επίπεδα του D με βάση σημερινή πληροφόρηση.

Στοχαστική διαδικασία μερίσματος

1. Τυχαίος περίπατος

Ας υποθέσουμε ότι το $\ln(D_t)$ ακολουθεί την στοχαστική διαδικασία ενός τυχαίου περιπάτου (random walk):

$$d_t = d_{t-1} + \varepsilon_t \quad (7)$$

όπου ε_t : τυχαία διαταραχή με μέσο (αναμενόμενη τιμή) 0 και σταθερή διακύμανση.

Τότε το αναμενόμενο μέρισμα για κάθε μελλοντικό χρόνο $t+j$, δεδομένης της σημερινής πληροφόρησης, είναι ίσο με το σημερινό μέρισμα: $E_t(d_{t+j}) = d_t$. Κατά συνέπεια, από την (6) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
P_t &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_t(D_{t+j})}{(1+r)^j} \\
&= D_t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^j} \\
&= D_t \frac{1}{(1+r)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^j} \\
&= D_t \frac{1}{(1+r)} \left(1 + \frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots \right) \\
&= D_t \frac{1}{(1+r)} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} \right) \\
&= D_t \frac{1}{(1+r)} \left(\frac{1+r}{r} \right) \\
\Rightarrow P_t &= \frac{D_t}{r} \tag{8}
\end{aligned}$$

- Καθώς το μέρισμα είναι σταθερό, η τιμή είναι ένα πολλαπλάσιο του σημερινού μερίσματος, δηλαδή μια σταθερά.
- Με άλλα λόγια, η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής, r , είναι ίση με τη μερισματική της απόδοση σήμερα, $r=D_t/P_t$.

Στοχαστική διαδικασία της τιμής της μετοχής

- Τι προκύπτει από την (7) σχετικά με την στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί η τιμή P_t ;
- Από την (1) $\Rightarrow E_t(P_{t+1}) = (1+r)P_t - E_t(D_{t+1})$ όπου $E_t(P_{t+1})$ είναι ο δεσμευμένος μέσος (αναμενόμενη τιμή) του P_{t+1} με βάση την πληροφόρηση στο χρόνο t .
- Αλλά από την (7) $\Rightarrow E_t(D_{t+1}) = D_t$ και

Από την (8) $\Rightarrow D_t = r \cdot P_t$.

Επομένως :

$$E_t(P_{t+1}) = (1+r)P_t - rP_t = P_t$$

- Γενικά ισχύει $E_t(P_{t+j}) = P_t, j=1,2,3,\dots,\infty$, δηλαδή η τιμή ακολουθεί και αυτή μια στοχαστική διαδικασία τυχαίου περιπάτου, όπως και το μέρισμα. Η καλύτερη πρόβλεψη της μελλοντικής τιμής είναι ότι θα μείνει σταθερή στα σημερινά της επίπεδα.

2. Τυχαίος περίπατος με τάση: το υπόδειγμα Gordon

Ας υποθέσουμε ότι ο αναμενόμενος ρυθμός αύξησης του μερίσματος είναι σταθερός και ισούται με g (αυτό αντιστοιχεί σε μια στοχαστική διαδικασία τυχαίου περιπάτου με τάση -- random walk with drift-- σε λογαρίθμους, $d_t = \ln(D_t)$):

$$\begin{aligned} E_t(D_t) &= (1 + g)D_{t-1} \\ &\Rightarrow \\ E_t(D_{t+j}) &= (1 + g)^j D_t \end{aligned} \tag{9}$$

Αντικαθιστώντας στην (6) \rightarrow

$$\begin{aligned} P_t &= D_t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1+g)^j}{(1+r)^j} \\ &= D_t \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \end{aligned}$$

όπου $\delta = \frac{(1+g)}{(1+r)}$. Επομένως:

$$\begin{aligned} P_t &= D_t \delta (1 + \delta + \delta^2 + \dots) = D_t \delta \left(\frac{1}{1 - \delta} \right) \\ &= D_t \frac{1 + g}{1 + r} \left(\frac{1}{1 - \frac{1 + g}{1 + r}} \right) \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$P_t = D_t \frac{1+g}{r-g} \tag{10}$$

Η σχέση (10) είναι το υπόδειγμα του Gordon.

- Σύμφωνα με το υπόδειγμα του Gordon, η τιμή μιας μετοχής είναι θετική συνάρτηση του μερίσματος και του αναμενόμενου ρυθμού αύξησης του μερίσματος και αρνητική συνάρτηση της απαιτούμενης πραγματικής απόδοσης.
- Η τιμή είναι υψηλή σε σχέση με το σημερινό μέρισμα όταν ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής του μερίσματος είναι υψηλός ή όταν η αναμενόμενη απόδοση είναι χαμηλή.
- Μετοχές με αναμενόμενη υψηλή κερδοφορία στο μέλλον (g) έχουν υψηλά P/D.

Παράδειγμα: μετοχές τεχνολογίας.

- Μεταξύ δυο μετοχών με ίδια κερδοφορία (g) η μετοχή που έχει υψηλότερο ασφάλιστρο κινδύνου (δηλ. υψηλότερο r) έχει χαμηλότερο P/D.

Εφαρμογές

Το παρακάτω γράφημα δείχνει τον

1. **S&P 500**: αποπληθωρισμένος δείκτης τιμών του χρηματιστηρίου των ΗΠΑ (S&P 500) για το διάστημα 1871-2014.

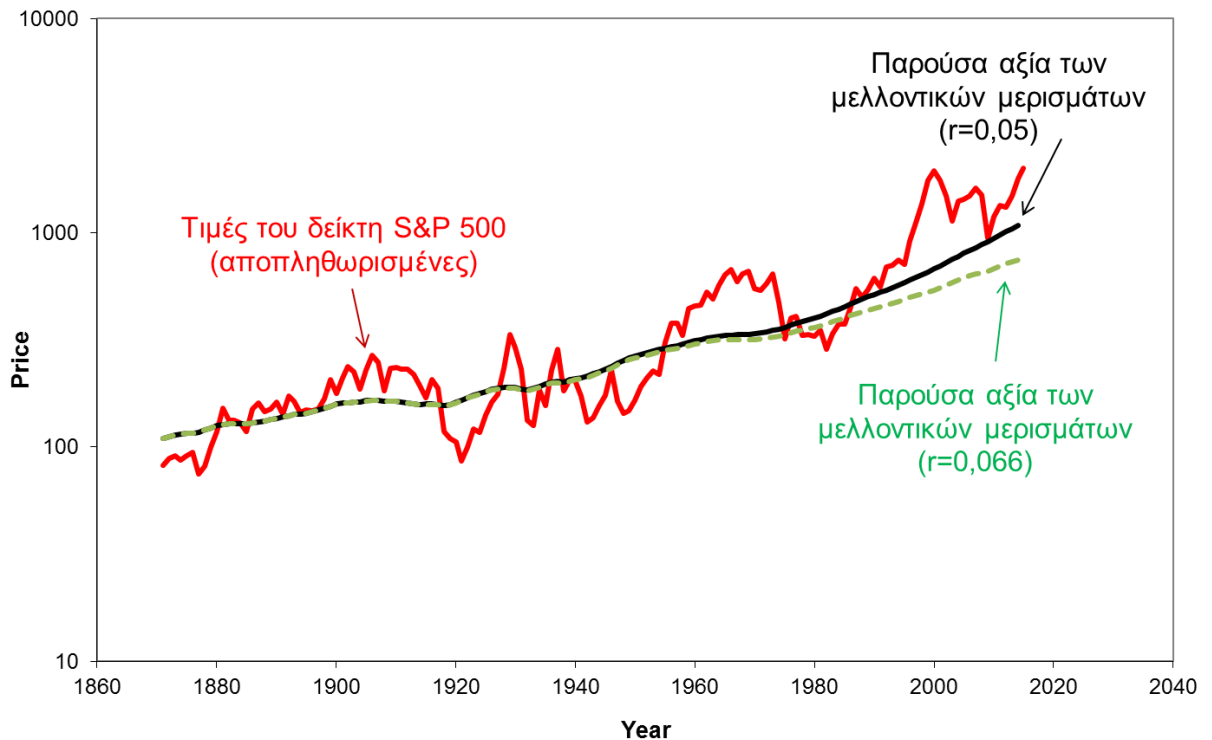
2. **Παρούσα αξία των μελλοντικών μερισμάτων** με σταθερό συντελεστή προεξόφλησης. Η αξία αυτή εκτιμάται για κάθε σημείο στο χρόνο ($t=1871-2014$) ως:

$$P_t^* = \left(\frac{1}{1+r} \right) (D_{t+1} + P_{t+1})$$

όπου r η μέση αποπληθωρισμένη λογαριθμική απόδοση του S&P 500 στο διάστημα 1871-2014.

Η τελική τιμή (το 2014) εκτιμάται σύμφωνα με το υπόδειγμα Gordon ως $D(2014) \cdot (1+g)/(r-g)$, όπου g ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής των μερισμάτων και r η αναμενόμενη απόδοση.

Ως μελλοντικό μέσο ρυθμό μεταβολής των μερισμάτων (g) και μέση αναμενόμενη πραγματική απόδοση του S&P 500 μετά το 2014 (r) υποθέσαμε $g=0.014$ (δειγματικός μέσος 1870-2014) και $r=0.05$ (μαύρη γραμμή) ή, εναλλακτικά, $r=0.066$ (πράσινη διακεκομμένη γραμμή).



Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις της παρούσας αξίας αλλάζουν ανάλογα με την υπόθεση που θα κάνουμε σχετικά με τη μελλοντική αναμενόμενη απόδοση του δείκτη (r). Όσο υψηλότερη είναι η αναμενόμενη μελλοντική απόδοση, τόσο χαμηλότερη η παρούσα αξία. Η διαφορά στην εκτίμηση αυξάνει με τον χρόνο και είναι μέγιστη στις τελευταίες παρατηρήσεις του δείγματος.

Το ίδιο θα συνέβαινε και αν αλλάζαμε την υπόθεση για το g . Όσο υψηλότερο το g , τόσο

υψηλότερη η παρούσα αξία.

Οι παρατηρήσεις αυτές δείχνουν ότι εκτιμήσεις της παρούσας αξίας μπορεί να διαφέρουν σημαντικά, ανάλογα με τις υποθέσεις σχετικά με την αναμενόμενη απόδοση και τον ρυθμό μεταβολής των μερισμάτων στο μέλλον.

Υπόδειγμα Gordon με βάση τα κέρδη

Συχνά το υπόδειγμα Gordon ορίζεται με βάση τα κέρδη (E) των εταιρειών και όχι με βάση τα μερίσματα. Ο λόγος είναι ότι τα κέρδη αντικατοπτρίζουν καλύτερα την ικανότητα των εταιρειών να προσδίδουν μελλοντική αξία στις μετοχές τους.

Το υπόδειγμα (10) μπορεί να μεταφραστεί εύκολα σε όρους E , αν υποθέσουμε ότι το μέρισμα είναι ένα σταθερό ποσοστό, τ , των κερδών (τ : payout ratio).

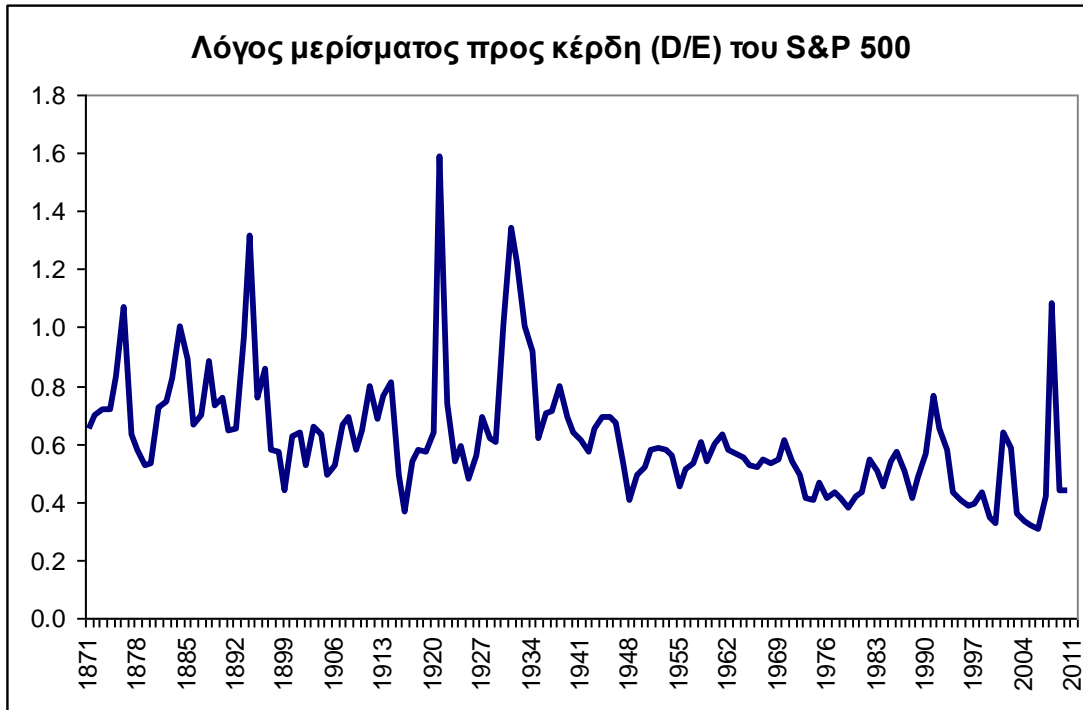
$$D_t = \tau E_t \quad (11)$$

Αντικαθιστώντας την (11) στην (10) και διαιρώντας και τις δυο πλευρές με E_t :

$$\frac{P_t}{E_t} = \tau \frac{1+g}{r-g} \quad (12)$$

- Σύμφωνα με την (12), εταιρείες που έχουν υψηλά P/E πρέπει να έχουν υψηλούς αναμενόμενους ρυθμούς μεταβολής των κερδών τους (με σταθερό r και τ).

Η υπόθεση μιας σταθερής σχέσης μεταξύ μερισμάτων και εταιρικών κερδών είναι αρκετά γενναία. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ότι ο λόγος αυτός έχει μεγάλες διακυμάνσεις στο χρόνο. Μακροχρόνια, οι εταιρείες φαίνεται να πληρώνουν ένα σχετικά σταθερό ποσοστό των κερδών τους σε μερίσματα. Όμως βραχυχρόνια (για λόγους εταιρικής πολιτικής, signaling κλπ) τείνουν να κρατούν τα μερίσματα σταθερά με αποτέλεσμα να αλλάζει ο λόγος μερίσματος προς κέρδη, ιδιαίτερα σε περιόδους ύφεσης, όταν τα εταιρικά κέρδη μειώνονται σημαντικά (βλέπε στο διάγραμμα την μεγάλη ύφεση/αποπληθωρισμό της περιόδου 1922-1933 και την ύφεση του 2008).



Στοχαστική διαδικασία της τιμής

Τι συνεπάγεται η υπόθεση ενός σταθερού ρυθμού ανόδου των μερισμάτων για την στοχαστική διαδικασία που ακολουθούν οι τιμές των μετοχών ;

Από την (1): $\Rightarrow E_t(P_{t+1}) = (1+r)P_t - E_t(D_{t+1})$

Αλλά από την (9) $\Rightarrow E_t(D_{t+1}) = (1+g)D_t$

Επομένως :

$$E_t(P_{t+1}) = (1+r)P_t - (1+g)D_t$$

Από την (10) έχουμε : $P_t = D_t \frac{1+g}{r-g}$. Επομένως :

$$E_t(P_{t+1}) = (1+r)P_t - (r-g)P_t = (1+g)P_t.$$

Γενικά, για κάθε μελλοντικό χρόνο $t+j$:

$$E_t(P_{t+j}) = (1+g)^j P_t.$$

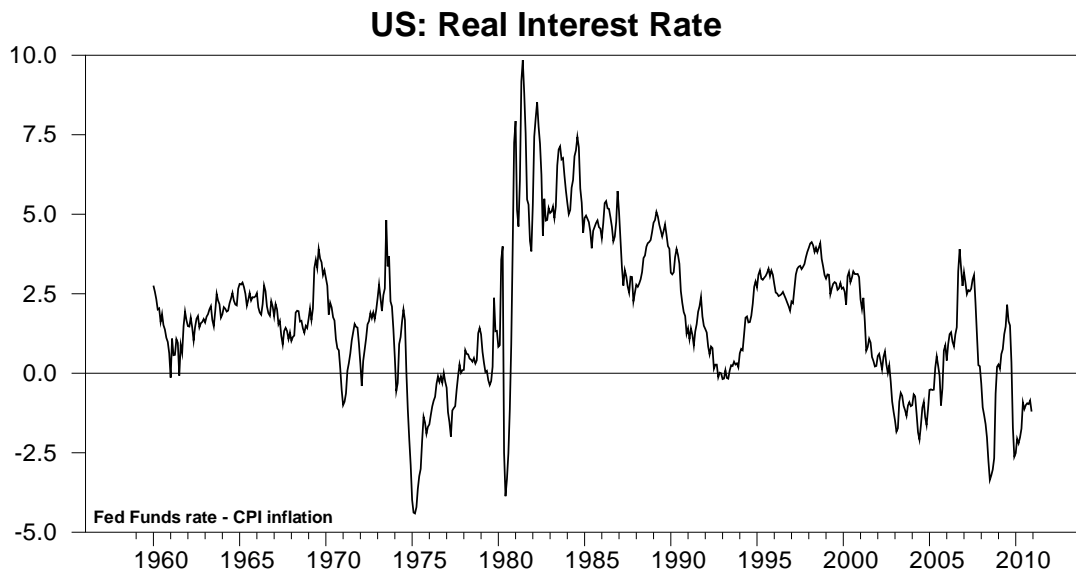
- Η τιμή ακολουθεί επίσης έναν τυχαίο περίπατο με τάση σε λογάριθμους,

$$E_t(\ln(P_{t+j})) = \ln(P_t) + jg.$$

- ο Οι τιμές βραχυχρόνια δεν είναι προβλέψιμες.
- ο Μακροχρόνια όμως αναμένεται να αυξάνονται με ρυθμό g .

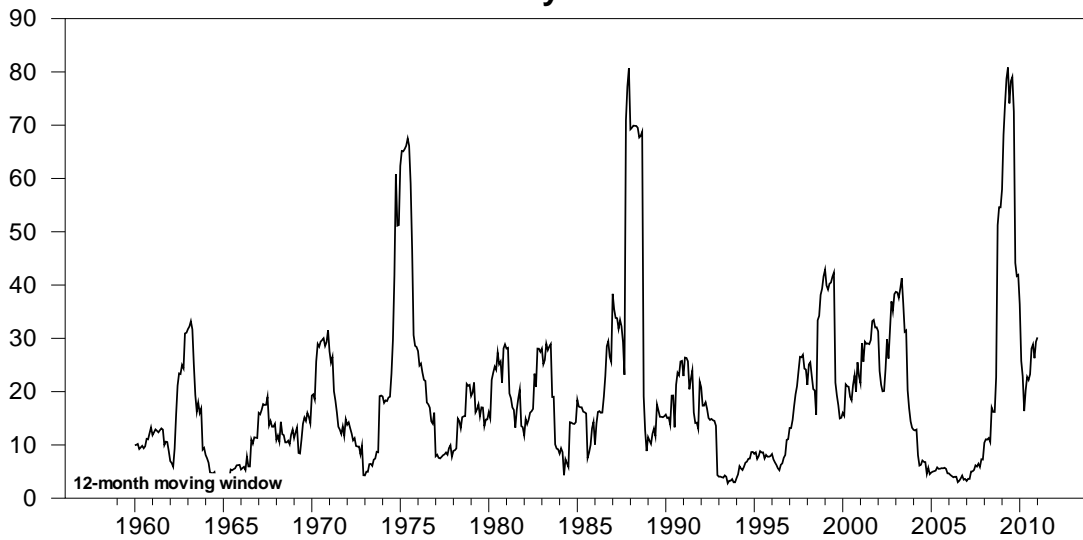
Κυμαινόμενος συντελεστής προεξόφλησης

Τόσο τα επιτόκια μηδενικού κινδύνου όσο και τα ασφάλιστρα κινδύνου κυμαίνονται στο χρόνο. Όταν η οικονομία βρίσκεται σε τροχιά ανάπτυξης, η κεντρική τράπεζα αυξάνει τα επιτόκια παρέμβασης για να τιθασεύσει τον αυξανόμενο πληθωρισμό. Τα πραγματικά επιτόκια αυξάνουν. Όταν, αντίθετα, η οικονομία μπαίνει σε ύφεση, η κεντρική τράπεζα μειώνει τα επιτόκια για να βοηθήσει την πραγματική οικονομία να ανακάμψει. Τα πραγματικά επιτόκια μειώνονται. Στο παρακάτω διάγραμμα, φαίνεται η πορεία του πραγματικού επιτοκίου στις ΗΠΑ (Fed Funds rate – Πληθωρισμός ΔΤΚ).



Τα ασφάλιστρα κινδύνου έχουν επίσης μεγάλη διακύμανση στο χρόνο καθώς η διακύμανση των αποδόσεων μεταβάλλεται. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει την πορεία της τυπικής απόκλισης των αποδόσεων του S&P 500 στο χρόνο. Η πετρελαϊκή κρίση του 1975, η απότομη διόρθωση της αγοράς το 1987 και η πρόσφατη χρηματοοικονομική κρίση του 2008 οδήγησαν σε σημαντική αύξηση της διακύμανσης των χρηματιστηρίων. Γενικά, σε περιόδους ανοδικών αγορών η διακύμανση είναι χαμηλή, ενώ σε περιόδους πτωτικών αγορών η διακύμανση αυξάνεται απότομα.

US: Volatility of S&P 500



Κατά συνέπεια, οι αναμενόμενες αποδόσεις των μετοχών μεταβάλλονται στο χρόνο. Ας υποθέσουμε ότι οι επενδυτές απαιτούν μια διαφορετική απόδοση σε κάθε μελλοντικό χρονικό σημείο για να είναι διατεθειμένοι να κρατήσουν μια μετοχή. Τότε, το επιτόκιο προεξόφλησης μελλοντικών μερισμάτων (αναμενόμενη απόδοση) μεταβάλλεται στο χρόνο:

$$r_t = \rho_t + z_t$$

$$\beta_t = \frac{1}{1 + r_t}$$

Αποτίμηση

Επενδυτικός ορίζοντας = 1 περίοδος (έτος).

Η τιμή (fair value) την οποία είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένας επενδυτής σήμερα για μια μετοχή που σκοπεύει να κρατήσει μια περίοδο είναι:

$$P_t = \frac{E_t(D_{t+1})}{1+r_{t+1}} + \frac{E_t(P_{t+1})}{1+r_{t+1}} = \beta_{t+1}(E_t(D_{t+1}) + E_t(P_{t+1}))$$

Επενδυτικός ορίζοντας = 2 περίοδοι (έτη).

$$P_t = \frac{E_t(D_{t+1})}{1+r_{t+1}} + \frac{E_t(P_{t+1})}{1+r_{t+1}} = \beta_{t+1}(E_t(D_{t+1}) + E_t(P_{t+1}))$$

$$P_{t+1} = \frac{E_t(D_{t+2})}{1+r_{t+2}} + \frac{E_t(P_{t+2})}{1+r_{t+2}} = \beta_{t+2}(E_t(D_{t+2}) + E_t(P_{t+2}))$$

⇒

$$P_t = \beta_{t+1}E_t(D_{t+1}) + \beta_{t+1}\beta_{t+2}(E_t(D_{t+2}) + E_t(P_{t+2}))$$

Άπειρός επενδυτικός ορίζοντας

Αυξάνοντας τον επενδυτικό ορίζοντα μέχρι το άπειρο και παραβλέποντας την κερδοσκοπική φούσκα \Rightarrow

$$\begin{aligned} P_t &= \beta_{t+1}E_t(D_{t+1}) + \beta_{t+1}\beta_{t+2}E_t(D_{t+2}) \\ &\quad + \beta_{t+1}\beta_{t+2}\beta_{t+3}E_t(D_{t+3}) + \dots \\ &\Rightarrow \\ P_t &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^j \beta_{t+i} \right] E_t(D_{t+j}) \end{aligned}$$

- Για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί το υπόδειγμα προεξόφλησης για τον καθορισμό της τιμής, πρέπει να προβλεφθούν τόσο τα μελλοντικά μερίσματα όσο και οι μελλοντικοί συντελεστές προεξόφλησης.
 - Σκοπός των υποδειγμάτων αποτίμησης ("asset pricing models"), όπως CAPM, Intertemporal CAPM, Consumption CAPM, APT κλπ είναι να «ανακαλύψουν» τους παράγοντες που καθορίζουν τις αναμενόμενες αποδόσεις, δηλ. τους συντελεστές προεξόφλησης τόσο μεταξύ διαφορετικών κεφαλαιακών στοιχείων όσο και στο χρόνο.
- Η παραπάνω φόρμουλα είναι περίπλοκη καθώς περιλαμβάνει αθροίσματα γινομένων. Για να την απλοποιήσουμε, μπορούμε να πάρουμε μια γραμμική προσέγγιση της απόδοσης. Αυτό θα μας δώσει ένα γραμμικό υπόδειγμα προεξόφλησης.

Κεφάλαιο 2: Γραμμική προσέγγιση του υποδείγματος παρούσας αξίας με κυμαινόμενο συντελεστή προεξόφλησης

Οι Campbell και Shiller (1989) προτείνουν μια γραμμική προσέγγιση του υποδείγματος παρούσας αξίας με κυμαινόμενους συντελεστές προεξόφλησης, η οποία βασίζεται σε μια λογαριθμική προσέγγιση της απόδοσης.

Η απόδοση μιας μετοχής ορίζεται ως:

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$1 = \frac{R_{t+1}}{R_{t+1}} = \frac{1}{R_{t+1}} \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}$$

και πολλαπλασιάζοντας και τις δυο πλευρές με P_t / D_t :

$$\frac{P_t}{D_t} = \frac{1}{R_{t+1}} \left(1 + \frac{P_{t+1}}{D_{t+1}} \right) \frac{D_{t+1}}{D_t}$$

Παίρνοντας λογαρίθμους (που συμβολίζονται με μικρά γράμματα), έχουμε:

$$p_t - d_t = -r_{t+1} + \Delta d_{t+1} + \ln(1 + e^{p_{t+1} - d_{t+1}}) \quad (A)$$

Προσεγγίζουμε γραμμικά τον τελευταίο όρο χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση Taylor πρώτου βαθμού γύρω από το σημείο $P/D = e^{p-d}$. Το σημείο αυτό μπορεί να είναι ο δειγματικός μέσος της μερισματικής απόδοσης.

Μια γραμμική προσέγγιση Taylor 1ου βαθμού μιας συνάρτησης $f(x_t)$ γύρω από ένα σημείο x γράφεται:

$$f(x_t) = f(x) + f'(x)(x_t - x)$$

Παίρνοντας μια γραμμική προσέγγιση Taylor του τελευταίου όρου της (A), $f(x) = \ln(1 + e^{p_{t+1} - d_{t+1}})$, έχουμε: $f(x) = \ln(1 + e^{p-d})$ και $f'(x) = \left(\frac{1}{1+e^{p-d}} \right) e^{p-d} = \frac{P/D}{1+(P/D)}$. Κατά συνέπεια, η προσέγγιση 1^{ου} βαθμού γύρω από το μέσο δειγματικό $p-d$ είναι:

$$\begin{aligned} p_t - d_t &= -r_{t+1} + \Delta d_{t+1} + \frac{P/D}{1 + (P/D)} [p_{t+1} - d_{t+1} - (p - d)] \\ &= -r_{t+1} + \Delta d_{t+1} + \rho [p_{t+1} - d_{t+1}] + k \end{aligned}$$

όπου $\rho = \frac{P/D}{1+P/D}$ είναι ένας σταθερός συντελεστής προεξόφλησης ($0 < \rho < 1$) και k μια σταθερά.

Λύνοντας προς τα εμπρός, παίρνουμε:

$$p_t - d_t = \text{const.} + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j (\Delta d_{t+j} - r_{t+j})$$

υπό την προϋπόθεση ότι η φούσκα εξαφανίζεται μακροπρόθεσμα, δηλαδή $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho^j (p_{t+j} - d_{t+j}) = 0$.

Αυτή η ταυτότητα ισχύει ex-post (εκ των υστέρων) και ex-ante (υπό μορφή προσδοκιών).

Παίρνοντας τον δεσμευμένο μέσο της προηγούμενης εξίσωσης, η ex-ante εκδοχή είναι:

$$E_t(p_t - d_t) \equiv p_t - d_t = \text{const.} + E_t \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j (\Delta d_{t+j} - r_{t+j})$$

Η εξίσωση αυτή είναι το υπόδειγμα παρούσας αξίας με κυμαινόμενους συντελεστές προεξόφλησης (πραγματικές αποδόσεις). Πριν προσπαθήσουμε να την επεξηγήσουμε, ας θυμηθούμε ότι η προσέγγιση Taylor έγινε γύρω από το μέσο της μερισματικής απόδοσης. Ο μέσος της μερισματικής απόδοσης περιλαμβάνεται στη σταθερά k της τελευταίας εξίσωσης. Επομένως, σύμφωνα με την τελευταία εξίσωση, όταν ο λόγος της τιμής προς μέρισμα είναι πάνω από το μέσο του, η αγορά αναμένει ότι η μετοχή θα έχει στο μέλλον υψηλούς ρυθμούς μεταβολής των μερισμάτων ή χαμηλές αποδόσεις ή και τα δύο.

Σύμφωνα με το υπόδειγμα παρούσας αξίας με κυμαινόμενους συντελεστές προεξόφλησης:

- Αν αποδόσεις και μεταβολές των μερισμάτων είναι μη προβλέψιμες (τιμές και μερίσματα είναι τυχαίοι περίπατοι), τότε ο λόγος τιμής προς μέρισμα είναι σταθερός.
- Αν ο λόγος τιμής προς μέρισμα είναι κυμαινόμενος στο χρόνο, τότε
 - ο 'Η οι αποδόσεις είναι προβλέψιμες,
 - ο 'Η τα μερίσματα είναι προβλέψιμα.

Με άλλα λόγια, ο λόγος τιμής προς μέρισμα αντανακλά προσδοκίες για μελλοντικά μερίσματα ή/και μελλοντικές αποδόσεις.

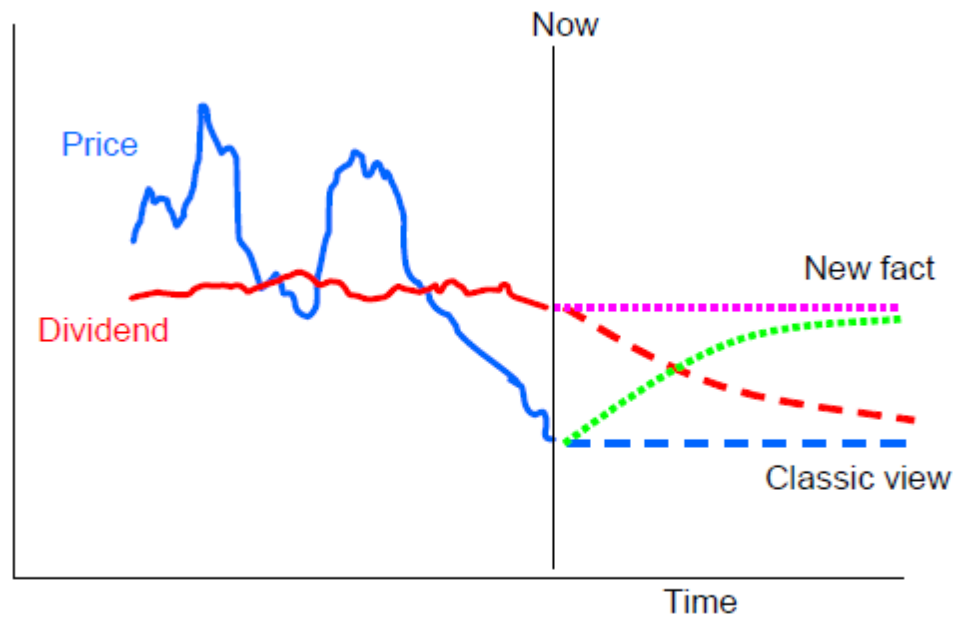
Σημείωση: Μια τρίτη εκδοχή είναι ότι η διακύμανση του λόγου τιμής προς μέρισμα οφείλεται σε κερδοσκοπικές προσδοκίες μελλοντικής αλλαγής της τιμής (κερδοσκοπικές φούσκες) χωρίς να μεταβάλλονται οι προσδοκίες για μελλοντικές αποδόσεις και μερίσματα.

Μια σειρά ερευνητών ισχυρίζονται ότι ο λόγος τιμής προς μέρισμα (ή το P/E) έχουν προβλεπτική ικανότητα για τις μελλοντικές αποδόσεις των μετοχών και όχι για τα μερίσματα.¹ Ο Cochrane (2010) ισχυρίζεται ότι η προβλεπτική ικανότητα του λόγου τιμής προς μέρισμα για μελλοντικές

¹ Βλέπε, μεταξύ άλλων, Rozeff (1984), Keim and Stambaugh (1986), Fama and French (1991), Campbell and Shiller (1989), Cochrane (2008).

αποδόσεις αλλάζει δραματικά τον τρόπο σκέψης στην χρηματοοικονομική.

Το παρακάτω διάγραμμα (από τον Cochrane 2010) δείχνει σχηματικά την αλλαγή στον τρόπο σκέψης. Η κλασική θεώρηση του υποδείγματος προεξόφλησης με σταθερές αναμενόμενες αποδόσεις είναι ότι όταν η τιμή είναι χαμηλή σε σχέση με το μέρισμα, η αγορά προεξοφλεί ότι τα μελλοντικά μερίσματα θα μειωθούν (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή στο διάγραμμα) ενώ οι τιμές θα μείνουν σταθερές (μπλε διακεκομμένη γραμμή).



Η νέα θεώρηση της χρηματοοικονομικής σύμφωνα με τον Cochrane είναι το ακριβώς αντίθετο: όταν η τιμή είναι χαμηλή σε σχέση με το μέρισμα, η αγορά προεξοφλεί ότι οι αποδόσεις (άρα οι τιμές) θα αυξηθούν στο μέλλον (πράσινη διακεκομμένη γραμμή στο διάγραμμα) ενώ τα μερίσματα θα μείνουν σταθερά (μοβ διακεκομμένη γραμμή).

Η προβλεπτική ικανότητα του λόγου τιμής προς μέρισμα. Εμπειρικοί έλεγχοι:

Σύμφωνα με το υπόδειγμα παρούσας αξίας με κυμαινόμενους συντελεστές προεξόφλησης, ο λόγος τιμής προς μέρισμα έχει προβλεπτική ικανότητα για τις μελλοντικές αποδόσεις ή/και για τους μελλοντικούς ρυθμούς μεταβολής των μερισμάτων.

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τον λόγο μερίσματος προς τιμή (D/P) του S&P 500 από το 1871 έως το 2010 (παρόμοια εικόνα προκύπτει χρησιμοποιώντας το E/P).



Ο λόγος D/P υφίσταται μεγάλες διακυμάνσεις στο χρόνο. Οι διακυμάνσεις αυτές έχουν μεγάλη διάρκεια, δηλ. παίρνει αρκετά χρόνια για να επιστρέψει ο λόγος στο μέσο του. Ο ίδιος ο μέσος φαίνεται να μεταβάλλεται διαχρονικά. Μετά τον 2^ο παγκόσμιο πόλεμο ο μέσος είναι χαμηλότερος.



Η προβλεπτική ικανότητα του λόγου τιμής προς μέρισμα μπορεί να ελεγχθεί με τις παρακάτω παλινδρομήσεις:

$$\sum_{j=1}^k \rho^j (\Delta d_{t+j}) = a_d + b_d (p_t - d_t)$$

$$\sum_{j=1}^k \rho^j (r_{t+j}) = a_r + b_r (p_t - d_t)$$

για $k = 1, \dots, K$. Καθώς το ρ είναι λίγο μικρότερο από τη μονάδα (αλλά κοντά στη μονάδα), οι ανεξάρτητες μεταβλητές μπορούν να προσεγγιστούν με την αλλαγή του μερίσματος και της σωρευτικής απόδοσης μεταξύ t και $t + k$:

$$\sum_{j=1}^k \rho^j (\Delta d_{t+j}) \approx \sum_{j=1}^k (\Delta d_{t+j}) = d_{t+k} - d_t,$$

$$\sum_{j=1}^k \rho^j (r_{t+j}) \approx \sum_{j=1}^k (r_{t+j}).$$

Κατά συνέπεια, οι εμπειρικοί έλεγχοι προβλεψιμότητας μπορούν να γίνουν με τις παλινδρομήσεις

$$d_{t+k} - d_t = a_d + b_d (p_t - d_t)$$

$$\sum_{j=1}^k (r_{t+j}) = a_r + b_r (p_t - d_t)$$

- Στις παλινδρομήσεις αυτές ελέγχουμε αν οι συντελεστές b είναι στατιστικά σημαντικοί, δηλ. διαφορετικοί του μηδενός.

- Σημείωση: Γενικά δεν ισχύει $\sum_{j=1}^k (r_{t+j}) = p_{t+k} - p_t$. Το άθροισμα των λογαριθμικών αποδόσεων είναι ίσον με την μεταβολή της τιμής μόνο όταν οι αποδόσεις είναι οι κεφαλαιακές αποδόσεις χωρίς τα μερίσματα. Καθώς η απόδοση έχει ορισθεί ως η ολική απόδοση (συμπεριλαμβανομένων των μερισμάτων), η τελευταία εξίσωση δεν ισχύει (βλέπε επόμενο κεφάλαιο για περαιτέρω ανάλυση αυτού του θέματος).

- Τα αποτελέσματα εμπειρικών ερευνών δείχνουν ότι ο λόγος τιμής προς μέρισμα έχει μακροπρόθεσμα προβλεπτική ικανότητα για τις αποδόσεις και όχι για τα μερίσματα (Fama and French (1991), Campbell and Shiller (1989), Cochrane (2008)).

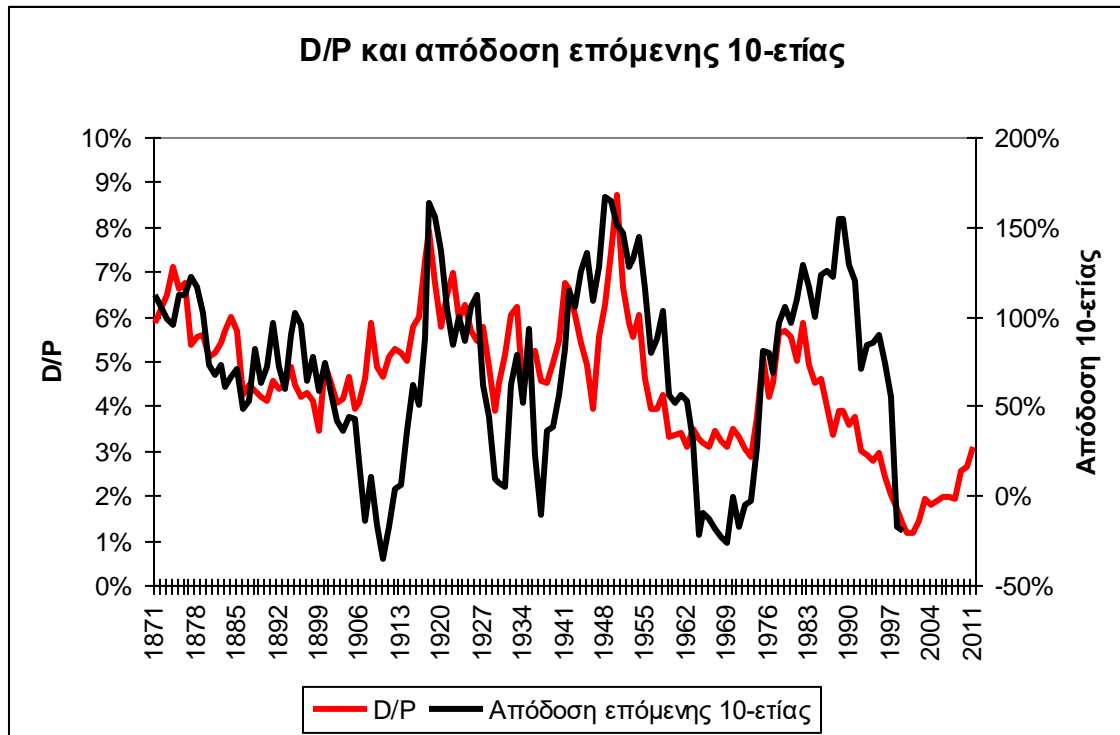
Πίνακας: Παλινδρομήσεις αποδόσεων και μεταβολής μερισμάτων στο δείκτη τιμής προς μερίσματα

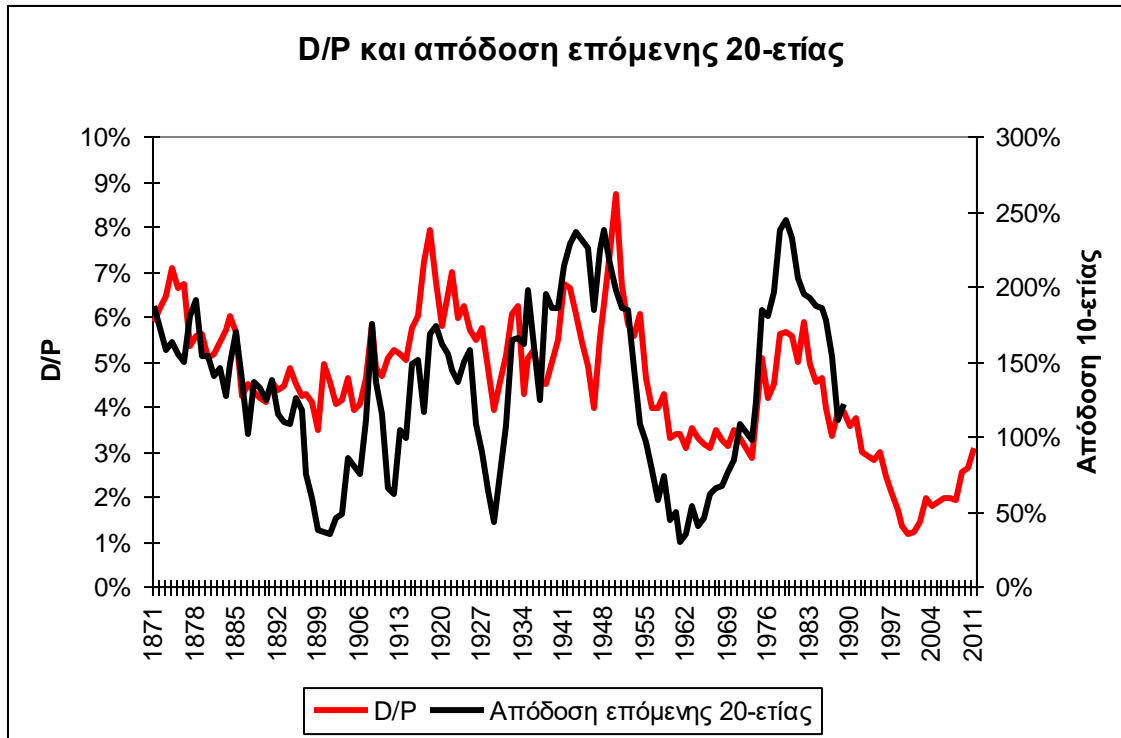
OLS regressions of excess returns and dividend growth on VW P/D ratio						
Horizon k (years)	$R_{t,t+k} = a + b(P_t/D_t)$			$D_{t,t+k}/D_t = a + b(P_t/D_t)$		
	b	$\sigma(b)$	R^2	b	$\sigma(b)$	R^2
1	-1.04	(0.33)	0.17	-0.39	(0.18)	0.07
2	-2.04	(0.66)	0.26	-0.52	(0.40)	0.07
3	-2.84	(0.88)	0.38	-0.53	(0.43)	0.07
5	-6.22	(1.24)	0.59	-0.99	(0.47)	0.15

Notes: $R_{t,t+k}$ indicates the k year return on the value weighted NYSE portfolio less the k year return from continuously reinvesting in Treasury bills; b = regression slope coefficient (defined by the regression equation above); $\sigma(b)$ = standard error of regression coefficient. Standard errors in parentheses use GMM to correct for heteroscedasticity and serial correlation.

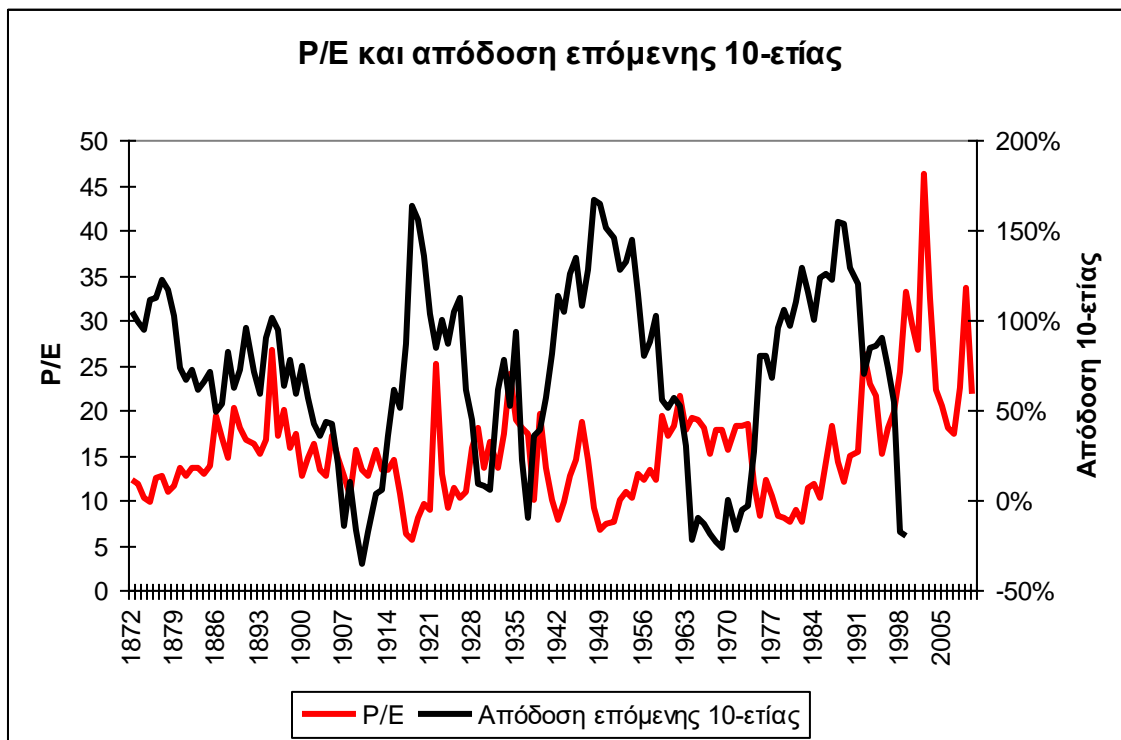
- Τα R^2 της παλινδρόμησης των σωρευτικών αποδόσεων αυξάνουν με τον ορίζοντα και τα b_r είναι αρνητικά (όπως αναμένεται από τη θεωρία) και στατιστικά σημαντικά (καθώς το t-statistic, $t=b/\sigma(b)$, είναι σε απόλυτη τιμή >2).
- Τα R^2 της παλινδρόμησης των σωρευτικών μεταβολών των μερισμάτων είναι μικρά, δεν αυξάνουν με τον ορίζοντα και τα b_d είναι αρνητικά (αντίθετα από τη θεωρία) και στατιστικά μη σημαντικά.
- Ως αποτέλεσμα, καταλήγουμε στον εξής κανόνα, ο οποίος χρησιμοποιείται από τους αναλυτές: όταν ο λόγος τιμής προς μέρισμα (ή το P/E) είναι μεγαλύτερος από το μακροπρόθεσμο μέσο του, τότε οι τιμές αναμένεται να υποχωρήσουν (και αντίθετα).
- **Σημείωση:** Οι παραπάνω παλινδρομήσεις παρουσιάζουν σημαντικά στατιστικά προβλήματα καθώς ο λόγος τιμής προς μέρισμα είναι μια μεταβλητή με μεγάλη εμμονή (persistence), ή με άλλα λόγια μια μεταβλητή με χαρακτηριστικά τυχαίου περίπατου. Κατά συνέπεια, οι συντελεστές της παλινδρόμησης δεν ακολουθούν κανονική κατανομή και οι συνήθεις έλεγχοι σημαντικότητας δεν μπορούν να εφαρμοσθούν. Ακόμη χειρότερα, οι συνήθεις εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων δεν είναι αμερόληπτοι σε μικρά δείγματα καθώς οι διαταραχές των αποδόσεων και του d-p έχουν υψηλή συσχέτιση (Stambaugh 1986, 1999). Συγκεκριμένα, παρουσιάζουν θετική μεροληψία, δηλ. είναι υψηλότεροι από τους πραγματικούς. Επιπλέον, η τυπική απόκλιση των συντελεστών της παλινδρόμησης είναι χαμηλότερη από την πραγματική και το αντίθετο συμβαίνει με το R^2 . Ως αποτέλεσμα, οι συνήθεις εμπειρικοί έλεγχοι μέσω παλινδρομήσεων συχνά δείχνουν ότι οι αποδόσεις είναι προβλέψιμες χωρίς αυτό να ισχύει.
- Ο Valkanov (2003), Journal of Empirical Finance, μεταξύ άλλων, προτείνει διορθωμένες στατιστικές t για τον έλεγχο σημαντικότητας αυτών των παλινδρομήσεων.

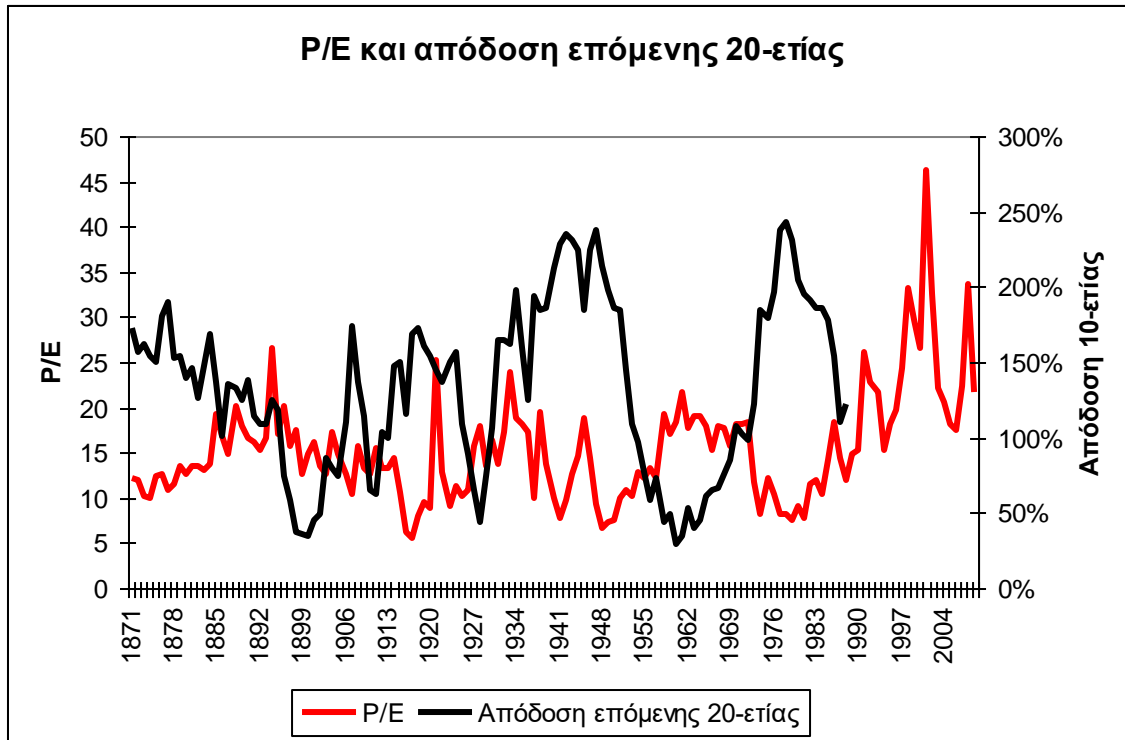
- Διορθώνοντας για τα στατιστικά προβλήματα σε μικρά δείγματα, η προβλεπτική ικανότητα του $r-d$ για τις μελλοντικές αποδόσεις είναι πολύ χαμηλή, τουλάχιστον σε βραχυχρόνιους ορίζοντες 1-5 ετών. Ένα αποτέλεσμα της εμπειρικής βιβλιογραφίας είναι ότι το $r-d$ μπορεί να προβλέψει τις αποδόσεις σε μακροχρόνιους ορίζοντες, 10-20 ετών (Cochrane 2008). Τα παρακάτω διαγράμματα δείχνουν ότι πράγματι υπάρχει κάποια (αν και σχετικά αδύναμη) σχέση μεταξύ του D/P και των αποδόσεων της επόμενης 10-ετίας και 20-ετίας.



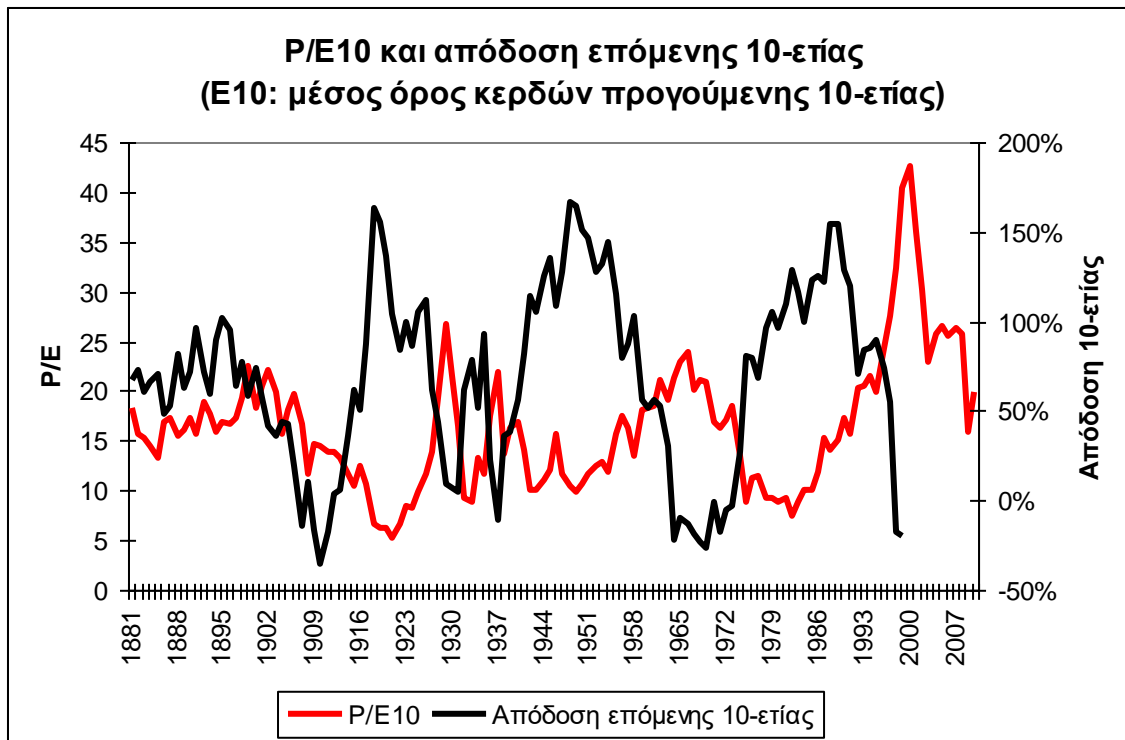


Η εικόνα παραμένει η ίδια όταν χρησιμοποιείται το P/E αντί του D/P όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα.





Ο Shiller προτείνει τον λόγο τιμής προς τα μέσα κέρδη της προηγούμενης 10-ετίας. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ότι ο δείκτης αυτός έχει καλύτερη προβλεπτική ικανότητα για τις μακροχρόνιες αποδόσεις.



Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της εμπειρικής βιβλιογραφίας, μπορούμε να πούμε ότι

- Η μεταβλητότητα του λόγου τιμής προς μέρισμα οφείλεται κατά κύριο λόγο σε αλλαγές των προσδοκιών της αγοράς για τις μελλοντικές αποδόσεις.
- Ο λόγος τιμής προς μέρισμα (ή το αντίστροφό του) και το P/E έχουν προβλεπτική ικανότητα για τις μακροχρόνιες αποδόσεις, όχι για τις βραχυχρόνιες.

Καθώς οι αναμενόμενες πραγματικές αποδόσεις είναι το άθροισμα του αναμενόμενου πραγματικού επιτοκίου μηδενικού κινδύνου και του ασφάλιστρου κινδύνου, η διακύμανση του λόγου τιμής προς μέρισμα αντανακλά αλλαγές των προσδοκιών της αγοράς είτε για τα επιτόκια (νομισματική πολιτική, πληθωρισμός) είτε για τα ασφάλιστρα κινδύνου.

- Αυτό το ερώτημα έχει μελετηθεί εμπειρικά από μια σειρά αναλυτές [βλέπε, μεταξύ άλλων, Campbell and Ammer (1993), EJ για τις ΗΠΑ, Malliaropoulos (1998), European Financial Management για μια σειρά ευρωπαϊκών αγορών]. Τα αποτελέσματα αυτών των μελετών είναι:
- Το μεγαλύτερο μέρος της διακύμανσης του λόγου τιμής προς μέρισμα οφείλεται σε διακύμανση των αναμενόμενων ασφάλιστρων κινδύνου.
- Η διακύμανση των αναμενόμενων ασφάλιστρων κινδύνου οφείλεται σε αλλαγές των προσδοκιών της αγοράς για τα ασφάλιστρα αυτά.

Η σύνδεση των μη αναμενόμενων αλλαγών στις αποδόσεις με τις αλλαγές στις προσδοκίες της αγοράς γίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Αποδόσεις και προσδοκίες της αγοράς

Για να σπάσουμε τις μη αναμενόμενες αποδόσεις σε αλλαγές προσδοκιών της αγοράς για μελλοντικές αποδόσεις και μερίσματα, γράφουμε το υπόδειγμα παρούσας αξίας μια περίοδο πίσω:

$$p_{t-1} - d_{t-1} = const. + E_t \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j (\Delta d_{t+j} - r_{t+j})$$

Παίρνουμε αλλαγές στις προσδοκίες μεταξύ t και $t-1$ (innovations):

$$(E_t - E_{t-1})(p_{t-1} - d_{t-1}) = (E_t - E_{t-1}) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j (\Delta d_{t+j} - r_{t+j})$$

Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι = 0 καθώς

$$E_t(p_{t-1} - d_{t-1}) = E_{t-1}(p_{t-1} - d_{t-1}) = p_{t-1} - d_{t-1}. \text{ Κατά συνέπεια:}$$

$$0 = (E_t - E_{t-1}) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j (\Delta d_{t+j} - r_{t+j})$$

Μεταφέροντας τον όρο $(E_t - E_{t-1})r_t$ στην αριστερή πλευρά, παίρνουμε για τις μη αναμενόμενες αποδόσεις:

$$r_t - E_{t-1}(r_t) = (E_t - E_{t-1}) \left[\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \Delta d_{t+j} \right] - (E_t - E_{t-1}) \left[\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{t+j} \right]$$

Μη αναμενόμενη απόδοση = Νέα πληροφόρηση για μελλοντικά μερίσματα

- Νέα πληροφόρηση για μελλοντικές αποδόσεις

Ένα θετικό σοκ στις αποδόσεις (δηλαδή μια πραγματοποίηση πάνω από τις προσδοκίες) οφείλεται

- Είτε σε μια αλλαγή προς τα πάνω των αναμενόμενων ρυθμών μεταβολής των μερισμάτων,
- Είτε σε μια αλλαγή προς τα κάτω των αναμενόμενων αποδόσεων,
- Είτε και στα δύο.

Καθώς η πραγματική απόδοση είναι το άθροισμα του αναμενόμενου πραγματικού επιτοκίου μηδενικού κινδύνου και του ασφάλιστρου κινδύνου, μη αναμενόμενες αλλαγές των αποδόσεων μπορούν να σπάσουν σε

- Νέα πληροφόρηση για μελλοντικά επιτόκια μηδενικού κινδύνου και
- Νέα πληροφόρηση για μελλοντικά ασφάλιστρα κινδύνου: $(E_t - E_{t-1})[\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{t+j}^e] = (E_t - E_{t-1})[\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{t+j}^f] + (E_t - E_{t-1})[\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{t+j}^e]$

Όπου r_t^f είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και r_t^e είναι το ασφάλιστρο κινδύνου.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο υποστηρίξαμε ότι, σύμφωνα με τα εμπειρικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας, το μεγαλύτερο μέρος της διακύμανσης των τιμών οφείλεται στη διακύμανση των αναμενόμενων αποδόσεων. Τώρα μπορούμε να απαντήσουμε στο πιο συγκεκριμένο ερώτημα αν η διακύμανση των τιμών οφείλεται στη διακύμανση των αναμενόμενων επιτοκίων ή στη διακύμανση των αναμενόμενων ασφάλιστρων κινδύνου.

- Οι Campbell (1991) EJ, Campbell και Ammer (1993), EJ, και Malliaropoulos (1998), European Financial Management, μεταξύ άλλων, βρίσκουν ότι το μεγαλύτερο μέρος της διακύμανσης του λόγου τιμής προς μέρισμα οφείλεται σε διακύμανση των αναμενόμενων ασφάλιστρων κινδύνου και όχι σε διακύμανση των μερισμάτων ή σε διακύμανση των πραγματικών επιτοκίων.

Τιμές, αποδόσεις και μερισματικές αποδόσεις:

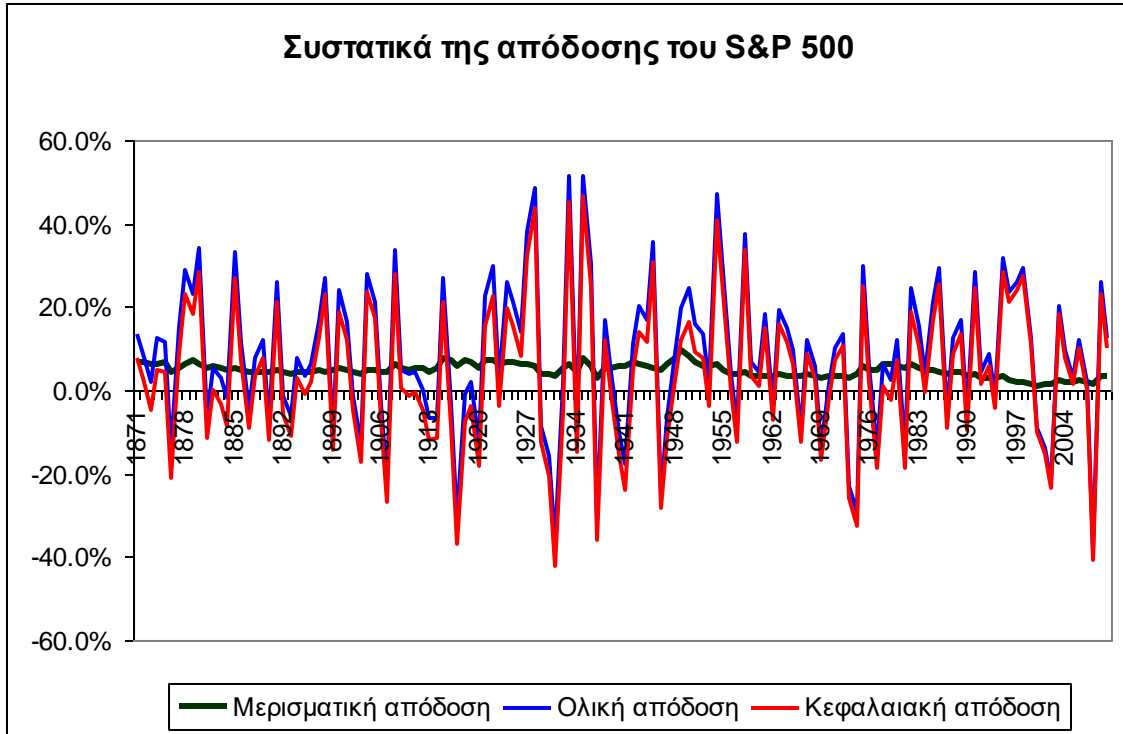
Μια εναλλακτική ερμηνεία / «τρίτη άποψη»

Νεότερες μελέτες (Malliaropoulos & Priestley (2011): Stock prices, returns and dividend yields), επανεξετάζουν την προβλεπτική ικανότητα του λόγου μερίσματος προς τιμή για τις μελλοντικές αποδόσεις χρηματιστηριακών δεικτών και συμπεραίνουν ότι ο λόγος μερίσματος προς τιμή δεν έχει προβλεπτική ικανότητα για τις μελλοντικές τιμές των μετοχών παρά μόνο για τις μερισματικές αποδόσεις. Η ανάλυση στηρίζεται στην παρατήρηση ότι η απόδοση αποτελείται από δυο κομμάτια, την κεφαλαιακή απόδοση (ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της μετοχής) και την μερισματική απόδοση.

$$R_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t} + \frac{D_{t+1}}{P_t}$$

1+Απόδοση = (1+κεφαλαιακή απόδοση) + (μερισματική απόδοση)

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει την συνολική απόδοση του S&P 500 και τα συστατικά της. Σε αντίθεση με την κεφαλαιακή απόδοση, η μερισματική απόδοση έχει πολύ χαμηλή μεταβλητότητα.



Γράφοντας την απόδοση ως $R_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t} \left(1 + \frac{D_{t+1}}{P_{t+1}} \right)$ και παίρνοντας λογαρίθμους, έχουμε

$$r_{t-1} = \Delta p_{t+1} + (1 - \rho)(d_{t+1} - p_{t+1}) + k$$

Όπου Δp_{t+1} είναι η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής (κεφαλαιακή απόδοση), $(1 - \rho)(d_{t+1} - p_{t+1})$ είναι μια προσέγγιση της μερισματικής απόδοσης (ρ και k δυο σταθερές με $\rho = 1/(1+(D/P)) < 1$, D/P : μέση μερισματική απόδοση).

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα στατιστικά χαρακτηριστικά των αποδόσεων. Η μέση μερισματική απόδοση είναι 60% της συνολικής απόδοσης και έχει την χαμηλότερη τυπική απόκλιση. Η μερισματική απόδοση είναι το κομμάτι της απόδοσης με το χαμηλότερο ρίσκο για τους επενδυτές. Κατά συνέπεια, είναι το «πλέον προβλέψιμο» κομμάτι της απόδοσης και έχει αξία για επενδυτές που αποστρέφονται τον κίνδυνο.

Ετήσιες αποδόσεις S&P 500 1926-2004

	Μέσος	Τυπική απόκλιση	Min	Max
Συνολική απόδοση	6.60%	19.80%	-49%	44.50%
Κεφαλαιακή απόδοση	2.60%	20%	-55%	40.60%
Μερισματική απόδοση	4%	1.40%	1.10%	6.90%

Καθώς μπορούμε να γράψουμε την απόδοση ως $r_{t+1} = \Delta p_{t+1} + (1 + \rho)(d_{t+1} - p_{t+1}) + k$, η μερισματική απόδοση είναι μια γραμμική συνάρτηση του λόγου μερίσματος προς τιμή. Καθώς ο λόγος μερίσματος προς τιμή έχει υψηλή αυτοσυσχέτιση, έχει προβλεπτική ικανότητα για την μερισματική απόδοση. Για παράδειγμα, αν το $d-p$ ακολουθεί ένα αυτοπαλινδρομο σχήμα

$$d_{t+1} - p_{t+1} = \phi(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1},$$

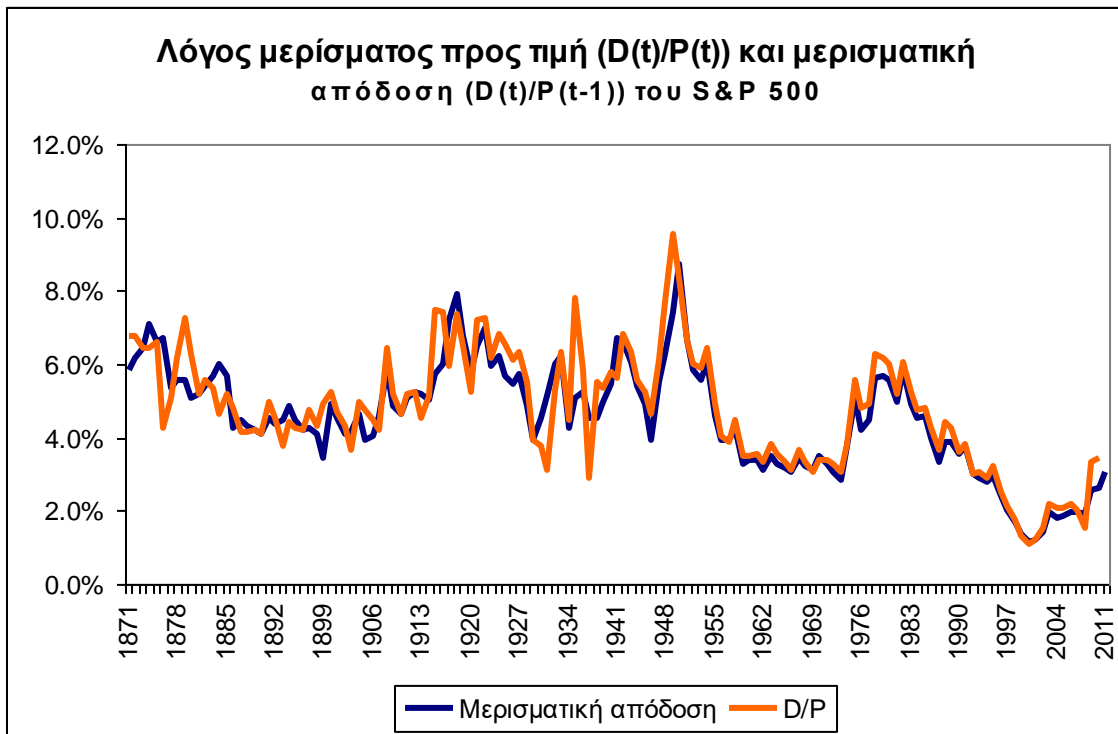
η αναμενόμενη απόδοση είναι

$$E_t(r_{t+1}) = E_t(\Delta p_{t+1}) + (1 - \rho)\phi(d_t - p_t) + k.$$

Κατά συνέπεια, μια παλινδρόμηση της συνολικής απόδοσης πάνω σε παρελθούσες τιμές του λόγου μερίσματος προς τιμή ($d-p$) δείχνει προβλεπτική ικανότητα για τις αποδόσεις ακόμη και αν η μεταβολή της τιμής (κεφαλαιακή απόδοση) είναι μη προβλέψιμη με βάση το $d-p$, δηλ.

$E_t(\Delta p_{t+1}) = 0$, επειδή έχει υψηλή συσχέτιση με την μερισματική απόδοση.

Η στενή συσχέτιση της μερισματικής απόδοσης με το D/P φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Η συσχέτιση είναι υψηλή και φαίνεται να αυξάνεται μετά το 1945. Επιπλέον, οι δυο σειρές έχουν μεγάλη αυτοσυσχέτιση, δηλ. είναι κοντά στη στοχαστική διαδικασία ενός τυχαίου περιπάτου. Αυτό σημαίνει ότι παρελθούσες τιμές του D/P έχουν προβλεπτική ικανότητα για την μερισματική απόδοση.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα αποτελέσματα απλών παλινδρομήσεων των πραγματικών (δηλ. αποπληθωρισμένων) αποδόσεων και της μεταβολής των αποπληθωρισμένων μερισμάτων στον λόγο μερίσματος προς τιμή ($d-p$, σε λογαρίθμους) της προηγούμενης περιόδου.

Table 2: Predictive regressions

Panel A: Not bias corrected				
Regression	b	$t - stat.$	R^2	$S.E.$
$r_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.097	1.92	4.0%	0.197
$\Delta d_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.007	0.17	0.0%	0.141
$\Delta p_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.066	1.29	1.8%	0.200
$r_{t+1} - \Delta p_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.030	14.20	77.0%	0.007
$d_{t+1} - p_{t+1} = \varphi [d_t - p_t] + \varepsilon_{t+1}^{dp}$	0.941	20.20	86.0%	0.154

Panel B: Bias corrected				
Regression	b	$t - stat.$	$\frac{\widehat{cov}(\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+1}^{dp})}{\widehat{var}(\varepsilon_{t+1}^{dp})}$	
$r_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.053	0.97	-0.89	
$\Delta p_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.021	0.37	-0.93	
$r_{t+1} - \Delta p_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.032	17.00	0.037	
$\Delta d_{t+1} = a + b(d_t - p_t) + \varepsilon_{t+1}$	0.011	0.28	0.068	
$d_{t+1} - p_{t+1} = \varphi [d_t - p_t] + \varepsilon_{t+1}^{dp}$	0.991	23.00	-	

Data are annual observations over the period 1926-2004 from the CRSP data tape. r_{t+1} is the real log return including dividends, Δp_{t+1} is the real log return without dividends (capital gain), $r_{t+1} - \Delta p_{t+1}$ is the dividend yield component of the real return, Δd_{t+1} is real dividend growth and $d_{t+1} - p_{t+1}$ is the log dividend-price ratio.

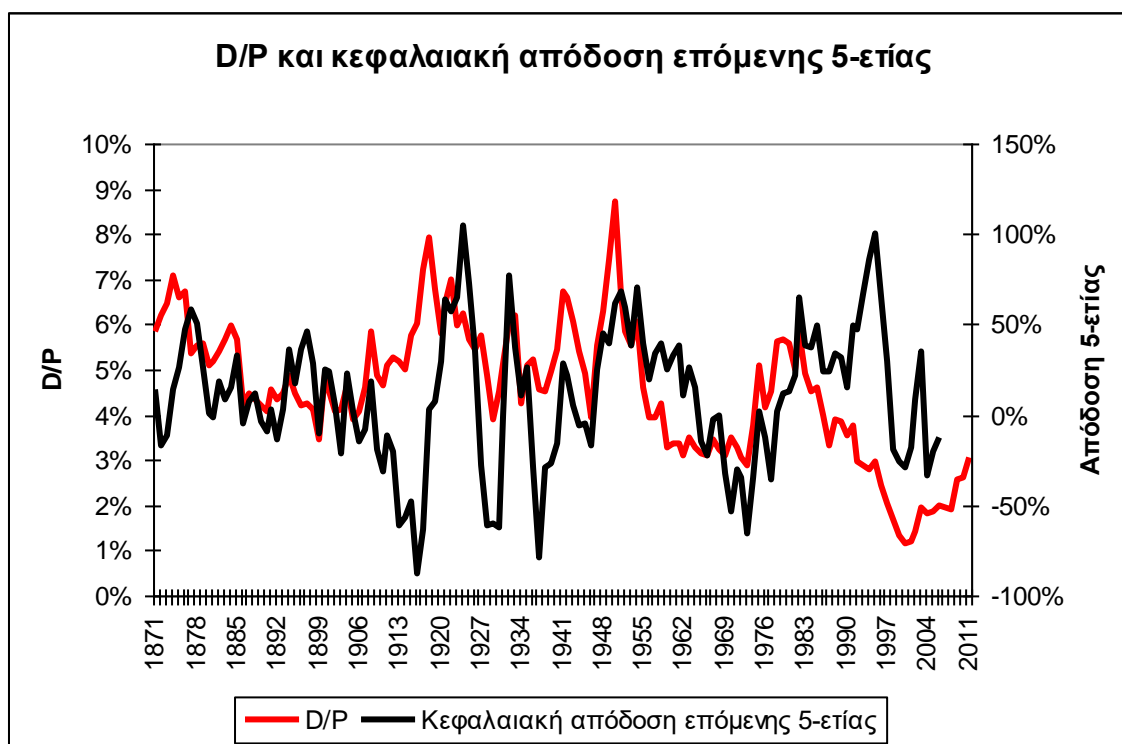
Συμπεράσματα από τον πίνακα:

Το $d-p$ φαίνεται να έχει κάποια προβλεπτική ικανότητα για τις συνολικές αποδόσεις (1^η σειρά του Panel A). Το $d-p$ δεν έχει προβλεπτική ικανότητα για τη μεταβολή των μερισμάτων (2^η σειρά του Panel A). Το $d-p$ δεν έχει προβλεπτική ικανότητα για την κεφαλαιακή απόδοση (3^η σειρά του Panel A). Το $d-p$ έχει ισχυρή προβλεπτική ικανότητα για την μερισματική απόδοση (4^η σειρά του Panel A). Τα αποτελέσματα αυτά είναι ακόμη πιο δυνατά με στατιστικές διορθώσεις για το μικρό μέγεθος του δείγματος (Panel B).

Με τη χρήση προσομοιώσεων Monte Carlo, η μελέτη Malliaropoulos & Priestley (2011) δείχνει ότι η πιθανότητα να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση της μη προβλεψιμότητας των αποδόσεων των μετοχών είναι τόσο ψηλότερη όσο μεγαλύτερη είναι η μέση μερισματική απόδοση και όσο υψηλότερος είναι ο βαθμός εμμονής του λόγου μερίσματος προς τιμή. Με βάση τις εμπειρικές εκτιμήσεις των παραμέτρων αυτών από τα εμπειρικά δεδομένα (μέση μερισματική απόδοση = 4%,

βαθμός εμμονής $d-p = 0,94 - 0,99$), η μελέτη δείχνει ότι κλασσικές προσομοιώσεις Monte Carlo, στις οποίες οι τιμές των μετοχών είναι τυχαίοι περίπατοι, δηλ. μη προβλέψιμες, παράγουν δεδομένα στα οποία οι συντελεστές παλινδρόμησης των αποδόσεων στο λόγο μερίσματος προς τιμή είναι πολύ κοντά στις εκτιμήσεις της βιβλιογραφίας ($\sim 0,10$).

Κατά συνέπεια, συμπεραίνουμε ότι τα ευρήματα της βιβλιογραφίας σχετικά με την ικανότητα του λόγου μερίσματος προς τιμή να προβλέπει μελλοντικές αποδόσεις δεν αντανακλούν προβλεψιμότητα των τιμών των μετοχών αλλά προβλεψιμότητα των μελλοντικών μερισματικών αποδόσεων. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ότι ο λόγος μερίσματος προς τιμή είχε στο παρελθόν υψηλή προβλεπτική ικανότητα για τις μερισματικές αποδόσεις των επόμενων 5 ετών αλλά όχι για την μεταβολή των τιμών των μετοχών στα επόμενα 5 έτη. Η ίδια εικόνα ισχύει και για ορίζοντες 2 ετών καθώς επίσης και για μακροχρόνιους ορίζοντες 7-10 ετών.





Τα ευρήματα αυτά έχουν σημαντικές συνέπειες για την ερμηνεία του υποδείγματος παρούσας αξίας, τον τρόπο λειτουργίας των αγορών και την αποτίμηση αξιογράφων. Στο υπόδειγμα παρούσας αξίας προκύπτει ένας τρίτος παράγοντας, πέρα από τις προεξοφλημένες μελλοντικές αποδόσεις και τα προεξοφλημένα μερίσματα. Συγκεκριμένα, ο λόγος τιμής προς μέρισμα αντανακλά τρεις παράγοντες. 1. Προσδοκίες για μελλοντικά μερίσματα. 2. Προσδοκίες για μελλοντικές κεφαλαιακές αποδόσεις και 3. Προσδοκίες για μελλοντικές μερισματικές αποδόσεις. Όσο πιο κοντά είναι ο λόγος τιμής προς μέρισμα σε έναν τυχαίο περίπατο, τόσο μεγαλύτερο ποσοστό της διακύμανσής του οφείλεται σε προσδοκίες για τον ίδιο του τον εαυτό.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι τι μας λέει τελικά ο λόγος D/P για τις προσδοκίες της αγοράς σύμφωνα με το υπόδειγμα παρούσας αξίας. Ας υποθέσουμε ότι η τιμή σήμερα πέφτει απότομα και ο λόγος D/P αυξάνει πάνω από τον ιστορικό μέσο του. Ας υποθέσουμε ότι η τιμή αυτή είναι μια τιμή ισορροπίας, δηλ. αντανακλά πλήρως τις προσδοκίες της αγοράς για τις μελλοντικές τιμές, τα μελλοντικά μερίσματα και τις μελλοντικές αποδόσεις. Το σημαντικό ερώτημα είναι, γιατί είναι διατεθειμένοι οι επενδυτές να κρατήσουν το χαρτοφυλάκιο αγοράς στη χαμηλότερη τιμή; Ποιες είναι οι απαντήσεις της χρηματοοικονομικής στο ερώτημα αυτό; Σύμφωνα με την **κλασική θεώρηση** (σταθερές αναμενόμενες αποδόσεις), διότι περιμένουν ότι το μέρισμα θα μειωθεί στο μέλλον. Άρα η χαμηλότερη τιμή αντανακλά προσδοκίες για χαμηλότερα μερίσματα. Χαμηλότερα μερίσματα στο μέλλον μειώνουν τις τιμές σήμερα. Στη θεώρηση αυτή, η τιμή είναι τυχαίος περίπατος, δηλ. μη προβλέψιμη. Ενώ τα μερίσματα είναι προβλέψιμα.

Πρόβλημα: Αυτό όμως σημαίνει ότι, με σταθερούς συντελεστές προεξόφλησης, η τιμή ακολουθεί την ίδια στοχαστική διαδικασία με το μέρισμα. Άρα δεν μπορεί να είναι τυχαίος περίπατος.

Σύμφωνα με την **νέα θεώρηση** του Cochrane (προβλέψιμες κυμαινόμενες αποδόσεις), οι επενδυτές κρατούν το χαρτοφυλάκιο αγοράς στη χαμηλότερη τιμή διότι περιμένουν ότι η τιμή θα αυξηθεί στο μέλλον. Η χαμηλότερη τιμή σήμερα αντανακλά προσδοκίες για υψηλότερες αποδόσεις στο μέλλον, άρα υψηλότερες τιμές. Οι επενδυτές προσδοκούν υψηλή κεφαλαιακή απόδοση.

Σύμφωνα με την **εναλλακτική ερμηνεία** των Malliaropoulos & Priestley, οι επενδυτές κρατούν τις μετοχές στη χαμηλότερη τιμή διότι περιμένουν ότι θα τους δώσουν υψηλές μερισματικές αποδόσεις στο μέλλον, όχι απαραίτητα υψηλές κεφαλαιακές αποδόσεις. Στους επενδυτές αρέσουν οι μερισματικές αποδόσεις διότι έχουν χαμηλό ρίσκο: η διακύμανσή τους είναι πολύ χαμηλή σε σχέση με την διακύμανση των κεφαλαιακών αποδόσεων. Κατά συνέπεια, όταν οι τιμές πέφτουν σήμερα ενώ τα μερίσματα παραμένουν σχετικά σταθερά, οι επενδυτές προβλέπουν ότι οι μερισματικές αποδόσεις θα παραμείνουν υψηλές στο μέλλον. Αυτό κάνει τις μετοχές ελκυστικές και τους επενδυτές διατεθειμένους να τις κρατήσουν στις χαμηλότερες τιμές. Ο λόγος μερίσματος προς τιμή δεν προβλέπει ούτε το μέρισμα (όπως θεωρεί η κλασική άποψη) ούτε την τιμή (όπως θεωρεί η νέα άποψη) αλλά κυρίως τον ίδιο του τον εαυτό και, κατά συνέπεια, την μελλοντική μερισματική απόδοση.

Κεφάλαιο 3: Το υπόδειγμα του καταναλωτή και ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης

- Στο βασικό υπόδειγμα καταναλωτή (Consumption Capital Asset Pricing Model, CCAPM), οι τιμές (και κατά συνέπεια οι αποδόσεις) κεφαλαιακών στοιχείων καθορίζονται ως η λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης της χρησιμότητας ενός καταναλωτή- επενδυτή.
- Η κεντρική εξίσωση αποτίμησης ορίζει την τιμή ενός κεφαλαιακού στοιχείου ως την αναμενόμενη μελλοντική αξία, με συντελεστή προεξόφλησης την οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης.
- Ο καταναλωτής μπορεί να καταναλώσει όλο του το εισόδημα ή να καταναλώσει λίγο λιγότερο, να επενδύσει ένα ποσοστό του εισοδήματος σε ένα κεφαλαιακό στοιχείο και να καταναλώσει το πόσο της επένδυσης συν την απόδοση (payoff) στο μέλλον.
- Η τιμή ισορροπίας ενός κεφαλαιακού στοιχείου καθορίζεται από της εξής συνθήκη: η μείωση της οριακής χρησιμότητας από την αγορά μιας επιπλέον μονάδας κεφαλαιακού στοιχείου πρέπει να είναι ίση με την αναμενόμενη αύξηση προεξοφλημένης χρησιμότητας από την μελλοντική κατανάλωση του payoff.
- Αν η τιμή δεν ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη, τότε ο καταναλωτής πρέπει να συνεχίζει να αγοράζει ή να πουλάει το κεφαλαιακό στοιχείο μέχρι να την ικανοποιήσει.
- Σκοπός του καταναλωτή είναι να εξασφαλίσει ένα σταθερό ποσό κατανάλωσης στο χρόνο, με άλλα λόγια, να μειώσει την διακύμανση της κατανάλωσης (υπόθεση ισόβιου εισοδήματος, permanent income hypothesis).
- Αυτό μπορεί να το πετύχει κρατώντας ένα κεφαλαιακό στοιχείο του οποίου οι αποδόσεις παρουσιάζουν χαμηλή (ιδανικά, αρνητική) συσχέτιση με την κατανάλωση (= εισόδημα ή ΑΕΠ σε όρους της μακροοικονομίας).
- Με τον τρόπο αυτό, ο επενδυτής μπορεί να αυξήσει την κατανάλωση όταν το εισόδημα του πέφτει λόγω μιας μη προβλέψιμης οικονομικής ύφεσης.
- Ο κεντρικός ρόλος των κεφαλαιακών στοιχείων έγκειται στο ότι, υπό τις παραπάνω συνθήκες, σταθεροποιούν την κατανάλωση διαχρονικά. Με άλλα λόγια, λειτουργούν ως ασφάλεια για περιπτώσεις ανάγκης στις οποίες το εισόδημα μας μειώνεται απρόβλεπτα λόγω εξωγενών παραγόντων.
- Δεδομένου ότι τα κεφαλαιακά στοιχεία έχουν υψηλές αποδόσεις σε κάποιες φάσεις του οικονομικού κύκλου και χαμηλές αποδόσεις σε κάποιες άλλες, θα θέλαμε να κρατάμε επενδύσεις οι οποίες έχουν υψηλές αποδόσεις όταν το εισόδημα μας (και κατά συνέπεια, η κατανάλωση μας) είναι χαμηλό(ή).
- Για το λόγο αυτό είμαστε διατεθειμένοι να πληρώσουμε μια υψηλότερη τιμή για μια επένδυση της οποίας η αναμενόμενη απόδοση έχει χαμηλότερη ή και αρνητική συσχέτιση με την κατανάλωση (εισόδημα).
- Κατά συνέπεια, το ασφάλιστρο κινδύνου ενός αξιογράφου πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου καθορίζεται από την συσχέτιση της απόδοσης του αξιογράφου με τον ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης. Συγκεκριμένα, το ασφάλιστρο κινδύνου είναι θετική συνάρτηση αυτής της

συσχέτισης.

Το βασικό υπόδειγμα καταναλωτή με δυο περιόδους

- Ποια είναι η αξία της μελλοντικής πληρωμής, X_{t+1} , ενός τίτλου τον οποίο αγοράζει ο επενδυτής κατά την περίοδο t με σκοπό να τον ρευστοποιήσει την περίοδο $t+1$;
 - ο Αν, για παράδειγμα, ο τίτλος αυτός είναι μια μετοχή, τότε η πληρωμή (payoff) του τίτλου την επόμενη περίοδο είναι το μέρισμα D_{t+1} συν η τιμή, P_{t+1} , στην οποία ρευστοποιείται η μετοχή:
$$X_{t+1} = P_{t+1} + D_{t+1}$$
 - ο Το X_{t+1} είναι μια τυχαία μεταβλητή, δηλ. υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την μελλοντική αξία του τίτλου.
- Για να υπολογίσουμε την αξία X_{t+1} ενός τίτλου για τον επενδυτή πρέπει να ορίσουμε το πρόβλημα του επενδυτή.
- Η συνάρτηση χρησιμότητας ενός επενδυτή, U , εξαρτάται από την σημερινή και μελλοντική του κατανάλωση, C :

$$U(C_t, C_{t+1}) = u(C_t) + \beta E_t[u(C_{t+1})]$$

όπου $0 < \beta < 1$ είναι ο υποκειμενικός συντελεστής προεξόφλησης του επενδυτή και $E_t(u)$ είναι η δεσμευμένη μαθηματική ελπίδα του u δεδομένης της πληροφόρησης έως την περίοδο t .

- Η χρησιμότητα $u(\cdot)$ είναι θετική αλλά φθίνουσα συνάρτηση της κατανάλωσης, δηλαδή $u' > 0$, $u'' < 0$.
- Η μελλοντική κατανάλωση έχει μικρότερη χρησιμότητα από την σημερινή, για αυτό και προεξοφλείται σε όρους σημερινής χρησιμότητας με συντελεστή $\beta < 1$.

- Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο επενδυτής :
 - ο Έχει εξωγενές εισόδημα Y_t and Y_{t+1}
 - ο Μπορεί να αγοράσει ή να πουλήσει έναν τίτλο στην τιμή P_t ο οποίος του δίνει ένα payoff $X_{t+1} = P_t(1 + r_{t+1}) = P_t R_{t+1}$, όπου R_{t+1} είναι η (ακαθάριστη) απόδοση του τίτλου.
 - Τι ποσότητα ξ του τίτλου θα αγοράσει ή (θα πουλήσει);

Το πρόβλημα έχει την εξής μαθηματική δομή:

$$\begin{aligned} \max_{\xi} U &= [u(C_t) + \beta E_t[u(C_{t+1})]] \\ \text{s.t. } C_t &= Y_t - P_t \xi \\ C_{t+1} &= Y_{t+1} + X_{t+1} \xi \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τους περιορισμούς και θέτοντας την παράγωγο της U ως προς το ξ ίση με το μηδέν, βρίσκουμε τη συνθήκη άριστης κατανάλωσης :

$$P_t u'(C_t) = E_t[\beta u'(C_{t+1}) X_{t+1}] \quad (1)$$

- $P_t u'(C_t)$: οριακή μείωση χρησιμότητας από την αγορά μιας επιπλέον μονάδας τίτλων.
- $E_t[\beta u'(C_{t+1})X_{t+1}]$: οριακή αύξηση (αναμενόμενης, προεξοφλημένης) χρησιμότητας από το payoff του τίτλου. Η σχέση (1) μπορεί να γραφεί ως :

$$P_t = E_t \left[\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} X_{t+1} \right] \quad (2)$$

- Η σχέση (2) είναι η κεντρική φόρμουλα αποτίμησης .
- Δεδομένου του payoff, του συντελεστή προεξόφλησης και της οριακής χρησιμότητας, η σχέση (2) καθορίζει την τιμή την οποία ο επενδυτής είναι διατεθειμένος να πληρώσει για τον τίτλο.

Οριακός λόγος υποκατάστασης και στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης

Ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης (stochastic discount factor, SDF) μπορεί να οριστεί ως εξής :

$$M_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} \quad (3)$$

Σύμφωνα με την (3), στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης είναι ίσος με τον οριακό λόγο υποκατάστασης μεταξύ παρούσας και μελλοντικής κατανάλωσης (μεταβολή οριακής χρησιμότητας μεταξύ t και t+1).

Η κεντρική φόρμουλα αποτίμησης μπορεί να γραφτεί:

$$P_t = E_t(M_{t+1}X_{t+1}) \quad (4)$$

Σημείωση 1: Ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης SDF είναι μια σταθερά β όταν η χρησιμότητα είναι γραμμική συνάρτηση της κατανάλωσης γιατί τότε η οριακή χρησιμότητα είναι σταθερή. Για παράδειγμα, εάν $u_t = a + bC_t$, τότε $u'(C_t) = u'(C_{t+1}) = b$ και

$M_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \beta \frac{b}{b} = \beta$. Κατά συνέπεια, στην περίπτωση αυτή, το υπόδειγμα του καταναλωτή περιορίζεται στο γνωστό υπόδειγμα παρούσας αξίας με σταθερό συντελεστή προεξόφλησης, $P_t = \beta E_t(X_{t+1})$.

Για να ορίσουμε την P_t πιο συγκεκριμένα, πρέπει να συγκεκριμενοποιήσουμε την συνάρτηση χρησιμότητας.

Συχνά χρησιμοποιούμε εκθετική χρησιμότητα (power utility):

$$u(C_t) = \frac{1}{(1-\gamma)} C_t^{(1-\gamma)} \quad (5)$$

με γ τον σταθερό συντελεστή σχετικής αποστροφής κινδύνου του καταναλωτή-επενδυτή (CRRA):

constant relative risk aversion). Παίρνοντας την παράγωγο της (5), η οριακή χρησιμότητα είναι $u'(C_t) = C_t^{-\gamma}$. Επομένως, $\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}$ και από την (3) έχουμε :

$$M_{t+1} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}$$

Σημείωση 2: Διαιρώντας την (4) με την τιμή P_t , και ορίζοντας την απόδοση του τίτλου ως:

$$R_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{P_t},$$

η κεντρική φόρμουλα αποτίμησης μπορεί να γραφτεί σε όρους αποδόσεων αντί τιμών:

$$1 = E_t(M_{t+1}R_{t+1}) \quad (6)$$

- Σύμφωνα με την (6), η παρούσα αξία ενός ευρώ που επενδύουμε σήμερα σε ένα αξιόγραφο ισούται με την αναμενόμενη απόδοση του προεξοφλημένη με τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης M_{t+1} .
- Με άλλα λόγια, όταν ο καταναλωτής έχει κάνει τις επενδυτικές του επιλογές και βρίσκεται σε ισορροπία, η αξία ενός ευρώ που καταναλώνεται σήμερα (=1 EUR) πρέπει να είναι ίση με την αξία ενός ευρώ που αποταμιεύεται και καταναλώνεται στο μέλλον.

• Αν η χρησιμότητα είναι γραμμική συνάρτηση της κατανάλωσης, τότε, όπως δείξαμε στη **Σημείωση 1**, $M = \beta$, και η (6) γίνεται $\beta = \frac{1}{E_t(R_{t+1})} = \frac{1}{R}$, η οποία είναι ο γνωστός ορισμός του σταθερού συντελεστή προεξόφλησης. Στην περίπτωση αυτή, η αναμενόμενη απόδοση του τίτλου είναι σταθερά.

Το υπόδειγμα καταναλωτή με δεδομένο αρχικό πλούτο

Στο προηγούμενο υπόδειγμα υποθέσαμε ότι ο καταναλωτής έχει ένα εξωγενές εισόδημα το οποίο κατανέμει μεταξύ κατανάλωσης και αποταμίευσης με σκοπό την μεγιστοποίηση της χρησιμότητάς του. Εναλλακτικά μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο επενδυτής γεννιέται με πλούτο W_0 και δεν έχει εισόδημα από εργασία. Κατά συνέπεια, καταναλώνει στη διάρκεια της ζωής του τον πλούτο που έχει κληρονομήσει. Ο επενδυτής καταναλώνει τη περίοδο t ένα ποσό C_t του πλούτου του και επενδύει τον εναπομένοντα πλούτο σε ένα αξιόγραφο (το χαρτοφυλάκιο πλούτου). Κατά συνέπεια, ο πλούτος τη περίοδο $t+1$ είναι: $W_{t+1} = R_{t+1}^w(W_t - C_t)$, όπου R_{t+1}^w είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου.

Υποθέτουμε ότι ο επενδυτής μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα του σε 2 περιόδους με τον διαχρονικό περιορισμό του πλούτου:

$$\begin{aligned} \max_{C_t, C_{t+1}} U(C) &= u(C_t) + \beta E_t u(C_{t+1}) \\ \text{s.t.} : W_{t+1} &= R_{t+1}^w(W_t - C_t) \end{aligned}$$

Την τελευταία περίοδο, ο καταναλωτής καταναλώνει το υπόλοιπο του πλούτου του, $C_{t+1} = W_{t+1}$. Αντικαθιστώντας τον περιορισμό του πλούτου στην συνάρτηση χρησιμότητας, μετατρέπουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης σε

$$\max_{C_t} U = \max_{C_t} \{u(C_t) + \beta E_t [u(R_{t+1}^w (W_t - C_t))]\}$$

Η συνθήκη πρώτης τάξης του προβλήματος αυτού είναι:

$$-u'(C_t) + \beta E_t (u'(C_{t+1}) R_{t+1}^w) = 0.$$

Διασκευάζοντας την τελευταία εξίσωση, παίρνουμε για το χαρτοφυλάκιο πλούτου:

$$E_t \left(\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} R_{t+1}^w \right) = 1.$$

Η εξίσωση αυτή πρέπει να ισχύει για κάθε αξιόγραφο i . Κατά συνέπεια:

$$E_t \left(\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} R_{t+1}^i \right) = 1.$$

Επίσης, η συνθήκη αυτή πρέπει να ισχύει για όλα τα αξιόγραφα. Έτσι, για ένα σετ K αξιόγραφων με $(K \times 1)$ διάνυσμα αποδόσεων R_{t+1} :

$$E_t \left(\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} R_{t+1} \right) = i_k$$

όπου i_k το $(K \times 1)$ μοναδιαίο διάνυσμα.

Το Υπόδειγμα παρούσας αξίας με στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης

Για να συνδέσουμε τη φόρμουλα αυτή με το υπόδειγμα παρούσας αξίας του προηγούμενου κεφαλαίου, αρκεί να θυμηθούμε τον ορισμό του payoff ως: $X_{t+1} = P_{t+1} + D_{t+1}$.

Αντικαθιστώντας στη (2), έχουμε μια διαφορική συνάρτηση πρώτου βαθμού ως προς το P :

$$P_t = E_t [M_{t+1} (P_{t+1} + D_{t+1})]$$

όπου $M_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}$ ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης.

Λύνοντας την εξίσωση έχουμε

$$P_t = \sum_{j=1}^{\infty} E_t (M_{t+j} D_{t+j}) + \lim_{T \rightarrow \infty} (E_t (M_{t+T} P_{t+T}))$$

η οποία είναι το γνωστό υπόδειγμα παρούσας αξίας. Ο συντελεστής προεξόφλησης μελλοντικών μερισμάτων είναι στοχαστικός και εξαρτάται από την αλλαγή της οριακής χρησιμότητας του καταναλωτή. Ο συντελεστής προεξόφλησης δίνεται ως $M_{t+j} = \beta^j \frac{u'(C_{t+j})}{u'(C_t)}$, δηλ. ως την

αθροιστική μεταβολή της χρησιμότητας μεταξύ t και $t+j$, προεξοφλημένης με β^j . Αν η χρησιμότητα

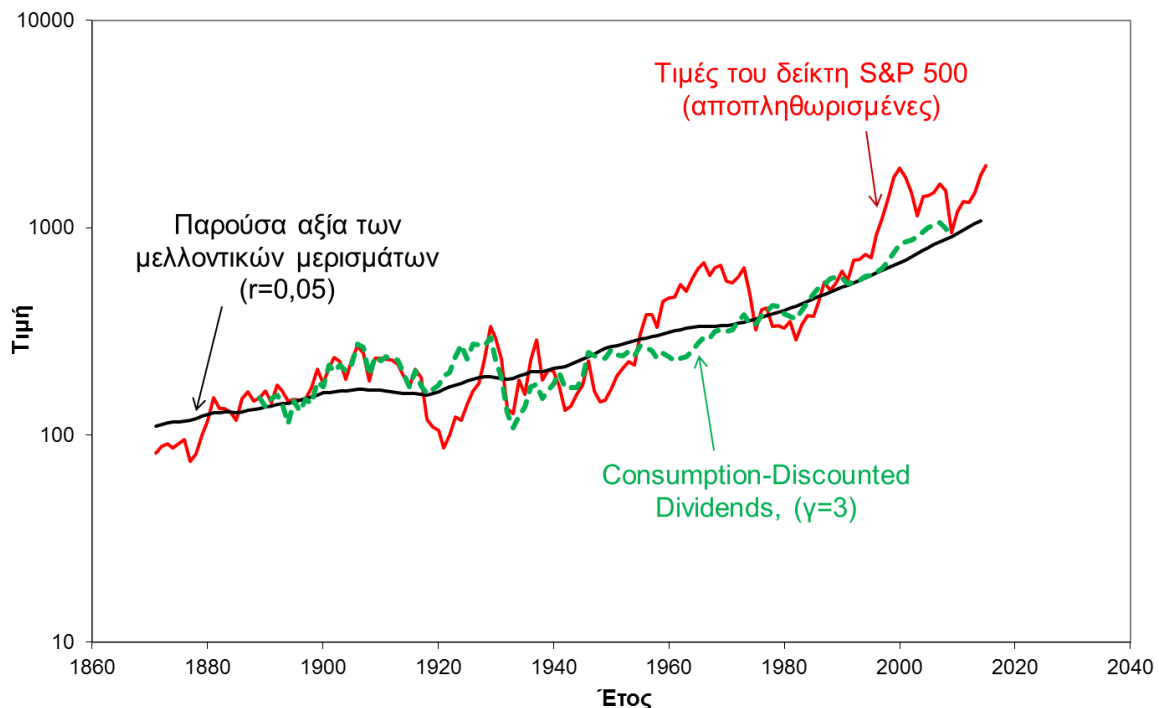
είναι εκθετική, τότε $M_{t+j} = \beta^j \left(\frac{C_{t+j}}{C_t}\right)^{-\gamma}$.

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει την παρούσα αξία του χρηματιστηριακού δείκτη των ΗΠΑ από το 1889 έως το 2009 σύμφωνα με το υπόδειγμα του καταναλωτή με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας και $\gamma=3$, δηλ. $M_{t+1} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-3}$ (πράσινη διακεκομμένη γραμμή) και την συγκρίνει με την παρούσα αξία του κλασσικού υποδείγματος μελλοντικών μερισμάτων με σταθερό συντελεστή προεξόφλησης (μαύρη γραμμή).

Σημείωση: Η παρούσα αξία του δείκτη εκτιμάται για κάθε σημείο στο χρόνο (t=1889-2008) ως:

$$P_t^* = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-3} (D_{t+1} + P_{t+1})$$

Η τελική τιμή (το 2009) εκτιμάται σύμφωνα με το υπόδειγμα Gordon ως $D(2009) \cdot (1+g)/(r-g)$, όπου g ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής των μερισμάτων και r η αναμενόμενη απόδοση. Ως μελλοντικό μέσο ρυθμό μεταβολής των μερισμάτων (g) και μέση αναμενόμενη πραγματική απόδοση του S&P 500 μετά το 2009 (r) υποθέσαμε $g=0.014$ (δειγματικός μέσος 1870-2014) και $r=0.05$ (όπως και στη μαύρη γραμμή).



Μαθηματικά εργαλεία

Για το υπόλοιπο της ύλης θα χρειαστούμε τέσσερις κανόνες.

Κανόνας 1

Αν M, X τυχαίες μεταβλητές, τότε $cov(M, X) = E(MX) - E(M)E(X)$

Κανόνας 2

Αν το X ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή, δηλ. $\ln(X) = x \sim N(\bar{x}, \sigma_x^2)$, τότε $\ln(E(X)) = \bar{x} + \frac{1}{2}\sigma_x^2$.

Κανόνας 3

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X, M ακολουθούν από κοινού την λογαριθμοκανονική κατανομή, τότε $\ln(E(MX)) = \bar{m} + \bar{x} + \frac{1}{2}var(m + x) = \bar{m} + \bar{x} + \frac{1}{2}\sigma_m^2 + \sigma_x^2 + \sigma_{mx}$, όπου σ_{mx} η συνδιακύμανση μεταξύ των m, x .

Κανόνας 4 (Λήμμα του Stein)

Αν X, M τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν από κοινού κανονική κατανομή και $M=f(Y)$, όπου Y τυχαία μεταβλητή, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία και $|E(f')| < \infty$, τότε $Cov(X, M) = E(f')Cov(X, Y)$.

Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου

Πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κεντρική φόρμουλα αποτίμησης (4) για να καθορίσουμε την απόδοση ενός τίτλου μηδενικού κινδύνου;

- Ας υποθέσουμε ότι ο τίτλος κοστίζει 1 ευρώ και υπόσχεται ένα σίγουρο payoff $X_{t+1} = R_t^f = 1 + r_t^f$ στο $t + 1$, όπου r_t^f είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.
 - ο "Μηδενικού κινδύνου" επειδή είναι γνωστό στην περίοδο t , κατά συνέπεια δεν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την απόδοση του τίτλου.
- Τότε, από την $P_t = E_t(M_{t+1}X_{t+1})$ προκύπτει :

$$1 = E(M_{t+1}R_t^f) = E(M_{t+1})R_t^f \Rightarrow R_t^f = \frac{1}{E_t(M_{t+1})} \quad (7)$$

Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι αντιστρόφως ανάλογο του δεσμευμένου μέσου SDF (δηλ. της αναμενόμενης τιμής του, δεδομένης της πληροφόρησης στο t).

1. Για να απλουστεύσουμε την ανάλυση, ας υποθέσουμε για λίγο ότι η κατανάλωση δεν είναι τυχαία μεταβλητή και κατά συνέπεια οι επενδυτές γνωρίζουν με βεβαιότητα τη μελλοντική τους κατανάλωση, $E_t(C_{t+1}) = C_{t+1}$.

- Χρησιμοποιώντας εκθετική χρησιμότητα, $M_{t+1} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}$, και αντικαθιστώντας στην (7) το M_{t+1} , έχουμε:

$$R_t^f = \frac{1}{\beta} E_t \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{\gamma} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{\gamma} \quad (7')$$

- Ορίζοντας $\Delta C_{t+1} = \ln(C_{t+1}/C_t)$ και $r_t^f = \ln R_t^f$ και παίρνοντας λογάριθμους της (7') :

$$r_t^f = -\ln(\beta) + \gamma \Delta C_{t+1} \quad (7'')$$

ο Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι υψηλό όταν οι καταναλωτές-επενδυτές είναι ανυπόμονοι, δηλ. το β είναι χαμηλό.

ο Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι υψηλό όταν ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης είναι υψηλός.

ο Με δεδομένο τον αναμενόμενο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης και το β , το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου αυξάνεται όσο αυξάνεται η αποστροφή στον κίνδυνο, γ .

ο Γιατί τα επιτόκια είναι θετική συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής της κατανάλωσης; Όταν η κατανάλωση αναμένεται να αυξηθεί στο μέλλον, οι καταναλωτές προτιμούν να καταναλώσουν ένα μέρος σήμερα (διαχρονική υποκατάσταση). Ο λόγος είναι ότι η οριακή χρησιμότητα της μελλοντικής κατανάλωσης είναι χαμηλή σε σχέση με την οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης σήμερα. Κατά συνέπεια, θα μειωθεί η αποταμίευση και θα αυξηθεί το επιτόκιο. Με άλλα λόγια, ο καταναλωτής θα ζητήσει ένα υψηλότερο επιτόκιο για να αποταμιεύσει δεδομένου ότι μειώνεται

η οριακή του χρησιμότητα από την μελλοντική κατανάλωση.

2. Γενικά, η κατανάλωση είναι τυχαία μεταβλητή, άρα υπάρχει αβεβαιότητα όσον αφορά την μελλοντική κατανάλωση. Η αβεβαιότητα αυτή πρέπει να αποτιμάται σε κατάσταση ισορροπίας και άρα να αντικατοπτρίζεται στο επίπεδο του επιτοκίου.

Για να λύσουμε ως προς το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης ακολουθεί μια λογαριθμική κανονική κατανομή.

• Τότε, παίρνοντας λογάριθμους της (7) και εφαρμόζοντας τον κανόνα 2, μπορούμε να γράψουμε $\ln \left(E_t \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right) = -\gamma E_t \Delta c_{t+1} + \frac{\gamma^2}{2} \sigma_{\Delta c, t}^2$, και

$$r_t^f = -\ln \beta + \gamma \Delta c_{t+1} - \frac{\gamma^2}{2} \sigma_{\Delta c, t}^2 \quad (8)$$

όπου $E_t \Delta c_{t+1}$ είναι ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης και $\sigma_{\Delta c, t}^2$ η αναμενόμενη διακύμανση της κατανάλωσης, δεδομένης της πληροφόρησης την περίοδο t .

• Η σχέση (8) διαφέρει από την σχέση (7'') ως προς τον όρο $-\frac{\gamma^2}{2} \sigma_{\Delta c, t}^2$. Ο όρος αυτός περιγράφει την επίδραση της αβεβαιότητας στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

- Όταν η διακύμανση της κατανάλωσης και (κατά συνέπεια η αβεβαιότητα) αυξάνεται, οι καταναλωτές αυξάνουν τις αποταμιεύσεις τους για να αντιμετωπίσουν περιόδους χαμηλού εισοδήματος ("saving for a rainy day"). Κατά συνέπεια, το επιτόκιο μειώνεται λόγω αύξησης της προσφοράς πόρων.

Διόρθωση τιμολόγησης για κίνδυνο

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνδιακύμανσης :

$$cov(M, X) = E(MX) - E(M)E(X) \quad (9)$$

μπορούμε να γράψουμε την κεντρική φόρμουλα αποτίμησης (2):

$$P_t = E_t[M_{t+1}X_{t+1}]$$

ως

$$P_t = E_t(M_{t+1})E_t(X_{t+1}) + cov_t(M_{t+1}, X_{t+1})$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου $R_{t+1}^f = \frac{1}{E_t(M_{t+1})}$, έχουμε:

$$P_t = \frac{E_t(X_{t+1})}{R_t^f} + cov_t(M_{t+1}, X_{t+1}) \quad (10)$$

- Ο πρώτος όρος της (10) είναι η συνήθης φόρμουλα προεξόφλησης. Μας δίνει τη τιμή του τίτλου σε ένα κόσμο χωρίς κίνδυνο (π.χ. όταν η χρησιμότητα είναι γραμμική συνάρτηση της

κατανάλωσης, ή η κατανάλωση είναι σταθερή και η χρησιμότητα μη γραμμική και κατά συνέπεια οι επενδυτές είναι ουδέτεροι στον κίνδυνο).

- Ο δεύτερος όρος της (10) είναι η διόρθωση της τιμής για την ύπαρξη κινδύνου. Ένας τίτλος του οποίου το payoff παρουσιάζει θετική συνδιακύμανση με τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης SDF έχει υψηλότερη τιμή από έναν τίτλο του οποίου το payoff παρουσιάζει αρνητική συνδιακύμανση με τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης SDF.
- Για να γίνει αντιληπτή η οικονομική σημασία της διόρθωσης κινδύνου, πρέπει να θυμηθούμε τι αντιπροσωπεύει ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης (SDF). Από τον ορισμό του SDF όταν η συνάρτηση χρησιμότητας είναι εκθετική:

$$M_{t+1} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma}$$

και από την (10), προκύπτει:

$$P_t = \frac{E(X_{t+1})}{R_t^f} + cov \left(\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma}, X_{t+1} \right) \quad (11)$$

- Η οριακή χρησιμότητα μειώνεται όταν αυξάνεται η κατανάλωση. Για τον λόγο αυτό, η τιμή ενός τίτλου μειώνεται όταν το payoff συσχετίζεται θετικά με τον ρυθμό ανόδου της κατανάλωσης. Αντίθετα η τιμή ενός τίτλου αυξάνεται όταν το payoff συσχετίζεται αρνητικά με τον ρυθμό ανόδου της κατανάλωσης.
- Ο λόγος είναι ότι οι καταναλωτές επιθυμούν να μειώσουν τη διακύμανση της κατανάλωσης διαχρονικά.
 - ο Ένας τίτλος του οποίου το payoff συσχετίζεται θετικά με τον ρυθμό ανόδου της κατανάλωσης, αυξάνει το εισόδημά του καταναλωτή όταν αυτό είναι ήδη υψηλό και το μειώνει όταν αυτό είναι ήδη χαμηλό. Κατά συνέπεια ο καταναλωτής είναι διατεθειμένος να τον αγοράσει μόνο σε μία χαμηλή τιμή.
 - ο Αντίθετα, ο καταναλωτής είναι διατεθειμένος να αγοράσει έναν τίτλο με αρνητική συσχέτιση με την κατανάλωση σε μια υψηλότερη τιμή διότι το εισόδημα από αυτόν τον τίτλο μειώνει την διακύμανση της κατανάλωσης.
- Ένα παράδειγμα της αρχής αυτής είναι η ασφάλιση. Η ασφάλεια αποζημιώνει ακριβώς όταν την έχουμε ανάγκη, π.χ. όταν καεί το σπίτι μας. Για το λόγο αυτό πληρώνουμε ευχαρίστως τα ασφάλιστρα, παρότι
 - ο η στατιστική πιθανότητα να καεί το σπίτι μας μπορεί να είναι μικρή, και
 - ο η τιμή της ασφάλισης για το μέσο ασφαλιζόμενο είναι υψηλότερη από την αναμενόμενη αποζημίωση προεξοφλημένη με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Το ασφάλιστρο κινδύνου I

Αξιόγραφο με υψηλότερο κίνδυνο πρέπει να έχουν υψηλότερες αναμενόμενες αποδόσεις. Το ασφάλιστρο κινδύνου ορίζεται ως η υπερβάλλουσα αναμενόμενη απόδοση πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση της κεντρικής φόρμουλας αποτίμησης σε όρους αποδόσεων,

έχουμε

$$1 = E_t(M_{t+1}R_{t+1}) \quad (6)$$

όπου $R_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{P_t}$ είναι η ακαθάριστη απόδοση ενός τίτλου, $R=1+r$ (η καθαρή απόδοση είναι το r).

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνδιακύμανσης

$$cov(M_{t+1}, R_{t+1}) = E(M_{t+1}R_{t+1}) - E(M_{t+1})E(R_{t+1})$$

μπορούμε να γράψουμε την (6) ως :

$$1 = E(M_{t+1})E(R_{t+1}) + cov(M_{t+1}, R_{t+1}) \quad (12)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου, $R_t^f = \frac{1}{E(M_{t+1})}$, έχουμε:

$$E(R_{t+1}) - R_t^f = -R_t^f cov(M_{t+1}, R_{t+1}) \quad (13)$$

ή

$$E(R_{t+1}) - R_t^f = -R_t^f \beta cov\left(\frac{w(C_{t+1})}{w(C_t)}, R_{t+1}\right) \quad (14)$$

- Η απόδοση ενός τίτλου είναι ίση με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου συν ένα ασφάλιστρο κινδύνου, το οποίο εξαρτάται από την συνδιακύμανση μεταξύ της απόδοσης του τίτλου και του λόγου υποκατάστασης παρούσας με μελλοντική κατανάλωση. Αν υποθέσουμε μια συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας, π.χ. εκθετική χρησιμότητα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την οριακή χρησιμότητα με την κατανάλωση. Από την σχέση (14) προκύπτει:

$$E(R_{t+1}^i) - R_t^f = \gamma cov_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^i) \quad (15)$$

- Το ασφάλιστρο κινδύνου είναι γραμμική συνάρτηση της συνδιακύμανσης μεταξύ της απόδοσης του τίτλου και του ρυθμού ανόδου της κατανάλωσης.
- Τίτλοι, των οποίων οι αποδόσεις παρουσιάζουν θετική (αρνητική) συσχέτιση με την κατανάλωση, έχουν θετικό (αρνητικό) ασφάλιστρο κινδύνου.
 - ο Σε οικονομικούς όρους, οι επενδυτές πρέπει να προσδοκούν απόδοση μεγαλύτερη από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου για να κρατήσουν ένα τίτλο ο οποίος αυξάνει την διακύμανση της κατανάλωσης (κίνδυνος).
 - ο Αντίθετα, οι επενδυτές είναι διατεθειμένοι να κρατήσουν έναν τίτλο ο οποίος μειώνει την διακύμανση της κατανάλωσης, έστω εάν έχει αναμενόμενη απόδοση μικρότερη από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.
 - ο Γενικά, η αναμενόμενη απόδοση ενός τίτλου είναι θετική συνάρτηση του κινδύνου.

Διαφορετικά κανένας επενδυτής δεν θα κρατούσε τίτλους υψηλού κινδύνου.

ο Σημείωση: Όπως προκύπτει από τον ορισμό της αναμενόμενης απόδοσης $E_t(R_{t+1}) = E_t(X_{t+1})/P_t$, με δεδομένο το αναμενόμενο payoff, τίτλοι με χαμηλή (υψηλή) τιμή έχουν υψηλή (χαμηλή) αναμενόμενη απόδοση.

Απόδειξη της (15)

Για την απόδειξη της (15) ξεκινάμε από την (13) με

$$M_{t+1} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} = e^{\ln(M_{t+1})} = e^{\ln(\beta) - \gamma \Delta c_{t+1}}.$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Stein (κανόνας 4):

$$\text{cov}(M_{t+1}, R_{t+1}^i) = \text{cov}_t \left(e^{\ln(\beta) - \gamma \Delta c_{t+1}}, R_{t+1}^i \right) = -\gamma E_t(M_{t+1}) \text{cov}_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^i).$$

Αντικαθιστώντας στην $E(R_{t+1}^i) - R_t^f = -\frac{\text{cov}(M_{t+1}, R_{t+1}^i)}{E(M_{t+1})}$, έχουμε:

$$E(R_{t+1}^i) - R_t^f = \gamma \text{cov}_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^i).$$

Το ασφάλιστρο κινδύνου II

Αν οι αποδόσεις και η μεταβολή της κατανάλωσης ακολουθούν από κοινού λογαριθμοκανονική κατανομή, τότε μπορούμε να πάρουμε λογαρίθμους της (6) και να εφαρμόσουμε τον κανόνα 3.

$E_t \ln(M_{t+1} R_{t+1}) = 0$. Παίρνοντας λογαρίθμους της αριστερής πλευράς,

$$E_t m_{t+1} + E_t r_{t+1} + \frac{1}{2} \text{var}_t(m_{t+1}) + \frac{1}{2} \text{var}_t(r_{t+1}) + \text{cov}_t(m_{t+1}, r_{t+1}) = 0 \quad (6')$$

Αν η χρησιμότητα είναι εκθετική, $M_{t+1} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma}$, τότε

$$m_{t+1} = \ln \beta - \gamma \Delta c_{t+1}.$$

Άρα $E_t m_{t+1} = \ln \beta - \gamma \Delta c_{t+1}$, $\text{var}_t(m_{t+1}) = \gamma^2 \text{var}_t(\Delta c_{t+1})$.

Αντικαθιστώντας στη (6'), έχουμε

$$E_t r_{t+1} + \frac{1}{2} \text{var}_t(r_{t+1}) = -\ln \beta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \frac{1}{2} \gamma^2 \text{var}_t(\Delta c_{t+1}) + \gamma \text{cov}_t(r_{t+1}, \Delta c_{t+1}) \quad (6'')$$

Αν το αξιόγραφο είναι το αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου, τότε $\text{var}(r_t^f) = 0$ και $\text{cov}_t(m_{t+1}, r_t^f) = 0$. Από την (6') προκύπτει

$$E_t r_t^f = -\ln \beta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \frac{1}{2} \gamma^2 \text{var}_t(\Delta c_{t+1}) \quad (6''')$$

Αφαιρώντας την (6''') από την (6''), προκύπτει το ασφάλιστρο κινδύνου ως

$$E_t r_{t+1} + \frac{1}{2} \text{var}_t(r_{t+1}) - r_t^f = \gamma \text{cov}_t(r_{t+1}, \Delta c_{t+1}) \quad (15')$$

Η μόνη διαφορά της (15') από την (15) είναι ότι στην αριστερή πλευρά της (15') προκύπτει ο όρος $\frac{1}{2} \text{var}_t(r_{t+1})$ λόγω της λογαριθμικής προσέγγισης της απόδοσης.

Πλαίσιο: Εφαρμογή της φόρμουλας αποτίμησης όταν M_{t+1} και R_{t+1} ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή:

Οι αναμενόμενες αποδόσεις των αξιόγραφων καθορίζονται από την συνθήκη

$$\ln E_t(M_{t+1} R_{i,t+1}) = 0$$

Υποθέτοντας ότι οι μεταβλητές ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή και εφαρμόζοντας τον Κανόνα 3, παίρνουμε:

$$\ln E_t(M_{t+1} R_{i,t+1}) = E_t m_{t+1} + E_t r_{i,t+1} + \frac{1}{2} \text{Var}(m_{t+1} + r_{i,t+1}) = 0$$

- Αντικαθιστώντας την $m_{t+1} = \log(\beta) - \gamma \Delta c_{t+1}$ στην εξίσωση και λύνοντας ως προς την αναμενόμενη απόδοση του αξιόγραφου, καταλήγουμε στο υπόδειγμα αποτίμησης.

Στατιστικά δεδομένα και χαρακτηριστικά του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης

Πίνακας 2: Ονομαστικές αποδόσεις στις ΗΠΑ

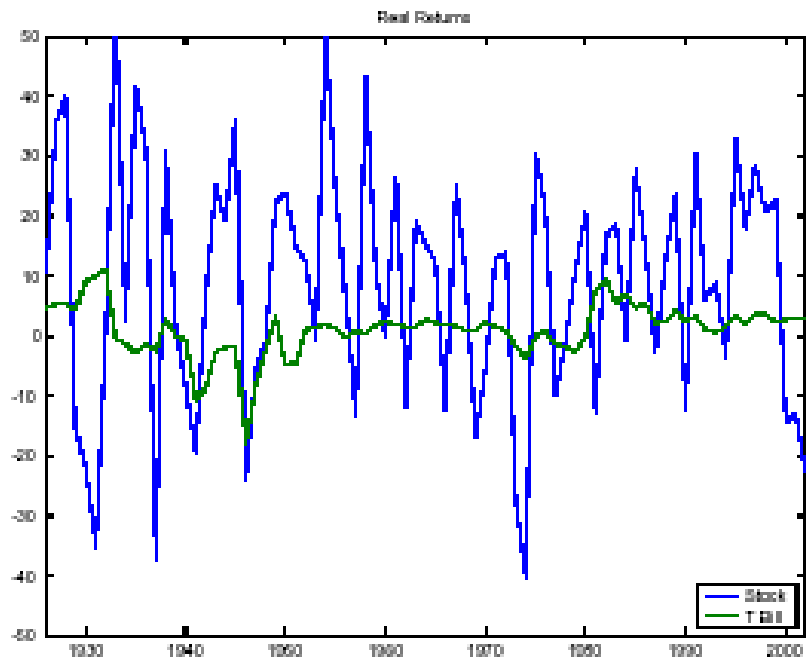
	1871-1999		1926-1999	
	Μέσος	Τυπ. Απ.	Μέσος	Τυπ. Απ.
$\ln(1+r)$	0.090	0.167	0.105	0.182
$\ln(1+r^f)$	0.047	0.026	0.046	0.033
$\ln(1+\pi)$	0.018	0.075	0.030	0.044
r	0.109	0.177	0.129	0.192
r^f	0.049	0.028	0.048	0.035
ζ	0.021	0.075	0.031	0.045

Σημείωση: r : Απόδοση μετοχών , r^f : ονομαστικό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, π : πληθωρισμός.

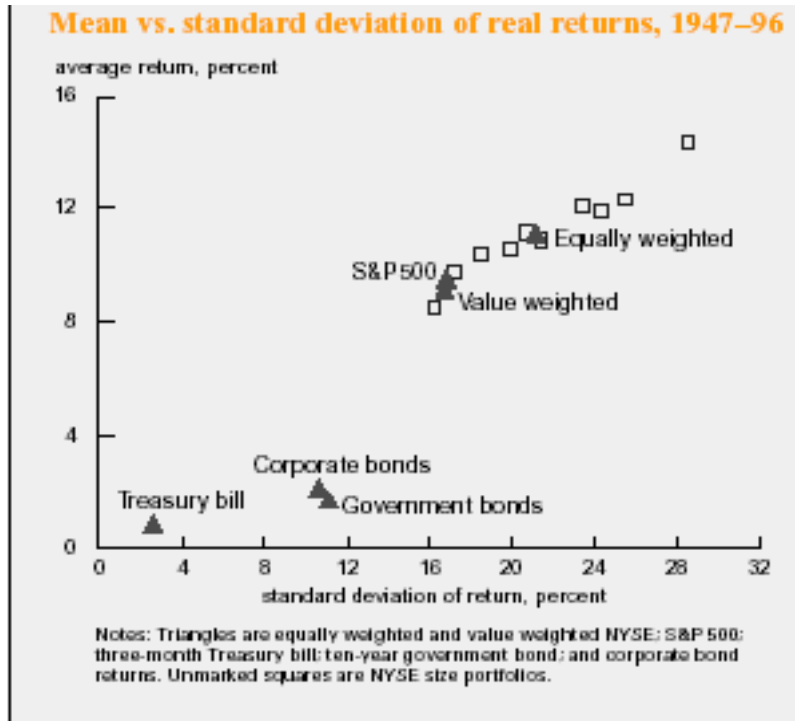
Πίνακας 3: Πραγματική υπερβάλλουσα απόδοση μετοχών ΗΠΑ

1871-1999	R^e
Μέσος	0.057
Τυπ. Απ.	0.181
1926-1999	R^e
Μέσος	0.079
Τυπ. Απ	0.195

Αποδόσεις χρηματιστηρίου και 3-μηνιαίων Treasury Bills στις ΗΠΑ 1927-2002.



Αποδόσεις και κίνδυνος (τυπική απόκλιση) 1947-1996



Πραγματικές (αποπληθωρισμένες) αποδόσεις και κίνδυνος 1927-2002

	Ομόλογα	Μετοχές-Ομόλογα
Μέση ετήσια απόδοση	1.1	7.7
Τυπική απόκλιση	8.6	20.8

Αξία 1000 δολαρίων το 2002 τα οποία επενδύθηκαν το 1927:

Στο χρηματιστήριο: $1000 \times (1+0.088)^{(2004-1927)} = 660.100$ δολάρια

Σε ομόλογα: $1000 \times (1+0.011)^{(2004-1927)} = 2.321$ δολάρια

Πίνακας 4: Πραγματικό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ΗΠΑ και SDF

1871-1999	$\frac{1}{1+r^f}$
Μέσος	0.974
Τυπ. Απ.	0.076
1926-1999	
Μέσος	0.985
Τυπ. Απ.	0.046

Σημείωση: $\frac{1}{1+r^f}$ είναι η αποπληθωρισμένη τιμή ενός ετήσιου ομολόγου.

Τι μας λένε τα δεδομένα των επιτοκίων μηδενικού κινδύνου για τον μέσο και την διακύμανση του M ;

$$\begin{aligned}
 1 &= E(MR^f) \Leftrightarrow \\
 1 &= E(M)E(R^f) + cov(M, R^f) \Leftrightarrow \\
 1 &= E(MR^f) \Leftrightarrow E(M) = E\left(\frac{1}{1+r^f}\right) \approx 0.974, var(M) = var\left(\frac{1}{1+r^f}\right) \approx 0.076.
 \end{aligned}$$

Αναμενόμενες αποδόσεις και beta

Το ασφάλιστρο κινδύνου ενός τίτλου είναι το γινόμενο δυο παραγόντων: της ποσότητας του κινδύνου και της τιμής του κινδύνου. Αυτό φαίνεται εύκολα από την (13), η οποία μπορεί να αναλυθεί ως εξής :

$$E_t(R_{t+1}^i) = R_t^f - \beta_{i,m}\lambda_m \quad (16)$$

όπου $\beta_{i,m}$ είναι ο συντελεστής παλινδρόμησης του R_{t+1}^i στο M_{t+1} και $\lambda = var(M_{t+1})/E_t(M_{t+1})$ η τιμή του κινδύνου.

- Η σχέση (16) είναι ένα υπόδειγμα αποτίμησης beta (beta pricing model).
- Σύμφωνα με την (16), οι αναμενόμενες αποδόσεις τίτλων $i = 1, \dots, N$, είναι ανάλογες των beta (συστηματικός κίνδυνος) των τίτλων.
- Τα beta αντιπροσωπεύουν την ποσότητα κινδύνου, ενώ λ_m είναι η τιμή του κινδύνου, και είναι κοινό για όλους τους τίτλους.

Με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας, $M_{t+1} = \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}$, και η σχέση (16) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 E_t(R_{t+1}^i) &= R_t^f - \beta_{i,\Delta c}\lambda_{\Delta c} \\
 \lambda_{\Delta c} &= \gamma var(\Delta c_{t+1}),
 \end{aligned} \quad (16')$$

$$\beta_{i,\Delta c} = \frac{cov(R_{t+1}^i, \Delta c_{t+1})}{var(\Delta c_{t+1})}$$

- Σύμφωνα με την απεικόνιση (16'), οι αποδόσεις είναι γραμμική συνάρτηση των beta με τον ρυθμό ανόδου της κατανάλωσης.
- Η τιμή του κινδύνου είναι θετική συνάρτηση του βαθμού αποστροφής του κινδύνου, γ , και της διακύμανσης της κατανάλωσης.
- Όσο λιγότερο ριψοκίνδυνοι είναι οι επενδυτές, (μεγαλύτερο γ) και όσο πιο επικίνδυνο είναι το οικονομικό περιβάλλον (υψηλή διακύμανση του Δc) τόσο μεγαλύτερο το απαιτούμενο ασφάλιστρο κινδύνου.

Κεφάλαιο 4: Το αποδοτικό όριο των επενδυτικών δυνατοτήτων της οικονομίας

- Το σύνολο των επενδυτικών δυνατοτήτων μιας οικονομία (mean variance frontier) καθορίζεται από την διακύμανση του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης.
- Για τον υπολογισμό του αποδοτικού ορίου, ξεκινάμε από την κεντρική φόρμουλα αποτίμησης:

$$1 = E(M_{t+1}R_{t+1}^i) = E(M_{t+1})E(R_{t+1}^i) + cov(M_{t+1}, R_{t+1}^i) \Rightarrow$$

$$1 = E(M_{t+1})E(R_{t+1}^i) + \rho_{M,R^i}\sigma(M_{t+1})\sigma(R_{t+1}^i) \Rightarrow$$

$$E(R_{t+1}^i) - R_t^f = -\rho_{M,R^i} \frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})} \sigma(R_{t+1}^i) \quad (17)$$

Λόγω του ότι ο συντελεστής συσχέτισης $-1 \leq \rho_{M,R^i} \leq 1$, όλοι οι τίτλοι πρέπει να έχουν αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση:

$$|E(R_{t+1}^i) - R_t^f| \leq \frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})} \sigma(R_{t+1}^i) \quad (18)$$

- Η σχέση (18) ορίζει το σύνολο των πιθανών συνδυασμών μεταξύ απόδοσης και κινδύνου μιας οικονομίας.
- Όλοι οι συνδυασμοί $E(R_{t+1}^i) - \sigma(R_{t+1}^i)$ πρέπει να βρίσκονται στην περιοχή Ω του διαγράμματος 4.
- Το όριο του συνόλου των επενδυτικών δυνατοτήτων $\overline{AR^fB}$ είναι το αποδοτικό όριο, το οποίο υπολογίζεται από την (17) θέτοντας $|\rho_{M,R^i}| = 1$.
- Όλες οι αποδόσεις πάνω στο όριο $\overline{AR^fB}$ παρουσιάζουν τέλεια συσχέτιση με τον συντελεστή προεξόφλησης.
 - ο Αποδόσεις πάνω στο $\overline{AR^f}$ παρουσιάζουν τέλεια αρνητική συσχέτιση με τον συντελεστή προεξόφλησης, δηλ. τέλεια θετική συσχέτιση με την κατανάλωση. Επομένως έχουν τον υψηλότερο κίνδυνο και κατά συνέπεια την υψηλότερη απόδοση.
 - ο Αποδόσεις πάνω στο $\overline{R^fB}$ παρουσιάζουν τέλεια θετική συσχέτιση με τον συντελεστή προεξόφλησης, δηλ. τέλεια αρνητική συσχέτιση με την κατανάλωση. Επομένως έχουν τον χαμηλότερο κίνδυνο και κατά συνέπεια την χαμηλότερη απόδοση.

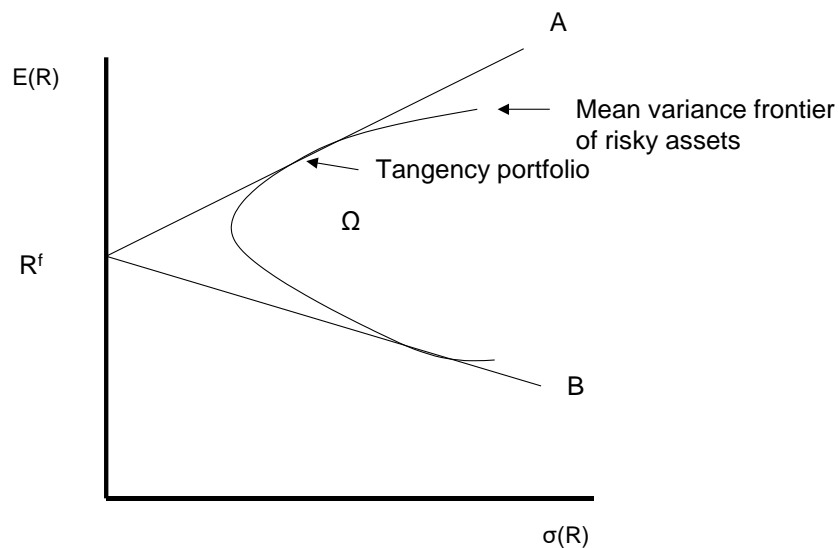


Figure 4: Mean-variance frontier

- Όλες οι αποδόσεις πάνω στο όριο παρουσιάζουν τέλεια συσχέτιση μεταξύ τους καθώς έχουν τέλεια συσχέτιση με τον συντελεστή προεξόφλησης. Κατά συνέπεια μπορούμε να αναπαράγουμε κάθε απόδοση R^{mv} πάνω στο όριο $\overline{AR^fB}$ ως γραμμικό συνδυασμό δυο άλλων αποδόσεων που βρίσκονται επίσης πάνω στο όριο, π.χ.

$$R^{mv} = R^f + a(R^m - R^f)$$

για κάποια σταθερά a .

Η μέγιστη υπερβάλλουσα απόδοση ανά μονάδα κινδύνου (μέγιστο Sharpe ratio) που προσφέρει μια οικονομία καθορίζεται από τον βαθμό αποστροφής του κινδύνου και την διακύμανση της κατανάλωσης.

Ο λόγος υπερβάλλουσας απόδοσης προς κίνδυνο είναι γνωστό ως Sharpe ratio:

$$\frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma(R_{t+1}^i)} = \text{Sharpe ratio}$$

Η κλίση του mean-variance frontier είναι το μέγιστο Sharpe ratio που μπορεί να μας προσφέρει μια οικονομία. Η κλίση αυτή είναι:

$$\left| \frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma(R_{t+1}^i)} \right| = \frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})} = \sigma(M_{t+1}) R_t^f \quad (19)$$

Σύμφωνα με την (19), το μέγιστο Sharpe ratio μιας οικονομίας είναι θετική συνάρτηση της διακύμανσης του στοχαστικού συντελεστή αποτίμησης και του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου. Για να προσδιορίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τις οικονομικές μεταβλητές που καθορίζουν το μέγιστο Sharpe ratio μπορούμε να υποθέσουμε εκθετική χρησιμότητα. Οπότε : $M_{t+1} = \beta(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}$. Στη περίπτωση αυτή η (19) γίνεται:

$$\left| \frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma(R_{t+1}^i)} \right| = \frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})} \approx \gamma \sigma(\Delta c_{t+1}) \quad (20)$$

- Το μέγιστο Sharpe ratio μιας οικονομίας είναι θετική συνάρτηση του βαθμού αποστροφής κινδύνου και της διακύμανσης της κατανάλωσης.
 - ο Όσο περισσότερο αποστρέφεται τον κίνδυνο ο επενδυτής, τόσο υψηλότερο το απαιτούμενο ασφάλιστρο για κάθε μονάδα κινδύνου.
 - ο Όσο πιο επικίνδυνο είναι το οικονομικό περιβάλλον (υψηλή διακύμανση του Δc), τόσο μεγαλύτερο το απαιτούμενο ασφάλιστρο για κάθε μονάδα κινδύνου.

Το παζλ του ασφάλιστρου κινδύνου των μετοχών

Αν το υπόδειγμα CCAPM έχει εμπειρική ισχύ, τότε το Sharpe ratio μιας αγοράς έχει ένα ανώτατο όριο. Από την σχέση (10) και (20)

$$\left| \frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma(R_{t+1}^i)} \right| \leq \gamma \sigma(\Delta c_{t+1}) \quad (21)$$

- Το ανώτατο όριο του Sharpe ratio είναι $\gamma \sigma(\Delta c_{t+1})$.
- Για να ισχύει η σχέση (21), το γ πρέπει να είναι πολύ υψηλό.
 - ο Για παράδειγμα, στις ΗΠΑ την περίοδο 1948-1980 η πραγματική απόδοση του χρηματιστηρίου ήταν 9%, το πραγματικό επιτόκιο εντόκων γραμματίων του Δημοσίου ήταν 1% και η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του Χρηματιστηριακού Δείκτη ήταν 16%. Κατά συνέπεια, $\left| \frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma(R_{t+1}^i)} \right| = \frac{0.09 - 0.01}{0.16} = 0.5$.
 - ο Από την άλλη μεριά, η τυπική απόκλιση του ρυθμού ανόδου της κατανάλωσης ήταν 1%.
 - ο Για να ισχύει η ανισότητα (21), ο βαθμός αποστροφής κινδύνου των επενδυτών, γ , θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερος από 50.

Το παραπάνω πρόβλημα πήρε την ονομασία equity premium puzzle από τους Mehra και Prescott (1985).

ο **Σημείωση:** Το παζλ του ασφάλιστρου κινδύνου των μετοχών έχει μάλλον ιστορική σημασία, καθώς φαίνεται να ισχύει μόνο σε συγκεκριμένες περιόδους, όπως η περίοδος μετά τον 2^ο παγκόσμιο πόλεμο και έως περίπου το 1999. Σε μεγαλύτερα δείγματα, όπως για παράδειγμα στο δείγμα 1871-2010, δεν ισχύει (το δείγμα αυτό περιλαμβάνει την κρίση του 1929-30, το σκάσιμο της φούσκας του NASDAQ του 2000-2001 και την χρηματοπιστωτική κρίση του 2008-2009. Κατά τα τελευταία 140 χρόνια η πραγματική απόδοση του χρηματιστηρίου ήταν 6,2% (όχι πολύ διαφορετική από των τελευταίων 62 ετών), το πραγματικό επιτόκιο εντόκων γραμματίων του Δημοσίου ήταν 2,8% και η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του Χρηματιστηριακού Δείκτη ήταν

$$17,4\%. \text{ Κατά συνέπεια, } \left| \frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma(R_{t+1}^i)} \right| = \frac{0.062 - 0.028}{0.174} = 0.2.$$

Από την άλλη μεριά, η τυπική απόκλιση του ρυθμού ανόδου της κατανάλωσης ήταν 3,5% (η κατανάλωση είχε μεγαλύτερη μεταβλητότητα πριν τον 2^ο παγκόσμιο πόλεμο). Για να ισχύει η ανισότητα (21), ο βαθμός αποστροφής κινδύνου των επενδυτών, γ θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερος από 5,7, που είναι ένα λογικό νούμερο.

Το παζλ του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου

Ακόμη και αν ήμασταν διατεθειμένοι να αποδεχτούμε έναν υψηλό βαθμό αποστροφής κινδύνου για τους επενδυτές, το υπόδειγμα θα μπορούσε να εξηγήσει το υψηλό ασφάλιστρο κινδύνου των μετοχών, αλλά όχι το μέσο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Το παζλ αυτό ονομάστηκε το παζλ του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου.

Για να γίνει κατανοητή αυτή η πρόταση, ας θυμηθούμε τη κεντρική φόρμουλα του καθορισμού του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου

$$r_t^f = -\ln \beta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} \quad (8)$$

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης 1948-2010 ήταν 2,2%. Κατά συνέπεια, με $\gamma=17$ (το οποίο είναι απαραίτητο για να εξηγήσει το ασφάλιστρο κινδύνου των μετοχών την περίοδο αυτή) προκύπτει από την (8)

$$r_t^f + \ln \beta = 0.34 \quad (8')$$

Καθώς το β είναι κοντά στη μονάδα, άρα $\ln(\beta)$ είναι κοντά στο μηδέν, το πραγματικό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου θα έπρεπε να είναι 34% (υπερβολικά υψηλό). Επομένως, το υπόδειγμα δεν είναι σε θέση να εξηγήσει το μέσο επιτόκιο της οικονομίας (περίπου 1,8% σε πραγματικούς όρους και περίπου 4% σε ονομαστικούς όρους).

Κατά συνέπεια, το υπόδειγμα του καταναλωτή δεν είναι σε θέση να εξηγήσει το μέσο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου με υψηλή αποστροφή στο κίνδυνο. Όμως ακόμη και αν ήταν σε θέση να εξηγήσει το μέσο επιτόκιο με ένα $\gamma=17$, αυτό θα σήμαινε σύμφωνα με την (8) ότι μια αύξηση του αναμενόμενου ρυθμού ανόδου της κατανάλωσης κατά μια μονάδα θα οδηγούσε σε μια άνοδο του επιτοκίου κατά 17 ποσοστιαίες μονάδες, κάτι που δεν παρατηρείται στη πραγματικότητα σε καμία οικονομία.

Ερμηνείες

Η αποτυχία του CCAPM να εξηγήσει το μέσο ασφάλιστρο κινδύνου και το μέσο πραγματικό επιτόκιο της οικονομίας μπορεί να εξηγηθεί με διάφορους τρόπους. Μερικές πιθανές ερμηνείες είναι οι ακόλουθες :

- 1) Οι υψηλές χρηματιστηριακές αποδόσεις του παρελθόντος είναι τυχαίες.
- 2) Υπάρχει μια θετική επιλεκτική μεροληψία στις μετρήσεις των μέσων αποδόσεων.
- 3) Οι επενδυτές προσδοκούσαν ένα κραχ στα χρηματιστήρια το οποίο ποτέ δεν συνέβη («πρόβλημα peso») – κι όμως συνέβη τελικά το 2008.
- 4) Το υπόδειγμα CCAPM στην βασική (απλοϊκή) μορφή του είναι λάθος.

Ερμηνεία 1. Το επιχείρημα αυτό σημαίνει ότι η αγορά ακολουθούσε συνεχώς μια κερδοσκοπική φούσκα. Αυτό όμως δεν είναι μια ικανοποιητική εξήγηση.

Ερμηνεία 2. Οι αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη δεν είναι αντιπροσωπευτικές των αποδόσεων του συνόλου των εταιριών καθώς στο χρηματιστηριακό δείκτη συμπεριλαμβάνονται μόνο οι εταιρίες που επέζησαν (και όχι αυτές οι οποίες έκλεισαν). Κατά συνέπεια, οι αποδόσεις του δείκτη είναι μεγαλύτερες από τις πραγματικές ιστορικές αποδόσεις του συνόλου των εταιριών. Με άλλα λόγια, τα εμπειρικά δεδομένα πάνω στα οποία στηρίζεται το παζλ είναι παραπλανητικά. Επιπλέον, οι ακαδημαϊκές μελέτες επικεντρώνονται στις Η.Π.Α. όπου παρατηρούνται οι υψηλότερες ιστορικά αποδόσεις. Άλλα χρηματιστήρια δεν παρουσιάζουν την ίδια εικόνα με αποτέλεσμα να υπάρχει μια θετική επιλεκτική μεροληψία στις μετρήσεις των μέσων αποδόσεων (Brown, Goetzmann and Ross, 1995). Παρότι αρκετά άλλα ανεπτυγμένα χρηματιστήρια προσέφεραν

αποδόσεις συγκρίσιμες με τις Η.Π.Α. στη μεταπολεμική περίοδο, οι Jorion και Goetzmann (1999) δείχνουν ότι οι αποδόσεις σε πολλά από τα χρηματιστήρια αυτά ήταν χαμηλές στις αρχές του 20^{ου} αιώνα.

Ερμηνεία 3. Πολλοί ερευνητές ισχυρίζονται ότι τα Αμερικάνικα δεδομένα είναι παραπλανητικά για διαφορετικό λόγο. Οι επενδυτές μπορεί να περίμεναν την πιθανότητα ενός καταστροφικού γεγονότος που δεν έχει ακόμη συμβεί. Αυτό το 'peso problem' υπονοεί ότι η δειγματική μεταβλητότητα υποτιμά τον πραγματικό κίνδυνο επένδυσης σε μετοχές. Έστω λοιπόν ότι ένα καταστροφικό γεγονός μπορεί να οδηγήσει σε πολύ μεγάλες απώλειες των μετοχών (μεγάλες αρνητικές αποδόσεις) και μεγάλη διακύμανση (κίνδυνο). Αν οι επενδυτές θεωρούν ότι υπάρχει έστω και μια μικρή πιθανότητα ενός καταστροφικού συμβάντος, τότε η αναμενόμενη απόδοση των μετοχών μπορεί να είναι πολύ μικρότερη από την δειγματική. Συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δυο καταστάσεις (1 και 2, όπου) και οι επενδυτές προσδοκούν ότι στη κατάσταση 1 (2) η αναμενόμενη απόδοση πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι $E(R_1)$ ($E(R_2)$) και η τυπική απόκλιση $\sigma(1)$ ($\sigma(2)$) και η δεσμευμένη πιθανότητα τη περίοδο t να βρίσκεται η αγορά την επόμενη περίοδο στη κατάσταση 1 (2) είναι π ($1-\pi$), τότε η αναμενόμενη απόδοση είναι

$$E_t(R_{t+1}) = \pi E(R_1) + (1 - \pi)E(R_2)$$

Με $\pi=90\%$ και $E(R_1)=8\%$, $E(R_2)=-30\%$, η αναμενόμενη απόδοση είναι 5.2% ($0.9*8+0.1*(-30)$). Η κατάσταση 2 σπάνια συνέβη, και κατά συνέπεια η μέση απόδοση της αγοράς ιστορικά ήταν 8% , η απόδοση στη καλή κατάσταση του κόσμου. Παρόλαυτα, οι επενδυτές περίμεναν αποδόσεις χαμηλότερες από τον ιστορικό αδέσμευτο μέσο, δηλ. 5.2% , επειδή προεξοφλούσαν την πιθανότητα ενός κραχ.

Επίσης, και η αναμενόμενη τυπική απόκλιση των αποδόσεων μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη από την δειγματική.

$$E_t(\sigma_{t+1}) = \pi \sigma_1 + (1 - \pi) \sigma_2$$

Για παράδειγμα, με $\pi=90\%$ και $\sigma_1=18\%$, και $\sigma_2=70\%$, ο αναμενόμενος κίνδυνος (τυπική απόκλιση) είναι 23.2% ($0.9*18+0.1*70$). Επειδή η κατάσταση 2 σπάνια συνέβη, η τυπική απόκλιση των αποδόσεων της αγοράς ιστορικά ήταν 18% , ο κίνδυνος στη καλή κατάσταση του κόσμου. Επειδή όμως οι επενδυτές προεξοφλούσαν την πιθανότητα ενός κραχ, ο αναμενόμενος κίνδυνος ήταν μεγαλύτερος, 23.2% έναντι 18% .

Κατά συνέπεια, η αναμενόμενη (δεσμευμένη) υπερβάλλουσα απόδοση ανά μονάδα κινδύνου (Sharpe ratio) είναι μικρότερη από την δειγματική (αδέσμευτη) και το παζλ δεν υφίσταται. Το μέσο δεσμευμένο Sharpe ratio (δηλ. το Sharpe ratio που οι επενδυτές προσδοκούσαν κατά μέσο όρο) είναι 0.22 ($=5.2\%/23.2\%$) και όχι 0.44 ($8\%/18\%$)

Η χρηματοοικονομική κρίση του 2007-2008 μας υπενθύμισε ότι η πιθανότητα ενός κραχ δεν είναι αμελητέα. Οι μετοχές στα διεθνή χρηματιστήρια έχασαν από το ½ έως τα 90/100 της αξίας τους και η διακύμανση των μετοχών πενταπλασιάστηκε μετά την κατάρρευση της Lehman Brothers τον Σεπτέμβριο του 2008. Ο S&P 500 έχασε το 2008-2009 το 60% της αξίας του και η τυπική του απόκλιση αυξήθηκε στο 70%.

Ερμηνεία 4. Το υπόδειγμα CCAPM είναι αναμφίβολα μια πολύ απλουστευμένη περιγραφή της πραγματικότητας. Αν υποθέσουμε ότι κατά βάση το υπόδειγμα είναι σωστό αλλά αδυνατεί να εξηγήσει τα εμπειρικά δεδομένα λόγω υπερβολικά περιοριστικών υποθέσεων, τότε μπορούμε να χαλαρώσουμε κάποιες υποθέσεις του. Στη κατεύθυνση αυτή έχει κινηθεί η βιβλιογραφία τα τελευταία 20 χρόνια. Οι επεκτάσεις του βασικού υποδείγματος CCAPM είναι πολλές. Γενικά όμως, μπορούμε να τις κατατάξουμε σε τρεις κατηγορίες.

1. Υποδείγματα με άλλες μορφές συνάρτησης χρησιμότητας και ειδικότερα με μη διασπασιμότητα (non-separability) της κατανάλωσης στη συνάρτηση χρησιμότητας. Στα υποδείγματα αυτά η οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης είναι συνάρτηση κάποιων μεταβλητών κατάστασης. Κατά συνέπεια, το ασφάλιστρο κινδύνου είναι συνάρτηση της συνδιακύμανσης των αποδόσεων με την κατανάλωση και της συνδιακύμανσης των αποδόσεων με τις μεταβλητές κατάστασης. Αν η τελευταία είναι οικονομικά σημαντική, μπορούμε να εξηγήσουμε το ασφάλιστρο κινδύνου χωρίς να χρειαστεί να υποθέσουμε μια υψηλή τιμή για το γ , βλέπε Campbell και Cochrane (2000) ως ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αυτού του είδους.
2. Υποδείγματα με ετερογενείς καταναλωτές – Constantinides και Duffie (1996). Η ετερογένεια έγκειται στο οι καταναλωτές έχουν εισόδημα από εργασία το οποίο υπόκειται σε ένα ιδιοσυγκρατικό σοκ, δηλ. ο καταναλωτής αντιμετωπίζει εκτός από τον κίνδυνο να μειωθεί η αξία του αξιογράφου του (κοινός για όλους) και τον κίνδυνο να μειωθεί το εισόδημά του γιατί σε μια ύφεση μπορεί να χάσει την εργασία του. Αν ο κίνδυνος αυτός συσχετίζεται αρνητικά με τις αποδόσεις (επειδή για παράδειγμα, η πιθανότητα να μείνει κανείς άνεργος είναι μεγαλύτερη σε μια ύφεση όταν και οι αποδόσεις είναι χαμηλές), το ασφάλιστρο κινδύνου εξαρτάται από την εισοδηματική ανισότητα. Όσο μεγαλύτερη είναι η τυπική απόκλιση του εισοδήματος μεταξύ των καταναλωτών, τόσο μεγαλύτερο και το απαιτούμενο ασφάλιστρο κινδύνου.
3. Υποδείγματα με παραγωγή (production economy) – Cochrane (1991). Στη πιο απλή μορφή τους τα υποδείγματα αυτά ορίζουν τη απαιτούμενη απόδοση στα πλαίσια ενός προβλήματος μεγιστοποίησης του κέρδους της εταιρίας αντί της χρησιμότητας του καταναλωτή.

Πλαίσιο: Απόδειξη της (20) :

Επαναλαμβάνουμε την (20):

$$\left| \frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma(R_{t+1}^i)} \right| = \frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})} \approx \gamma \sigma(\Delta c_{t+1})$$

Για την απόδειξη της (20) ξεκινάμε από την βασική φόρμουλα του καθορισμού του ασφάλιστρου κινδύνου σύμφωνα με το υπόδειγμα του καταναλωτή:

$$E(R_{t+1}^i) - R_t^f = -\frac{\text{cov}(M_{t+1}, R_{t+1}^i)}{E(M_{t+1})}. \text{ Με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας,}$$

$$M_{t+1} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} = e^{\ln(\beta) - \gamma \ln(C_{t+1}/C_t)} = e^{\ln(\beta) - \gamma \Delta c_{t+1}}.$$

Χρησιμοποιούμε το λήμμα του Stein:

Λήμμα του Stein (υπενθύμηση):

Έστω x_t , y_t και f_t τυχαίες μεταβλητές και $y_t = g(f_t)$. Εάν x_t και f_t ακολουθούν την διμεταβλητή κανονική κατανομή, η g είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία και $|E_t(g')| < \infty$, τότε

$$\text{cov}_t(x_{t+1}, g(f_{t+1})) = E_t(g') \text{cov}_t(x_{t+1}, f_{t+1})$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Stein:

$$\text{cov}(M_{t+1}, R_{t+1}^i) = \text{cov}_t \left(\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma}, R_{t+1}^i \right) = -\gamma E_t(M_{t+1}) \text{cov}_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^i). \text{ Αντικαθιστώντας}$$

$$\text{στην } E(R_{t+1}^i) - R_t^f = -\frac{\text{cov}(M_{t+1}, R_{t+1}^i)}{E(M_{t+1})}, \text{ έχουμε:}$$

$$E(R_{t+1}^i) - R_t^f = \gamma \text{cov}_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^i).$$

Καθώς $\text{cov}_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^i) = \rho(\Delta c, R) \sigma(\Delta c, R) \sigma(R_{t+1}^i)$, προκύπτει:

$$\frac{E(R_{t+1}^i) - R_t^f}{\sigma(R_{t+1}^i)} = \gamma \rho(\Delta c, R) \sigma(\Delta c_{t+1}). \text{ Άρα, για } \rho(\Delta c, R) = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\left| \frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma(R_{t+1}^i)} \right| \approx \gamma \sigma(\Delta c_{t+1}).$$

Είναι οι τιμές/αποδόσεις προβλέψιμες;

Τι συνεπάγεται η κεντρική φόρμουλα αποτίμησης σχετικά με την στοχαστική διαδικασία των τιμών των τίτλων και, κατά συνέπεια, σχετικά με την προβλεψιμότητα των αποδόσεων;

Από την κεντρική φόρμουλα αποτίμησης (1):

$$P_t u'(C_t) = E_t[\beta u'(C_{t+1})X_{t+1}]$$

και υπό την προϋπόθεση ότι:

- 1) το payoff του τίτλου είναι η μελλοντική τιμή, $X_{t+1} = P_{t+1}$ (ισχύει όταν το μέρισμα είναι μηδέν αν πρόκειται για μια μετοχή),
- 2) Οι επενδυτές είναι αδιάφοροι μεταξύ παρούσας και μελλοντικής κατανάλωσης ($u'(C_t) = u'(C_{t+1})$). Αυτό μπορεί να συμβαίνει (α) όταν η χρησιμότητα, $u(C)$, είναι γραμμική συνάρτηση της κατανάλωσης ή (β) η κατανάλωση είναι τυχαίος περίπατος, δηλ. μη προβλέψιμη, ($E_t[C_{t+1}] = C_t$)
- 3) Το χρονικό διάστημα μεταξύ t και $t + 1$ είναι μικρό, δηλ. $\beta = 1$ συνεπάγεται ότι :

$$P_t = E_t[P_{t+1}] \quad (22)$$

Σύμφωνα με την σχέση (22), οι τιμές των αξιογράφων είναι μη προβλέψιμες. Η τιμή είναι ένα martingale, δηλαδή η καλύτερη πρόβλεψη της μελλοντικής τιμής είναι η σημερινή τιμή.

Μια ειδική περίπτωση ενός martingale είναι ένα random walk. Σε λογαρίθμους

$$p_{t+1} = p_t + \varepsilon_{t+1} \quad (23)$$

όπου $E(\varepsilon) = 0$, $var(\varepsilon) = \sigma^2$.

Η στοχαστική διαδικασία (23) χαρακτηρίζει κερδοσκοπικές τιμές σε βραχυχρόνιους ορίζοντες.

Σε μακροχρόνιους ορίζοντες, οι συνθήκες 1-3 δεν ισχύουν (η κατανάλωση παρουσιάζει διακύμανση και $\beta < 1$). Τότε:

$$\begin{aligned} E_t(R_{t+1}^i - R_t^f) &= -\frac{cov_t(M_{t+1}, R_{t+1}^i)}{E(M_{t+1})} \\ &= -\frac{\sigma_t(M_{t+1})}{E_t(M_{t+1})} \sigma_t(R_{t+1}) \rho_t(M_{t+1}, R_t) \\ &= \gamma_t \sigma_t(\Delta C_{t+1}) \sigma_t(R_{t+1}) \rho_t(\Delta C_{t+1}, R_{t+1}) \end{aligned}$$

Το ασφάλιστρο κινδύνου μεταβάλλεται διαχρονικά όταν μεταβάλλεται:

- 1) Ο βαθμός αποστροφής κινδύνου των επενδυτών (γ_t),
- 2) Η διακύμανση της κατανάλωσης ($\sigma_t(\Delta c_{t+1})$),
- 3) Η διακύμανση των αποδόσεων ($\sigma_t(R_{t+1})$),
- 4) Ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων και του ρυθμού μεταβολής της κατανάλωσης ($\rho_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1})$).

- Στο βαθμό που το ασφάλιστρο κινδύνου μεταβάλλεται διαχρονικά κατά τη διάρκεια του οικονομικού κύκλου, οι αποδόσεις είναι προβλέψιμες υπό την προϋπόθεση ότι είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε οικονομετρικά υποδείγματα που έχουν προβλεπτική ικανότητα για τον οικονομικό κύκλο και να συνδέσουμε τις παραπάνω 4 μεταβλητές με τον οικονομικό κύκλο.

Κεφάλαιο 5: Στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης και πολυπαραγοντικά υποδείγματα αποτίμησης

Δείξαμε ήδη ότι η κεντρική φόρμουλα αποτίμησης, $P = E(MX)$ είναι ισοδύναμη με ένα μονοπαραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης:

$$E_t(R_{t+1}^i) = R_t^f - \beta_{i,M}\lambda_M \quad (35)$$

όπου $\beta_{i,M}$ (beta) είναι ο συντελεστής παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων του R_{t+1}^i στο M_{t+1} . Το $\beta_{i,M}$ αντιπροσωπεύει την ποσότητα κινδύνου και διαφέρει μεταξύ διαφόρων αξιογράφων ανάλογα με την έκθεση του κάθε αξιογράφου στον κίνδυνο. Το λ_M αντιπροσωπεύει την τιμή του κινδύνου (αναμενόμενο ασφάλιστρο ανά μονάδα κινδύνου) και είναι κοινό για όλα τα αξιόγραφα.

Κατά συνέπεια, το υπόδειγμα του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης μπορεί να εκφραστεί ως ένα παραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης στο οποίο ο παράγοντας κινδύνου που καθορίζει την αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση κάθε τίτλου είναι το beta της απόδοσης του τίτλου με τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης.

Μπορούμε να πούμε αντίστροφα ότι κάθε παραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης κρύβει μέσα του μια υπόθεση σχετικά με τους παράγοντες που καθορίζουν το στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης;

Στο κεφάλαιο αυτό θα απαντήσουμε ακριβώς σ' αυτή την ερώτηση. Θα δείξουμε ότι πίσω από κάθε γνωστό υπόδειγμα αποτίμησης της χρηματοοικονομικής όπως το CAPM, ICAPM, APT κλπ. κρύβεται ένα υπόδειγμα του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης και συγκεκριμένα ένα υπόδειγμα όπου ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης είναι μια γραμμική συνάρτηση των παραγόντων που υποθέτει το κάθε υπόδειγμα αποτίμησης.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό για διάφορους λόγους.

Πρώτον, δείχνει ότι τα διάφορα υποδείγματα αποτίμησης της χρηματοοικονομικής μπορούν να συνδεθούν με το βασικό υπόδειγμα αποτίμησης του καταναλωτή, το υπόδειγμα Consumption-CAPM, και να προκύψουν ως υποπεριπτώσεις αυτού του υποδείγματος. Αυτό είναι πολύ σημαντικό τόσο γιατί καθιερώνει το C-CAPM ως το κεντρικό υπόδειγμα της χρηματοοικονομικής όσο και γιατί επιτρέπει να κατανοήσουμε καλύτερα τις βασικές υποθέσεις του κάθε επιμέρους υποδείγματος.

Δεύτερον, συνδέει τα εμπειρικά παραγοντικά υποδείγματα με τη θεωρία αποτίμησης καθώς δείχνει ότι οι παράγοντες κινδύνου που τιμολογεί η αγορά συνδέονται με την οριακή χρησιμότητα του καταναλωτή. Συγκεκριμένα, δείχνει ότι οι παράγοντες αυτοί πρέπει να έχουν προβλεπτική ικανότητα για την αλλαγή της μελλοντικής χρησιμότητας.

Θεώρημα 1

Έστω το υπόδειγμα στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης:

$$M = a - bf; E(f) = 0, E(MR^e) = 0$$

όπου f είναι μια τυχαία μεταβλητή (παράγοντας, factor) και a, b είναι σταθερές, τότε το ασφάλιστρο κινδύνου R^e ($R^e = R^i - R^f$) ακολουθεί ένα παραγοντικό υπόδειγμα (factor model):

$$E(R^e) = \beta\lambda$$

όπου $\beta = cov(f, R^e)/var(f)$ είναι ο συντελεστής beta μιας παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων του R^e στο f και $\lambda = \frac{b}{a}var(f)$

Απόδειξη:

Από την κεντρική φόρμουλα αποτίμησης έχουμε:

$$0 = E(MR^e) = E(M)E(R^e) + cov(M, R^e)$$

$$0 = aE(R^e) - b cov(f, R^e). \text{ Λύνοντας ως προς } E(R^e) \text{ έχουμε}$$

$$E(R^e) = \frac{b}{a} cov(f, R^e)$$

Ορίζοντας το β ως $\beta = cov(f, R^e)/var(f)$, έχουμε

$$E(R^e) = \frac{b}{a} var(f) \left(\frac{cov(f, R^e)}{var(f)} \right) = \beta\lambda$$

Το θεώρημα 1 μπορεί να γενικευθεί σε ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης.

Θεώρημα 2

Έστω το υπόδειγμα στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης:

$$M = 1 - b'f; E(f) = 0, E(MR^e) = 0$$

όπου f είναι ένα διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών (παραγόντων) με $E(f) = 0$, και b ένα διάνυσμα σταθερών, τότε το ασφάλιστρο κινδύνου R^e ($R^e = R^i - R^f$) ακολουθεί ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα (multi-factor model):

$$E(R^e) = \beta'\lambda$$

όπου β είναι το διάνυσμα των συντελεστών beta μιας παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων του R^e στο f και λ είναι το διάνυσμα των τιμών κινδύνου.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1.

Επιλογή παραγόντων

Το μεγάλο πλεονέκτημα των παραγοντικών υποδειγμάτων σε σύγκριση με το βασικό υπόδειγμα του καταναλωτή $E(MR) = 1$ έγκειται στο ότι οι παράγοντες είναι συχνά μετρήσιμοι ενώ ο οριακός λόγος υποκατάστασης (MRS) δεν είναι. Παρόλαυτα, το βασικό ερώτημα που προκύπτει κατά την χρήση τέτοιων υποδειγμάτων είναι ποιοι παράγοντες ανήκουν σε ένα υπόδειγμα αποτίμησης και ποια είναι η οικονομική ερμηνεία τους. Σε πολλά εμπειρικά πολυπαραγοντικά υποδείγματα αποτίμησης οι παράγοντες επιλέγονται αυθαίρετα. Στο σημείο αυτό γίνεται εμφανής η χρησιμότητα των θεωρημάτων 1 και 2 του προηγούμενου κεφαλαίου γιατί συνδέουν το στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης με τους παράγοντες κινδύνου. Γενικά, αν το M αποτιμά τα αξιόγραφα σωστά, τότε κάθε παράγοντας που έχει υψηλή συσχέτιση με το M θα αποτιμήσει εξίσου καλά τα αξιόγραφα. Άρα το γραμμικό υπόδειγμα,

$$M_{t+1} = MRS = \beta \frac{w(C_{t+1})}{w(C_t)} = \alpha + bf_{t+1} \quad (36)$$

το οποίο κρύβεται πίσω από ένα παραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης υποθέτει ότι ο οριακός λόγος υποκατάστασης (MRS) είναι μια γραμμική συνάρτηση του f .

Τα παραγοντικά υποδείγματα μπορούν να συνδεθούν με τη θεωρία αποτίμησης του καταναλωτή. Πολλά από τα υποδείγματα αυτά είναι παραλλαγές του βασικού υποδείγματος αποτίμησης κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς. Γενικά, τα παραγοντικά υποδείγματα αποτίμησης αντικαθιστούν τον οριακό λόγο υποκατάστασης με ένα σετ οικονομικών μεταβλητών όπως αποδόσεις χαρτοφυλακίων, επιτόκια, την κλίση της καμπύλης επιτοκίων, διαφορές απόδοσης εταιρικών ομολόγων από ομόλογα του δημοσίου κλπ. Τα οποία έχουν υψηλή συσχέτιση με τον οριακό λόγο υποκατάστασης του καταναλωτή.

Για να μπορέσουμε να συνδέσουμε τα παραγοντικά υποδείγματα αποτίμησης με τη θεωρία του καταναλωτή, χρειαζόμαστε μια θεωρία που να συνδέει το MRS με ένα σετ μετρήσιμων οικονομικών μεταβλητών οι οποίες είναι σε θέση να προσεγγίσουν τη μεταβολή του MRS στο χρόνο. Θεωρητικά υποδείγματα τέτοιου τύπου είναι τα δυναμικά στοχαστικά υποδείγματα γενικής ισορροπίας (DSGE: Dynamic Stochastic General Equilibrium models). Σε αυτά τα υποδείγματα, ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης καθορίζεται ως συνάρτηση ενός σετ εξωγενών μεταβλητών (deep parameters), $\Delta c_{t+1} = g(f_{t+1})$, οι οποίες σε γενικές γραμμές περιγράφουν την τεχνολογία της οικονομίας και τις προτιμήσεις των καταναλωτών. Πώς μπορούμε από αυτή τη σχέση να φτάσουμε σε ένα παραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης;

Πως προκύπτουν παραγοντικά υποδείγματα χωρίς την κατανάλωση από το CCAPM?

Γενικοί κανόνες

Παραγοντικά υποδείγματα χωρίς την κατανάλωση μπορούν να προκύψουν από το CCAPM αν η μεταβολή της κατανάλωσης έχει συσχέτιση με έναν παράγοντα κινδύνου ή μεταβλητή κατάστασης f : $\Delta c_{t+1} = g(f_{t+1})$.

Ας θυμηθούμε ότι η βασική φόρμουλα αποτίμησης του υποδείγματος του καταναλωτή με

εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας είναι

$E_t(R_{t+1}^i) - R_t^f = \gamma cov_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^i)$. Ένα παραγοντικό υπόδειγμα χωρίς την κατανάλωση ως παράγοντα κινδύνου μπορεί να προκύψει με δύο τρόπους: (α) υποθέτουμε κανονική από κοινού κατανομή των μεταβλητών και εφαρμόζουμε το λήμμα του Stein για να μετατρέψουμε το $cov_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^i)$ σε $cov_t(f_{t+1}, R_{t+1}^i)$. (β) Παίρνουμε μια γραμμική προσέγγιση Taylor 1^{ου} βαθμού της συνάρτησης $\Delta c_{t+1} = g(f_{t+1})$.

Μέθοδος (α): Λήμμα του Stein:

Υποθέτοντας $\Delta c_{t+1} = g(f_{t+1})$ και εφαρμόζοντας το λήμμα του Stein έχουμε:

$$cov_t(g(f_{t+1}), R_{t+1}^i) = E_t(g') cov_t(R_{t+1}^i, f_{t+1})$$

Άρα, παίρνουμε:

$$E_t(R_{t+1}^i) - R_t^f = \gamma E_t(g') cov_t(R_{t+1}^i, f_{t+1})$$

Κατά συνέπεια, παίρνουμε ένα παραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης:

$$E_t(R_{t+1}^i) - R_t^f = \lambda_f \beta_{i,f}$$

στο οποίο το ασφάλιστρο ανά μονάδα κινδύνου είναι $\lambda_f = \gamma E_t(g') var_t(f)$, και η ποσότητα έκθεσης στον κίνδυνο είναι $\beta_{i,f} = cov_t(R_{t+1}^i, f_{t+1}) / var_t(f)$.

Σημείωση: Για να εφαρμόσουμε το Λήμμα του Stein, πρέπει να υποθέσουμε κανονική κατανομή. Γενικά όμως δεν είναι απαραίτητη αυτή η υπόθεση διότι μπορούμε να πάρουμε μια γραμμική προσέγγιση Taylor χωρίς να υποθέσουμε μια συγκεκριμένη κατανομή (Μέθοδος β).

Μέθοδος (β): γραμμική προσέγγιση Taylor 1^{ου} βαθμού:

Η γραμμική προσέγγιση γύρω από ένα σημείο f_0 είναι:

$g(f_{t+1}) = g(f_0) + g'(f_{t+1} - f_0) = k + g' f_{t+1}$ όπου το $g' = g'(f_0)$ και $k = g(f_0) - g' f_0$ μια σταθερά. Κατά συνέπεια έχουμε: $E_t(R_{t+1}^i) - R_t^f = \gamma cov_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}^i) = \gamma g' cov_t(f_{t+1}, R_{t+1}^i)$.

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με $var_t(f)$ παίρνουμε το παραγοντικό υπόδειγμα στο f .

Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων (CAPM)

Το CAPM προβλέπει ότι οι αναμενόμενες αποδόσεις σχετίζονται γραμμικά με την απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου:

$$E_t(R_{t+1}^i) = R_{t+1}^f + \lambda_t \beta_{i,w,t} \quad (37)$$

Όπου λ_t είναι η τιμή του κινδύνου (κοινή σε όλα τα αξιόγραφα) και

$\beta_{i,w,t} = cov(R_{t+1}^i, R_{t+1}^w) / var(R_{t+1}^w)$ είναι η ποσότητα κινδύνου (ο συντελεστής μιας γραμμικής παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων της απόδοσης στην απόδοση του χαρτοφυλακίου

πλούτου).

Σε όρους του SDF, το CAPM μπορεί να γραφεί ως:

$$M_{t+1} = \alpha - bR_{t+1}^w \quad (38)$$

Όπου α και b είναι δυο σταθερές.

Απόδειξη:

Από την $E_t(R_{t+1}^i, M_{t+1}) = 1 \Rightarrow E_t(R_{t+1}^i) - R^f = -R^f \text{cov}_t(R_{t+1}^i, M_{t+1})$. Αντικαθιστώντας το M_{t+1} από την (38) και υπολογίζοντας την συνδιακύμανση: $E_t(R_{t+1}^i) - R^f = R^f b \text{cov}_t(R_{t+1}^i, R_{t+1}^w)$. Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας τη δεξιά πλευρά με $\text{var}(R_{t+1}^w)$ $E_t(R_{t+1}^i) = R^f + \lambda \beta_{i,w}$, όπου $\lambda = bR^f \text{var}(R_{t+1}^w)$ και $\beta_{i,w,t} = \text{cov}_t(R_{t+1}^i, R_{t+1}^w) / \text{var}(R_{t+1}^w)$.

Όπως είπαμε παραπάνω, το υπόδειγμα CAPM, όπως και μια σειρά άλλα πολύ γνωστά υποδείγματα αποτίμησης στη χρηματοοικονομική, μπορεί να αναχθεί σε μια υποπερίπτωση του γενικού υποδείγματος του καταναλωτή (CCAPM), κάτω από κάποιους περιορισμούς. Συγκεκριμένα, μπορούμε να δείξουμε ότι το CAPM προκύπτει από το CCAPM κάτω από τις ακόλουθες εναλλακτικές υποθέσεις:

- Γενική συνάρτηση χρησιμότητας και κανονικές αποδόσεις με δύο περιόδους
- Λογαριθμική χρησιμότητα με άπειρο ορίζοντα

Οικονομική λογική

Αν ισχύει μια από τις δυο αυτές υποθέσεις, τότε ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης είναι συνάρτηση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου πλούτου, άρα ισχύει το CAPM. Συγκεκριμένα, για να προκύπτει το CAPM από το CCAPM, θα πρέπει να ισχύει ότι η μεταβολή της κατανάλωσης έχει τέλεια συσχέτιση με την απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου (απόδοση της αγοράς) $\Delta c = r^w$ και $\text{var}(\Delta c) = \text{var}(r^w)$.

Περίπτωση 1: Υπόδειγμα καταναλωτή με δύο περιόδους και περιορισμό πλούτου

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι γενικής μορφής με τα κοινώς αποδεκτά χαρακτηριστικά καμπυλότητας και κυρτότητας.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο καταναλωτής-επενδυτής γεννιέται με αρχικό πλούτο W_t και δεν έχει εισόδημα από εργασία. Κατά την περίοδο t ο καταναλωτής καταναλώνει ένα ποσό C_t του πλούτου και επενδύει το υπόλοιπο στο χαρτοφυλάκιο πλούτου. Κατά συνέπεια, ο πλούτος την επόμενη περίοδο, $t + 1$, είναι: $W_{t+1} = R_{t+1}^w(W_t - C_t)$, όπου R_{t+1}^w είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου. Κατά την τελική περίοδο, $t + 1$ ο επενδυτής καταναλώνει όλο τον εναπομένοντα πλούτο: $C_{t+1} = W_{t+1}$.

Ο οριακός λόγος υποκατάστασης είναι:

$$M_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \beta \frac{u'(R_{t+1}^w(W_t - C_t))}{u'(C_t)} = g(R_{t+1}^w) \quad (42)$$

και το ασφάλιστρο κινδύνου είναι:

$$E_t(R_{t+1}^i) - R^f = -\frac{cov_t(M_{t+1}, R_{t+1}^i)}{E_t(M_{t+1})} \quad (43)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι οι αποδόσεις του αξιογράφου και του χαρτοφυλακίου πλούτου ακολουθούν την κανονική κατανομή, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα του Stein για να υπολογίσουμε την $cov_t(M_{t+1}, R_{t+1}^i)$ όπου $M_{t+1} = g(R_{t+1}^i)$:

$$cov_t(M_{t+1}, R_{t+1}^i) = cov_t(g(R_{t+1}^i), R_{t+1}^i) = E_t[g'] cov_t(R_{t+1}^i, R_{t+1}^w) \quad (44)$$

όπου $E_t(g') = E_t\left[\frac{(W_t - C_t)\beta u''(C_{t+1})}{u'(C_t)}\right] < 0$ αν $W_t - C_t > 0$.

Αντικαθιστώντας την (44) στην (43), παίρνουμε το CAPM:

$$E_t(R_{t+1}^i) - R^f = \lambda_t \beta_{i,w,t}$$

όπου $\lambda_t = -E_t[g'] var(R_{t+1}^w)/g$ και $\beta_{i,w,t} = cov(R_{t+1}^i, R_{t+1}^w)/var(R_{t+1}^w)$.

Περίπτωση 2: Λογαριθμική χρησιμότητα με άπειρο ορίζοντα

Υποθέτουμε ότι η χρησιμότητα είναι λογαριθμική, $u(C_t) = \ln(C_t)$, και οι καταναλωτές μεγιστοποιούν χρησιμότητα για κάθε χρονική περίοδο μέχρι το απώτερο μέλλον:

$$U(C) = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(C_{t+j})$$

Ο καταναλωτής μπορεί να επενδύσει στο χαρτοφυλάκιο πλούτου σε μια τιμή P_t^w ανά μονάδα πλούτου. Κάθε μονάδα πλούτου υπόσχεται στον καταναλωτή ένα μέρισμα D_{t+j} για κάθε μελλοντική περίοδο $t + j$. Όλα τα μερίσματα καταναλώνονται, δηλ. $D_{t+j} = C_{t+j}$. Εξισώνοντας την οριακή απώλεια χρησιμότητας από την αγορά μιας μονάδας πλούτου με την προεξοφλημένη μελλοντική χρησιμότητα από την κατανάλωση του μερίσματος, παίρνουμε:

$$P_t^w = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'(C_{t+j})}{u'(C_t)} C_{t+j}$$

Επειδή με λογαριθμική χρησιμότητα, $u'(C_t) = 1/C_t$, παίρνουμε από την παραπάνω εξίσωση:

$$P_t^w = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{C_t}{C_{t+j}} C_{t+j} = \frac{\beta}{1-\beta} C_t \quad (45)$$

Σύμφωνα με την (45), η τιμή του χαρτοφυλακίου πλούτου είναι γραμμική συνάρτηση της κατανάλωσης.

Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ απόδοσης και κατανάλωσης, χρησιμοποιούμε τον ορισμό της απόδοσης: $R_{t+1}^w = \frac{P_{t+1}^w + C_{t+1}}{P_t^w}$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα P_t^w και P_{t+1}^w από την (45) και έχουμε:

$$R_{t+1}^w = \frac{1}{\beta} \frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{1}{\beta} \frac{u'(C_t)}{u'(C_{t+1})} = M_{t+1}^{-1}$$

Ο SDF είναι:

$$M_{t+1} = \frac{1}{R_{t+1}^w}$$

Για να πάρουμε από τη σχέση αυτή το CAPM, μπορούμε να πάρουμε λογαρίθμους, δηλ. $m_t = r_{t+1}^w$ και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε το θεώρημα 1. Εναλλακτικά, επειδή $R_{t+1}^w = \frac{1}{\beta} \frac{C_{t+1}}{C_t}$, παίρνοντας λογαρίθμους έχουμε $\Delta c_{t+1} = \ln(\beta) + r_{t+1}^w$.

Διαχρονικό CAPM (ICAPM)

Το διαχρονικό (Intertemporal) CAPM του Merton προκύπτει από το βασικό υπόδειγμα CCAPM κάτω από την πρόσθετη υπόθεση ότι η δεσμευμένη κατανομή των αποδόσεων είναι συνάρτηση ενός σετ μεταβλητών (state variables), z_t , οι οποίες σχετίζονται με μελλοντικές αλλαγές του σετ επενδυτικών ευκαιριών. Με άλλα λόγια, οι μεταβλητές αυτές έχουν προβλεπτική ικανότητα για τις μελλοντικές αποδόσεις. Καθώς η κατανάλωση καθορίζεται από τον πλούτο και οι μεταβλητές z_t προβλέπουν την απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου, άρα και την μελλοντική κατανάλωση, η συνάρτηση χρησιμότητας εξαρτάται από τον πλούτο και τις μεταβλητές z_t . Κατά συνέπεια, η value function είναι:

$$\begin{aligned} V(W_t, Z_t) &= \max_{C_t} \left\{ u(C_t) + \beta E_t \left[\max_{C_{t+1}, \dots, C_\infty} E_{t+1} \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(C_{t+j}) \right] \right\} \\ &= \max_{C_t} \{ u(C_t) + \beta E_t [V(W_{t+1}, Z_{t+1})] \} \end{aligned}$$

Ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης από το πρόβλημα αυτό είναι:

$$M_{t+1} = \beta \frac{V_w(W_{t+1}, Z_{t+1})}{V_w(W_t, Z_t)} \quad (46)$$

όπου εφαρμόσαμε το envelope condition $u'(C_t) = V_w(W_t, Z_t)$ για να αντικαταστήσουμε την οριακή χρησιμότητα της κατανάλωσης με την οριακή χρησιμότητα του πλούτου.

Για να πάρουμε ένα παραγοντικό υπόδειγμα, μπορούμε να προσεγγίσουμε γραμμικά την

$$(46): M_{t+1} = a + b_1 R_{t+1}^W + b_2 Z_{t+1}$$

και να γράψουμε το παραγοντικό υπόδειγμα:

$$E_t(R_{t+1}^i) = R_t^f + \lambda_1 \beta_{i,w} + \lambda_2 \beta_{i,z} \quad (47)$$

Η (47) είναι το διαχρονικό *CAPM* του Merton. Σύμφωνα με την (47), το ασφάλιστρο κινδύνου είναι πέρα από τον κίνδυνο αγοράς συνάρτηση μιας σειράς άλλων κινδύνων οι οποίοι σχετίζονται με την μη προβλέψιμη αλλαγή των παραγόντων z_t .

Κεφάλαιο 6: Δεσμευμένα και αδέσμευτα υποδείγματα αποτίμησης

Όλα τα υποδείγματα αποτίμησης που εξετάσαμε ως τώρα είναι δεσμευμένα (στην διαθέσιμη πληροφόρηση) υπό την έννοια ότι καθορίζουν το αναμενόμενο ασφάλιστρο κινδύνου των αξιογράφων στο χρόνο $t+1$ δεδομένης της πληροφόρησης των επενδυτών στο χρόνο t . Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τον δεσμευμένο μέσο της απόδοσης: $E_t(R_{t+1}^i)$.

Για παράδειγμα, το CAPM προβλέπει ότι το (αναμενόμενο με βάση την πληροφόρηση στο χρόνο t) ασφάλιστρο κινδύνου ενός αξιόγραφου i , $E_t(R_{t+1}^i) - R_t^f$, σχετίζεται γραμμικά με το ασφάλιστρο κινδύνου του χαρτοφυλακίου πλούτου, $E_t(R_{t+1}^w) - R_t^f$

$$E_t(R_{t+1}^i) - R_t^f = \beta_{i,w,t}(E_t(R_{t+1}^w) - R_t^f) \quad (37')$$

Όπου $\beta_{i,w,t} = cov(R_{t+1}^i, R_{t+1}^w) / var(R_{t+1}^w)$ είναι το beta του αξιογράφου, δηλ. ο συντελεστής μιας γραμμικής παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων της αναμενόμενης υπερβάλλουσας απόδοσης του αξιογράφου στην αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση του χαρτοφυλακίου πλούτου.

Απόδειξη της (37):

Έστω ότι ισχύει το CAPM: $E_t(R_{t+1}^i) = R_{t+1}^f + \lambda_t \beta_{i,w,t}$. Αν το CAPM αποτιμά όλα τα αξιόγραφα, αποτιμά και το χαρτοφυλάκιο πλούτου, δηλ.: $E_t(R_{t+1}^w) = R_{t+1}^f + \lambda_t$ καθώς $\beta_{w,w,t} = 1$. Αντικαθιστώντας στην (37) για το $\lambda_t = E_t(R_{t+1}^w) - R_{t+1}^f$ προκύπτει η (37').

Το πρόβλημα με την οικονομετρική εκτίμηση του δεσμευμένου υποδείγματος (37') είναι ότι οι αναμενόμενες αποδόσεις τόσο του αξιογράφου όσο και του χαρτοφυλακίου πλούτου δεν είναι παρατηρήσιμες. Για το λόγο αυτό, μεγάλος αριθμός εμπειρικών ερευνών έχει επικεντρωθεί στην εκτίμηση του αδέσμευτου υποδείγματος

$$E(R_{t+1}^i) - R_t^f = \beta_{i,w}(E(R_{t+1}^w) - R_t^f) \quad (37'')$$

Όπου $E(R_{t+1}^i)$, $E(R_{t+1}^w)$ είναι ο αδέσμευτος (δειγματικός) μέσος της απόδοσης του αξιόγραφου i και του χαρτοφυλακίου πλούτου αντίστοιχα και το $\beta_{i,w}$ είναι το μέσο δειγματικό beta, δηλ. ο λόγος της αδέσμευτης συνδιακύμανσης προς την αδέσμευτη διακύμανση.

Το πρόβλημα που προκύπτει είναι προφανώς ότι η επεξηγηματική ικανότητα του αδέσμευτου υποδείγματος (37'') είναι ανεπαρκής παρότι το δεσμευμένο υπόδειγμα μπορεί να είναι το αληθινό υπόδειγμα σύμφωνα με το οποίο οι επενδυτές εκτιμούσαν τα ασφάλιστρα κινδύνου.

Ο λόγος είναι ότι στην πραγματικότητα (δηλ. στην δεσμευμένη μορφή (37') του υποδείγματος) το ασφάλιστρο κινδύνου των αξιογράφων είναι κυμαινόμενα στο χρόνο καθώς τόσο το beta όσο και το ασφάλιστρο κινδύνου του χαρτοφυλακίου πλούτου είναι κυμαινόμενα, ενώ στην αδέσμευτη

μορφή (37'') η διακύμανση αυτή στο χρόνο χάνεται καθώς παίρνουμε τους αδέσμευτους αριθμητικούς μέσους.

Πιο συγκεκριμένα, αν η διακύμανση του beta στο χρόνο είναι συνάρτηση κάποιου παράγοντα κινδύνου z , τότε το αδέσμευτο υπόδειγμα (37'') είναι λάθος διότι δεν συμπεριλαμβάνει στη δεξιά πλευρά την συνδιακύμανση του ασφάλιστρου κινδύνου του χαρτοφυλακίου πλούτου με το z (βλ. Jagannathan & Wang 1996).

Για να το δείξουμε αυτό, έστω ότι το αληθινό υπόδειγμα αποτίμησης είναι το μονοπαράγοντικό υπόδειγμα CAPM (37) και έστω ότι το beta είναι μια συνάρτηση ενός παράγοντα κινδύνου z :

$$\beta_{i,w,t} = \bar{\beta}_{i,w} + f_i(z_t) \quad (52)$$

όπου $\bar{\beta}_{i,w}$ είναι το μέσο beta (μια σταθερά), το z_t είναι ένας παράγοντας κινδύνου της συνολικής αγοράς (με μέσο = 0), ο οποίος συσχετίζεται με το ασφάλιστρο κινδύνου του χαρτοφυλακίου πλούτου, δηλ. $cov(z_t, R_{t+1}^e) \neq 0$ και $E(f_i(0)) = 0$. Τέτοιες μεταβλητές μπορεί να είναι μεταβλητές που σχετίζονται με τον οικονομικό κύκλο όπως η κλίση της καμπύλης επιτοκίων, το ασφάλιστρο κινδύνου εταιρικών ομολόγων, η διακύμανση της αγοράς κλπ. Η (52) υποθέτει ότι η έκθεση στο κίνδυνο της αγοράς του αξιογράφου i (beta) είναι συνάρτηση ενός παράγοντα z_t . Για παράδειγμα, μετοχές με μεγάλη μόχλευση μπορεί να είναι πιο ευαίσθητες σε αλλαγές των επιτοκίων από ότι μετοχές με μικρή μόχλευση, μετοχές εταιριών καταναλωτικών αγαθών μπορεί να είναι πιο ευαίσθητες σε αλλαγές του ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ από μετοχές εταιριών με μικρότερη εξάρτηση από τον οικονομικό κύκλο κλπ.

Αντικαθιστώντας την (52) στην (37), έχουμε

$$E_t(R_{t+1}^i) - R_t^f = (\bar{\beta}_{i,w} + f_i(z_t))(E_t(R_{t+1}^w) - R_t^f) \quad (53)$$

Στη συνέχεια παίρνουμε τον αδέσμευτο μέσο της (53), εφαρμόζοντας τον κανόνα $E(E_t(R_{t+1}^i)) = E(R_{t+1}^i)$:

$$E(R_{t+1}^i) - R_t^f = \bar{\beta}_{i,w}(E(R_{t+1}^w) - R_t^f) + E(f_i(z_t)(R_{t+1}^w - R_t^f)) \quad (53')$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα 4 (λήμμα του Stein) για να υπολογίσουμε το $E(f_i(z_t)(R_{t+1}^w - R_t^f))$, καταλήγουμε στο εξής αδέσμευτο υπόδειγμα με δύο παράγοντες κινδύνου:

$$E(R_{t+1}^i) - R_t^f = \bar{\beta}_{i,w}(E(R_{t+1}^w) - R_t^f) + \bar{\beta}_{z,w}\lambda_i \quad (54)$$

Όπου $\bar{\beta}_{z,w} = cov(z_t, R_{t+1}^w - R_t^f) / var(R_{t+1}^w - R_t^f)$ το beta του ασφάλιστρου κινδύνου του χαρτοφυλακίου πλούτου με το z_t , το οποίο είναι κοινό για όλα τα αξιόγραφα, και $\lambda_i =$

$E(f_i'(z_t))var(R_{t+1}^w - R_t^f)$ η τιμή του κινδύνου z , η οποία είναι διαφορετική για κάθε αξιόγραφο και εξαρτάται από το βαθμό έκθεσης του αξιόγραφο στον συγκεκριμένο κίνδυνο.

Γενικότερα, αν υποθέσουμε ότι οι παράγοντες κινδύνου είναι k τότε το z_t είναι ένα διάνυσμα ($k \times 1$) και κατά συνέπεια το μονοπαγοντικό δεσμευμένο υπόδειγμα (37') ισοδυναμεί με ένα αδέσμευτο $k+1$ παραγοντικό υπόδειγμα

$$\overline{R_{t+1}^{e,i}} = \bar{\beta}_{i,w} \overline{R_{t+1}^{e,w}} + \bar{\beta}_{z,w} \lambda \quad (55)$$

όπου $\bar{\beta}_{z,w}$ ένα διάνυσμα ($k \times 1$) των betas του ασφάλιστρου κινδύνου με τους k παράγοντες και λ ένα διάνυσμα ($k \times 1$) των ασφάλιστρων κινδύνου των παραγόντων.

Κεφάλαιο 7: Το υπόδειγμα του καταναλωτή με μακροχρόνιους κινδύνους κατανάλωσης

Οικονομική λογική

Στο υπόδειγμα CCAPM, οι καταναλωτές αποτιμούν τον κίνδυνο μιας βραχυχρόνιας μεταβολής της κατανάλωσης. Μια εναλλακτική υπόθεση είναι ότι οι καταναλωτές ενδιαφέρονται (και) για την μακροχρόνια κατανάλωση τους. Το ερώτημα που προκύπτει είναι γιατί οι καταναλωτές να ενδιαφέρονται για την μακροχρόνια πορεία της κατανάλωσης. Αυτό μπορεί να συμβαίνει όταν ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης είναι μακροχρόνια προβλέψιμος (άρα, η κατανάλωση δεν είναι ένας τυχαίος περίπατος). Αν μια διαταραχή σήμερα αλλάζει τον μακροχρόνιο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης, τότε οι καταναλωτές θα θέλουν να προστατευθούν από αυτόν τον κίνδυνο. Κατά συνέπεια, θα επιλέξουν κατά προτίμηση αξιόγραφα τα οποία έχουν χαμηλή συσχέτιση με διαταραχές του μακροχρόνιου ρυθμού μεταβολής της κατανάλωσης.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι οι καταναλωτές ενδιαφέρονται για την κατανάλωση όχι μόνο της επόμενης περιόδου αλλά για την κατανάλωση στις επόμενες k περιόδους (το k μπορεί να είναι π.χ. 3 ή 5 με ετήσια δεδομένα, δηλ. οι καταναλωτές ενδιαφέρονται για την κατανάλωσή τους για τα επόμενα 3-5 χρόνια). Τότε, με εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας, $M_{t+1} = \beta(C_{t+k}/C_t)^{-\gamma}$, η σχέση (16) γίνεται:

$$\begin{aligned} E(R_{t+1}^i) &= R_t^f + \beta_{i,\Delta c,k} \lambda_{\Delta c,k} \\ \lambda_{\Delta c,k} &= \gamma var(C_{t+k} - C_t), \\ \beta_{i,\Delta c,k} &= \frac{cov(R_{t+1}^i, C_{t+k} - C_t)}{var(C_{t+k} - C_t)} \end{aligned}$$

Το παραπάνω υπόδειγμα είναι το μακροχρόνιο CCAPM. Στο υπόδειγμα αυτό, το β ενός αξιογράφου (ποσότητα κινδύνου που περιέχει) καθορίζεται από την συνδιακύμανση των αποδόσεων του αξιογράφου με την μακροχρόνια μεταβολή της κατανάλωσης (από σήμερα έως k περιόδους στο μέλλον). Αντίστοιχα, η τιμή κινδύνου λ είναι γραμμική συνάρτηση της

μακροχρόνιας διακύμανσης της κατανάλωσης. Στο υπόδειγμα αυτό, ο κίνδυνος για τους επενδυτές είναι η μακροχρόνια πορεία της κατανάλωσης.

Η παραπάνω παρουσίαση του υποδείγματος του καταναλωτή με μακροχρόνιους κινδύνους είναι πολύ σχηματική. Οι Bansal & Yaron (2004) πρότειναν ένα υπόδειγμα με μακροχρόνιους κινδύνους κατανάλωσης.

Το υπόδειγμα των Bansal Yaron (2004)

Οι Bansal και Yaron (2004) δείχνουν ότι αν η κατανάλωση είναι σε κάποιο βαθμό προβλέψιμη μακροχρόνια, τότε αλλαγές στις προσδοκίες σχετικά με τον μακροχρόνιο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης αποτελούν μια πηγή κινδύνου πέρα από άμεσες μεταβολές της κατανάλωσης. Μικρές μεταβολές του μακροχρόνιου ρυθμού κατανάλωσης μπορεί να οδηγήσουν σε σχετικά μεγάλες μεταβολές στις τιμές των αξιόγραφων διότι προεξοφλούνται για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Κατά συνέπεια, το ασφάλιστρο κινδύνου των αξιόγραφων είναι συνάρτηση της συνδιακύμανσης των αποδόσεων με διαταραχές στον μακροχρόνιο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης πέρα από την συνδιακύμανση των αποδόσεων με διαταραχές στον βραχυχρόνιο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης.

Οι Bansal και Yaron (2004) υποθέτουν ότι η κατανάλωση ακολουθεί την στοχαστική διαδικασία

$$\begin{aligned}\Delta c_{t+1} &= x_t + \varepsilon_{t+1} \\ x_{t+1} &= \rho x_t + u_{t+1}\end{aligned}$$

όπου x_t είναι μια μεταβλητή κατάστασης η οποία έχει προβλεπτική ικανότητα για την κατανάλωση.

Οι συγγραφείς υποθέτουν ότι η x_t είναι μη παρατηρήσιμη, όμως αξίζει να σημειωθεί ότι σε εμπειρικές εφαρμογές μπορεί να αντικατασταθεί με οποιαδήποτε μακροοικονομική μεταβλητή η οποία έχει προβλεπτική ικανότητα για την κατανάλωση.

Για να αντιληφθούμε την έννοια του μακροχρόνιου κινδύνου στο υπόδειγμα των Bansal και Yaron (2004), αντικαθιστούμε την στοχαστική διαδικασία της x στην στοχαστική διαδικασία της Δc :

$$\Delta c_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + \frac{u_t}{1 - \rho L} = \varepsilon_{t+1} + u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \dots$$

Ας υποθέσουμε ότι στο t η x μεταβάλλεται κατά 1 μονάδα, $u_t = 1$, ενώ $u_{\tau < t} = 0$. Η αναμενόμενη μεταβολή της κατανάλωσης θα είναι:

$$\begin{aligned}E_t \Delta c_{t+1} &= 1 \\ E_t \Delta c_{t+2} &= \rho \\ E_t \Delta c_{t+3} &= \rho^2 \\ &\dots \\ E_t \Delta c_{t+1+j} &= \rho^j\end{aligned}$$

Η σωρευτική αναμενόμενη μεταβολή της κατανάλωσης θα είναι:

$$\sum_{j=0}^{\infty} E_t \Delta c_{t+1+j} = 1 + \rho + \rho^2 + \dots = \frac{1}{1-\rho}$$

Αν $\rho < 1$, αλλά κοντά στην μονάδα, η σωρευτική μεταβολή της κατανάλωσης μπορεί είναι πολύ μεγάλη. Με άλλα λόγια, μια μικρή μεταβολή στην x σήμερα μπορεί να προκαλέσει μακροχρόνια πολύ μεγάλη μεταβολή στην κατανάλωση αν η x χαρακτηρίζεται από εμμονή (persistence). Η μεταβολή της κατανάλωσης είναι προβλέψιμη δεδομένης της πληροφόρησης έως το χρόνο t . Ο μακροχρόνιος κίνδυνος προέρχεται από μη προβλέψιμες μεταβολές της x στον χρόνο $t+1$, οι οποίες μπορεί να προκαλέσουν μακροχρόνιες μεταβολές στην κατανάλωση.

Για τον καθορισμό του ασφάλιστρου κινδύνου προκύπτει από το υπόδειγμα:

$$E_t(r_{i,t+1}^e) + \frac{1}{2} \text{Var}_t(r_{i,t+1}) = B_1 \text{Cov}_t(r_{i,t+1}, \varepsilon_{t+1}) + B_2 \text{Cov}_t(r_{i,t+1}, u_{t+1})$$

όπου B_1 και B_2 είναι δυο σταθερές. Τα ασφάλιστρα κινδύνου στο υπόδειγμα αυτό είναι δύο: (α) ένα ασφάλιστρο για τον κίνδυνο μιας βραχυπρόθεσμης αλλαγής της κατανάλωσης, $\text{Cov}_t(r_{i,t+1}, \varepsilon_{t+1})$, και (β) ένα ασφάλιστρο για τον κίνδυνο μιας μακροπρόθεσμης αλλαγής της κατανάλωσης, $\text{Cov}_t(r_{i,t+1}, u_{t+1})$.

Κεφάλαιο 8: Εμπειρικοί έλεγχοι

1. Διαστρωματικοί έλεγχοι του CCAPM

Οικονομετρικές μέθοδοι

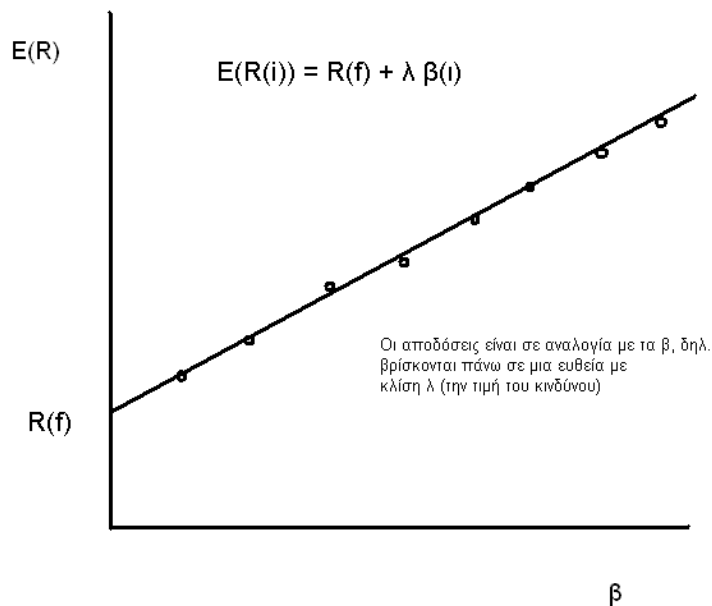
Το υπόδειγμα αποτίμησης CCAPM μας λέει ότι αξιόγραφα που έχουν μεγαλύτερη συνδιακύμανση με την κατανάλωση θα πρέπει να έχουν και υψηλότερα ασφάλιστρα κινδύνου, άρα υψηλότερες αναμενόμενες αποδόσεις,

$$E_t(R_{t+1}^i) = R_t^f + \beta_{i,\Delta c,t} \lambda_{\Delta c,t}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε σημείο t στο χρόνο. Πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε το υπόδειγμα; Το πρόβλημα που προκύπτει είναι ότι το υπόδειγμα (όπως όλα τα υποδείγματα αποτίμησης) είναι σε όρους προσδοκιών, δεσμευμένων στη διαθέσιμη πληροφόρηση σε κάθε χρονικό σημείο t . Οι προσδοκίες των επενδυτών είναι όμως μια μη μετρήσιμη ποσότητα. Για παράδειγμα, το $E_t(R_{t+1}^i)$ είναι η αναμενόμενη απόδοση με βάση την πληροφόρηση στο t . Το ίδιο ισχύει και για τις ποσότητες $\beta_{i,\Delta c,t} \lambda_{\Delta c,t}$, οι οποίες αλλάζουν στο χρόνο καθώς αλλάζει η οικονομική αβεβαιότητα, $\text{var}_t(\Delta c_{t+1})$ και η συνδιακύμανση των αποδόσεων με την κατανάλωση, $\text{cov}_t(R_{t+1}, \Delta c_{t+1})$.

Μια λύση είναι να εκτιμήσουμε το υπόδειγμα χρησιμοποιώντας τις αδέσμευτες ροπές, δηλ. να ελέγξουμε αν σε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα το υπόδειγμα εξηγεί τις μέσες αποδόσεις των αξιογράφων. Ο έλεγχος αυτός είναι διαστρωματικός. Αν τα ασφάλιστρα κινδύνου καθορίζονται σύμφωνα με το υπόδειγμα CCAPM, τότε όλες οι αποδόσεις θα βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με κλίση την τιμή του κινδύνου, λ .

Αν το υπόδειγμα αποτίμησης του καταναλωτή εξηγεί τις αποδόσεις K αξιογράφων $i=1, \dots, K$, τότε στο χώρο $E(R_i) - \beta_i$, η αναμενόμενη (μέση) απόδοση κάθε αξιογράφου i , $E(R_i)$ θα βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία με κλίση λ που θα ξεκινάει από το R^f . Η ευθεία αυτή ονομάζεται "security market line".



Η μέθοδος που έχει εφαρμοστεί στη βιβλιογραφία για τον διαστρωματικό έλεγχο υποδειγμάτων αποτίμησης είναι η λεγόμενη μέθοδος Fama-MacBeth και αποτελείται από δύο βήματα. Έστω ότι έχουμε αποδόσεις K αξιογράφων (ή χαρτοφυλακίων) για T περιόδους στο χρόνο ($t=1, \dots, T$). Για το ίδιο διάστημα, έχουμε επίσης παρατηρήσεις για την μεταβολή της κατανάλωσης, Δc (ή κάποιας μεταβλητής - παράγοντα κινδύνου f αν πρόκειται για ένα άλλο υπόδειγμα αποτίμησης).

1. Εκτίμησε τα β_i των αξιογράφων εκτιμώντας στο χρόνο ($t=1, \dots, T$) τις παλινδρομήσεις $R_{t+1}^i = c_i + \beta_{i,\Delta c} \Delta c_{t+1} + u_{t+1}$ για κάθε αξιογράφο i ξεχωριστά (c_i μια σταθερά).
2. Εκτίμησε την τιμή κινδύνου λ μέσω της διαστρωματικής παλινδρόμησης $R^i - R^f = \alpha_i + \beta_{i,\Delta c} \lambda_{\Delta c}$, χρησιμοποιώντας τη μέση δειγματική απόδοση R^i των $i = 1, \dots, K$ αξιογράφων (τους μέσους στο δείγμα $t = 1, \dots, T$) και το μέσο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, R^f καθώς και τα $\beta_{i,\Delta c}$ από το βήμα 1.

Τα α_i στην παραπάνω παλινδρόμηση είναι τα λάθη αποτίμησης του υποδείγματος, δηλ. η απόκλιση της κάθε απόδοσης από το εκτιμώμενο ασφάλιστρο κινδύνου. Αν το υπόδειγμα εξηγεί τις αποδόσεις, θα πρέπει τα λάθη α_i να είναι κατά μέσο όρο μηδέν και στατιστικά μη σημαντικά. Η μέθοδος των Fama-MacBeth μπορεί να εφαρμοστεί γενικότερα για το έλεγχο οποιουδήποτε υποδείγματος αποτίμησης.

Σημείωση: Σε αντίθεση με το θεωρητικό υπόδειγμα, όπου τα β και λ έχουν διακύμανση στο χρόνο, στο εμπειρικό υπόδειγμα τα β και λ είναι δυο σταθερές. Καθώς το εμπειρικό υπόδειγμα

εκτιμάται με τους διαστρωματικούς μέσους των αποδόσεων, τα β και λ είναι και αυτά οι δειγματικοί μέσοι των αναμενόμενων β και λ σε κάθε σημείο στο χρόνο (βλέπε το κεφάλαιο «Δεσμευμένα και αδέσμευτα υποδείγματα αποτίμησης» για περισσότερες λεπτομέρειες).

Το cross section των αποδόσεων των μετοχών

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την μέση απόδοση των 25 μετοχικών χαρτοφυλακίων των Fama και French. Τα δεδομένα είναι από το site του Kenneth French (http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html).

<i>Average annual real returns 1927-2010. 25 Fama-French portfolios</i>					
	growth	2	3	4	value
small	4.6	10.4	13.7	16.5	19.6
2	8.1	12.8	14.3	15.2	16.0
3	9.3	11.9	13.2	13.6	15.1
4	9.0	10.0	11.7	12.8	13.8
large	8.1	7.8	9.0	9.2	13.1

Οι εταιρίες κατατάσσονται σε 25 χαρτοφυλάκια σύμφωνα με δυο χαρακτηριστικά, το μέγεθος και το λόγο λογιστικής αξίας προς αγοραία αξία (BM: Book-to-Market). Η πρώτη σειρά δείχνει τις μέσες αποδόσεις των μικρών εταιριών, η δεύτερη των αμέσως μεγαλύτερων, κλπ. Η τελευταία σειρά δείχνει τις αποδόσεις των μεγάλων εταιριών. Η πρώτη στήλη δείχνει τις μέσες αποδόσεις των εταιριών με χαμηλό BM (growth), η δεύτερη στήλη δείχνει την μέση απόδοση των εταιριών με το αμέσως υψηλότερο BM και η τελευταία στήλη την μέση απόδοση των εταιριών με το υψηλότερο BM (value). Ο πίνακας δείχνει ότι μικρές εταιρίες είχαν υψηλότερες μέσες αποδόσεις από μεγάλες εταιρίες --με εξαίρεση τις μικρές εταιρίες με χαμηλό BM -- (size premium) και εταιρίες με υψηλό BM είχαν υψηλότερες αποδόσεις από εταιρίες με χαμηλό BM (value premium).

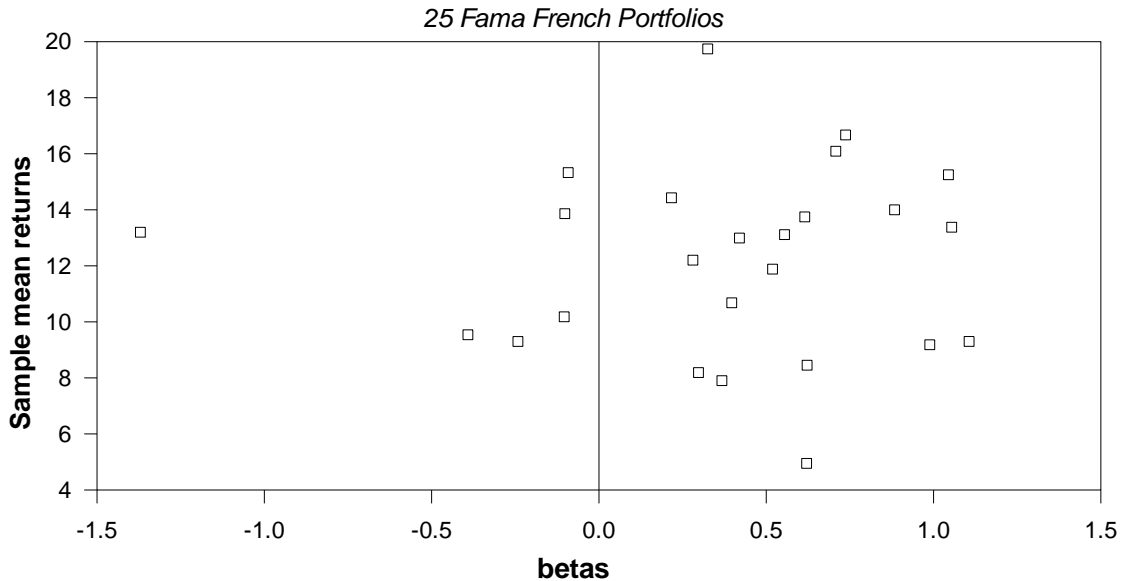
To cross section των Betas του CCAPM

Σύμφωνα με το CCAPM, μετοχές με υψηλή συσχέτιση με την κατανάλωση πρέπει να έχουν υψηλότερα ασφάλιστρα κινδύνου, άρα υψηλότερες μέσες αποδόσεις. Μπορεί το CCAPM να εξηγήσει το cross section των μέσων αποδόσεων μετοχικών χαρτοφυλακίων; Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα beta των μετοχικών χαρτοφυλακίων Fama French ως προς την κατανάλωση.

<i>Consumption betas. 25 Fama-French portfolios, 1927-2010</i>					
	growth	2	3	4	value
small	0.62	0.40	0.88	0.74	0.33
2	0.62	0.55	0.22	-0.09	0.71
3	-0.39	0.28	1.05	0.62	1.04
4	-0.24	-0.10	0.52	0.42	-0.10
large	0.30	0.37	0.99	1.11	-1.37

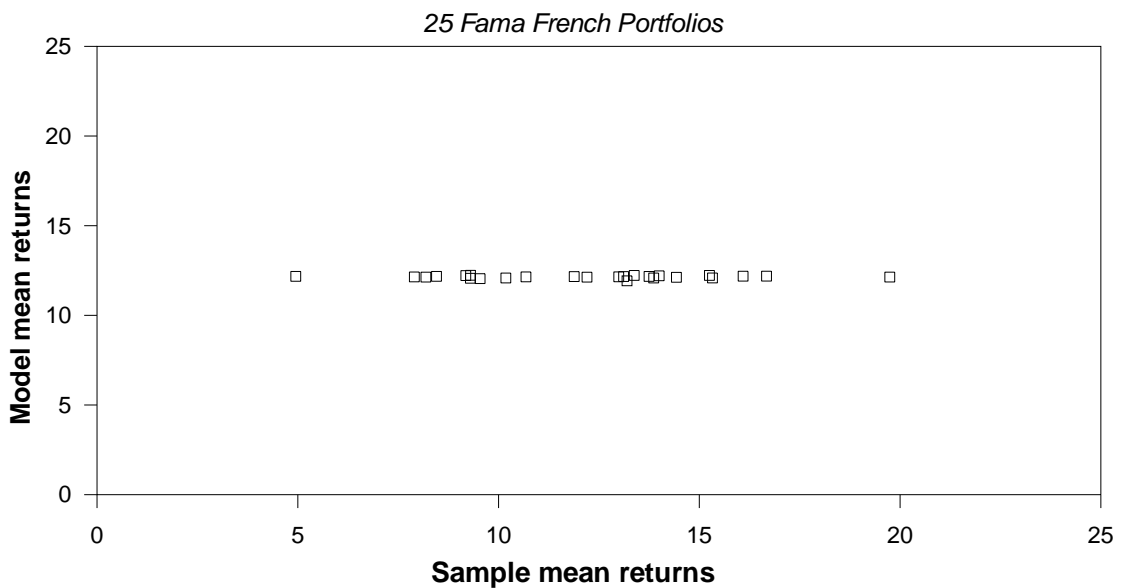
Η πρώτη ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι, με ελάχιστες εξαιρέσεις, όλα τα χαρτοφυλάκια έχουν θετικά β, δηλ. οι μετοχές πρέπει να έχουν ένα θετικό ασφάλιστρο κινδύνου. Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι οι διαφορές των β μεταξύ τους δεν είναι αρκετά μεγάλες ώστε να δικαιολογούν τις διαφορές στα ασφάλιστρα κινδύνου μεταξύ μικρών και μεγάλων εταιριών (size premium) και εταιριών με υψηλό ΒΜ έναντι εταιριών με χαμηλό ΒΜ (value premium). Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις μέσες αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων (κάθετος άξονας) και τα β των χαρτοφυλακίων με την κατανάλωση (οριζόντιος άξονας). Αν το CCAPM εξηγούσε τις μέσες αποδόσεις διαστρωματικά, θα έπρεπε να υπάρχει μια καθαρή θετική συσχέτιση μεταξύ των μέσων αποδόσεων και των β, δηλ. όλα τα σημεία να βρίσκονται γύρω από μια γραμμή με θετική κλίση. Αυτό δεν συμβαίνει. Τα σημεία είναι τυχαία διασπαρμένα στο διάγραμμα.

Scatter Plot: Mean returns vs. consumption betas, 1927-2010



Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις μέσες αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων (οριζόντιος άξονας) και τα ασφάλιστρα κινδύνου ($\lambda \cdot \beta$) των χαρτοφυλακίων σύμφωνα με το υπόδειγμα του καταναλωτή (κάθετος άξονας). Αν το CCAPM εξηγούσε τις μέσες αποδόσεις διαστρωματικά, θα έπρεπε όλα τα σημεία να βρίσκονται γύρω από μια γραμμή με κλίση 90° . Αντίθετα, το διάγραμμα δείχνει ότι, όλα τα χαρτοφυλάκια θα έπρεπε να έχουν σχεδόν το ίδιο ασφάλιστρο κινδύνου. Τα σημεία βρίσκονται όλα πάνω σε μια παράλληλη ευθεία (με κλίση 0). Το υπόδειγμα δεν είναι σε θέση να εξηγήσει τις αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων.

Scatter Plot: CCAPM 1927-2010



Ο λόγος είναι ότι οι διαφορές στα β με την κατανάλωση μεταξύ των 25 χαρτοφυλακίων είναι πολύ μικρές για να εξηγήσουν τις διαφορές στις αποδόσεις τους. Ένα καλό υπόδειγμα πρέπει να παράγει μεγάλες διαφορές στα β για να εξηγήσει τις μεγάλες διαφορές στις διαστρωματικές αποδόσεις.

Μακροχρόνιοι οικονομικοί κίνδυνοι

Ένας πιθανός λόγος αποτυχίας του υποδείγματος του καταναλωτή να εξηγήσει τις διαστρωματικές αποδόσεις των μετοχών είναι ότι η συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων και της μεταβολής της κατανάλωσης στην ίδια περίοδο είναι χαμηλή. Η κατανάλωση αντιδρά με μεγάλη υστέρηση σε μεταβολές των αποδόσεων, γι αυτό και η συσχέτισή τους την ίδια περίοδο είναι πολύ μικρή. Μια εναλλακτική ερμηνεία είναι ότι οι καταναλωτές ενδιαφέρονται για την μακροπρόθεσμη κατανάλωση τους, δηλ. την κατανάλωση στις επόμενες k περιόδους (το k μπορεί να είναι π.χ. 3 ή 5 με ετήσια δεδομένα, δηλ. οι καταναλωτές ενδιαφέρονται για την κατανάλωσή τους για τα επόμενα 3-5 χρόνια).

Το cross section των Betas του μακροχρόνιου CCAPM

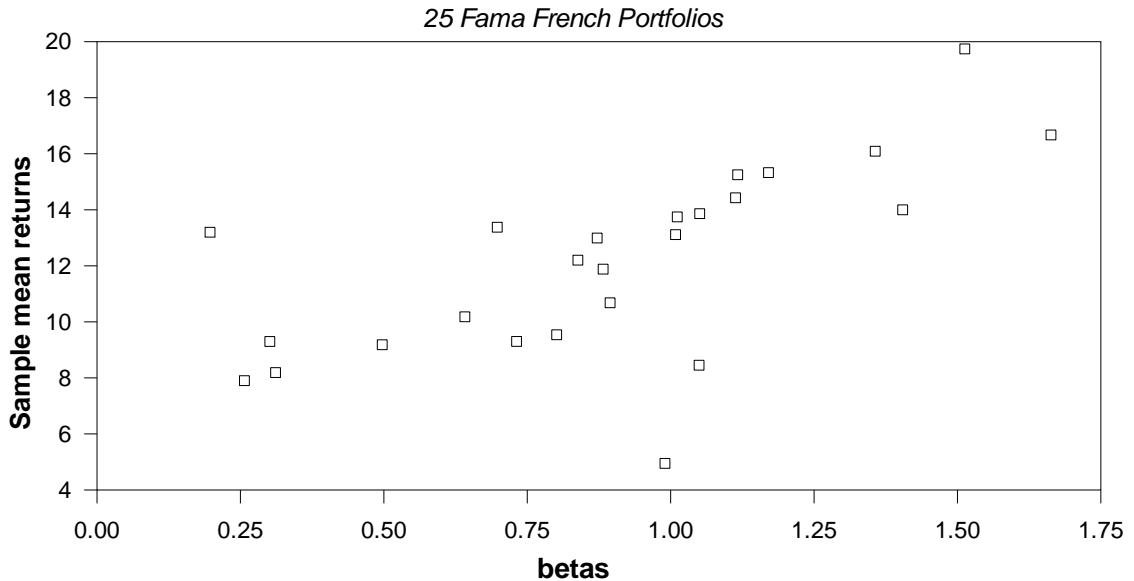
Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα beta των μετοχικών χαρτοφυλακίων Fama French ως προς την μεταβολή της κατανάλωσης τα επόμενα 5 χρόνια.

<i>Long-run consumption betas. 25 Fama-French portfolios, 1927-2010</i>					
	growth	2	3	4	value
small	0.99	0.89	1.40	1.66	1.51
2	1.05	1.01	1.11	1.17	1.36
3	0.80	0.84	0.70	1.01	1.12
4	0.30	0.64	0.88	0.87	1.05
large	0.31	0.26	0.50	0.73	0.20

Τα β είναι πολύ υψηλότερα από τα β του απλού CCAPM. Επίσης, το λ είναι πολύ υψηλότερο (5,7 έναντι 0,12 του απλού CCAPM με t-stat 4,18, δηλ. στατιστικά σημαντικό, έναντι 0,09 του απλού CCAPM). Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι οι διαφορές των β μεταξύ τους είναι αρκετά μεγάλες ώστε να δικαιολογούν τις διαφορές στα ασφάλιστρα κινδύνου μεταξύ μικρών και μεγάλων εταιριών (size premium) και εταιριών με υψηλό BM έναντι εταιριών με χαμηλό BM (value premium).

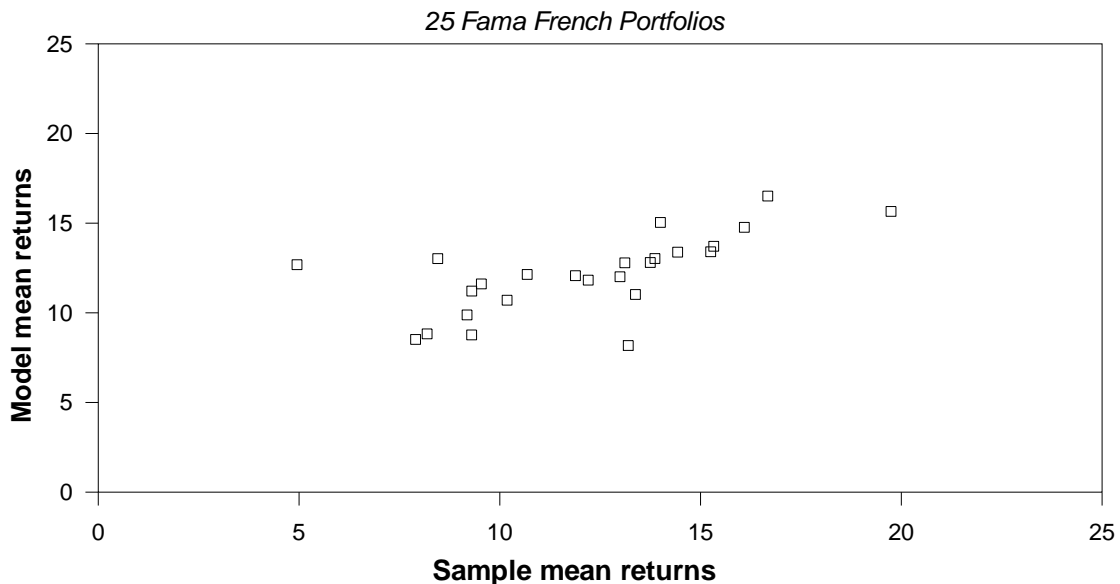
Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις μέσες αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων (κάθετος άξονας) και τα β των χαρτοφυλακίων με την μεταβολή της κατανάλωσης τα επόμενα 5 χρόνια (οριζόντιος άξονας). Η συσχέτιση μεταξύ των μέσων αποδόσεων και των β είναι αρκετά υψηλή, δηλ. τα σημεία βρίσκονται αρκετά κοντά σε μια γραμμή με θετική κλίση.

Scatter Plot: Mean returns vs. long-run consumption betas, 1927-2010



Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις μέσες αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων (οριζόντιος άξονας) και τα ασφάλιστρα κινδύνου ($\lambda \cdot \beta$) των χαρτοφυλακίων σύμφωνα με το μακροχρόνιο υπόδειγμα του καταναλωτή (κάθετος άξονας). Το διάγραμμα δείχνει ότι όλα τα σημεία βρίσκονται αρκετά κοντά σε μια γραμμή με κλίση 90° .

Scatter Plot: Long-run CCAPM 1927-2010



Το μακροχρόνιο CCAPM φαίνεται να εξηγεί πολύ καλύτερα τις διαστρωματικές αποδόσεις από το απλό CCAPM. Το υπόδειγμα έχει ένα $R^2 = 43\%$, δηλ. εξηγεί το 43% της διαστρωματικής διακύμανσης των αποδόσεων.

2. Διαστρωματικοί έλεγχοι του CAPM

Μπορεί το CAPM να εξηγήσει τις μέσες αποδόσεις των μετοχών διαστρωματικά; Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την μέση απόδοση των 25 μετοχικών χαρτοφυλακίων των Fama και French.

<i>Average annual real returns 1927-2010. 25 Fama-French portfolios</i>					
	growth	2	3	4	value
small	4.6	10.4	13.7	16.5	19.6
2	8.1	12.8	14.3	15.2	16.0
3	9.3	11.9	13.2	13.6	15.1
4	9.0	10.0	11.7	12.8	13.8
large	8.1	7.8	9.0	9.2	13.1

Ο πίνακας δείχνει ότι μικρές εταιρίες είχαν υψηλότερες μέσες αποδόσεις από μεγάλες εταιρίες (size premium) και εταιρίες με υψηλό BM είχαν υψηλότερες αποδόσεις από εταιρίες με χαμηλό BM (value premium).

To cross section των Betas του CAPM

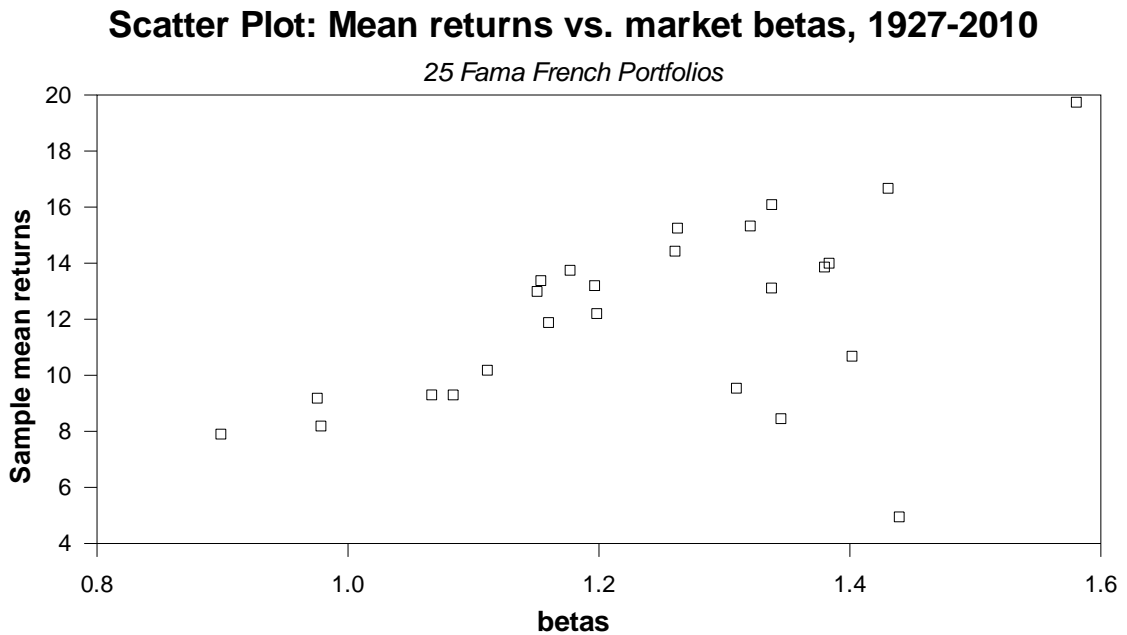
Σύμφωνα με το CAPM, μετοχές με υψηλή συσχέτιση με την αγορά πρέπει να έχουν υψηλότερα ασφάλιστρα κινδύνου, άρα υψηλότερες μέσες αποδόσεις. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα beta των μετοχικών χαρτοφυλακίων Fama French με την απόδοση της αγοράς.

<i>Market betas. 25 Fama-French portfolios, 1927-2010</i>					
	growth	2	3	4	value
small	1.44	1.40	1.38	1.43	1.58
2	1.35	1.34	1.26	1.32	1.34
3	1.31	1.20	1.15	1.18	1.26
4	1.08	1.11	1.16	1.15	1.38
large	0.98	0.90	0.98	1.07	1.20

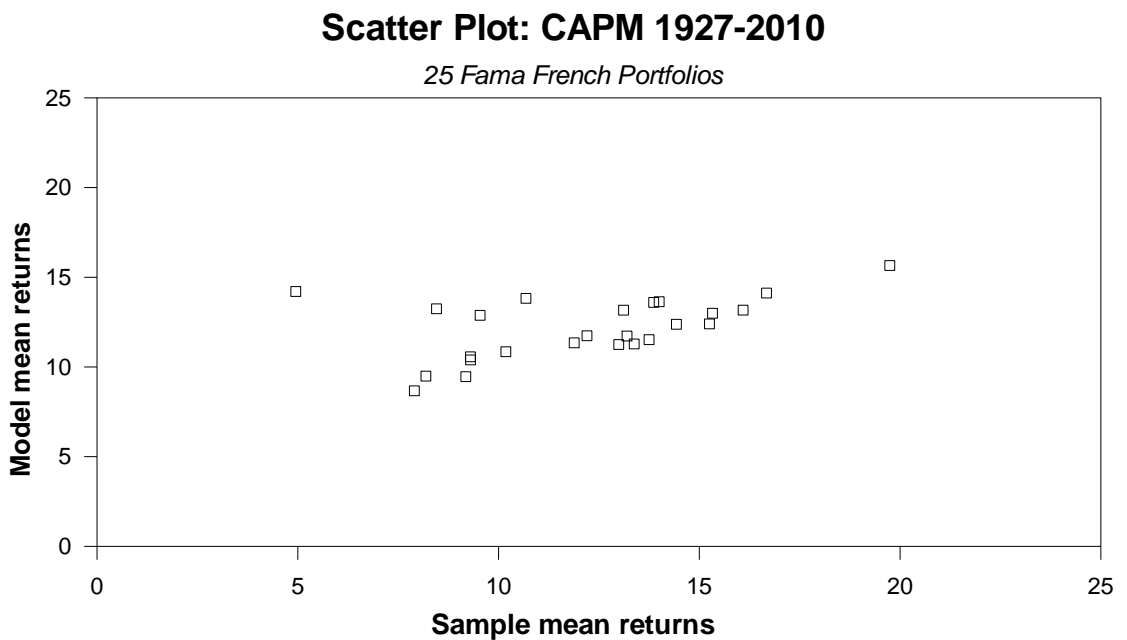
Οι μικρές εταιρίες φαίνεται να έχουν υψηλότερο συστηματικό κίνδυνο (υψηλότερα β) από τις μεγάλες εταιρίες, πράγμα που δικαιολογεί τις υψηλότερες αποδόσεις τους. Το CAPM φαίνεται να εξηγεί το size premium. Όμως τα β των εταιριών με υψηλό BM δεν είναι υψηλότερα από τα β εταιριών με χαμηλό BM. Το CAPM δεν μπορεί να εξηγήσει το value premium.

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις μέσες αποδόσεις των 25 χαρτοφυλακίων (κάθετος άξονας) και τα β των χαρτοφυλακίων με την απόδοση της αγοράς (οριζόντιος άξονας). Αν το CAPM εξηγούσε τις μέσες αποδόσεις διαστρωματικά, θα έπρεπε να υπάρχει μια καθαρή θετική συσχέτιση μεταξύ των μέσων αποδόσεων και των β , δηλ. όλα τα σημεία να βρίσκονται γύρω από μια γραμμή με θετική κλίση. Το διάγραμμα δείχνει ότι μετοχές με υψηλότερες αποδόσεις

πράγματι φαίνεται να έχουν υψηλότερα β . Όμως υπάρχουν και αρκετά χαρτοφυλάκια που έχουν υψηλά β αλλά χαμηλές αποδόσεις (κάτω δεξιά)



Αρκεί η διαφορά στα β για να εξηγήσει τις διαφορές στις αποδόσεις; Αυτό φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα.



Το CAPM εξηγεί το 25% της διασπρωματικής διακύμανσης των αποδόσεων στα 25 χαρτοφυλάκια (έναντι ~0% του απλού CCAPM, αλλά 43% του μακροχρόνιου CCAPM).

Ενότητα II: Επιλογή Χαρτοφυλακίου

Κεφάλαιο 9: Το αποδοτικό όριο

Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρωθούμε στην επιλογή του άριστου χαρτοφυλακίου επενδυτών με ορίζοντα μιας περιόδου σύμφωνα με τον Markowitz. Το υπόδειγμα υποθέτει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή με σταθερή διακύμανση. Κατά συνέπεια, ο επενδυτής ενδιαφέρεται μόνο για τις πρώτες δυο ροπές της κατανομής (μέσο και διακύμανση), καθώς αυτές ορίζουν πλήρως την κανονική κατανομή. Η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι θετική στην αναμενόμενη απόδοση και αρνητική στην διακύμανση του χαρτοφυλακίου.

Αυτό προκύπτει όταν η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή είναι τετραγωνική στην κατανάλωση ή τον πλούτο, καθώς θεωρούμε ότι ο επενδυτής δεν έχει εισόδημα από εργασία και κατά συνέπεια η μόνη πηγή κατανάλωσης είναι ο πλούτος του. Η τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας είναι πολύ περιοριστική. Όμως, μπορούμε να χαλαρώσουμε αυτή την υπόθεση και να αντιληφθούμε την συνάρτηση χρησιμότητας του Markowitz ως το αποτέλεσμα μιας γραμμικής προσέγγισης Taylor 2ου βαθμού μιας γενικής συνάρτησης χρησιμότητας πλούτου $U(W)$ – βλέπε Παράρτημα: Συνάρτηση Χρησιμότητας.

Ο επενδυτής επιλέγει το χαρτοφυλάκιο το οποίο μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση με δεδομένη διακύμανση (κίνδυνο) ή, αντίστροφα, το χαρτοφυλάκιο το οποίο ελαχιστοποιεί την διακύμανση με δεδομένη την αναμενόμενη απόδοση. Καταρχήν θα εξετάσουμε χαρτοφυλάκια αξιολογίων με κίνδυνο. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε χαρτοφυλάκια στα οποία το ένα αξιόγραφο είναι μηδενικού κινδύνου. Όλα τα χαρτοφυλάκια που θα εξετάσουμε δεν υφίστανται περιορισμούς short selling.

Ορίζουμε:

μ : διάνυσμα αναμενόμενων αποδόσεων K περιουσιακών στοιχείων ($K \times 1$)

w : διάνυσμα σταθμίσεων K περιουσιακών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο ($K \times 1$)

Σ : Πίνακας διακύμανσης/συνδιακύμανσης αποδόσεων ($K \times K$)

γ : βαθμός αποστροφής κινδύνου (1×1)

Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι $E(r) = \mu_p = w' \mu$. Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι: $Var[r_{p,t}] = \sigma_p^2 = E(\mu_p \mu_p') = w' \Sigma w$.

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας του επενδυτή ορίζεται ως:

$$\max_w u = w' \mu - \frac{\gamma}{2} w' \Sigma w$$
$$\text{s.t. : } w' i_K = 1$$

όπου i_K είναι το ($K \times 1$) μοναδιαίο διάνυσμα, $i_K' = (1, 1, \dots, 1)$.

Ο

Το πρόβλημα χωρίς περιορισμούς μπορεί να γραφτεί ως:

π

ε

ρ

ι

ο

ρ

ι

$$\max_w u = w' \mu - \frac{\gamma}{2} w' \Sigma w + \eta(1 - w' i_K)$$

όπου η είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange, ο οποίος μπορεί να ορισθεί ως η απόδοση του χαρτοφυλακίου μηδενικού κινδύνου με $\beta=0$ (zero beta portfolio return).

Η συνθήκη πρώτου βαθμού δίνει το άριστο χαρτοφυλάκιο: $\frac{\theta_u}{\theta_w} = 0 \Rightarrow w = \gamma^{-1} \Sigma^{-1} (\mu - \eta i_K)$

Η σύνθεση του άριστου χαρτοφυλακίου κατά Markowitz είναι συνάρτηση τριών παραμέτρων: (α) της αναμενόμενης απόδοσης των αξιόγραφων πάνω από την απόδοση του χαρτοφυλακίου μηδενικού κινδύνου, (β) του κινδύνου των αξιόγραφων, όπως αυτός μετράται από τον πίνακα συνδιακύμανσης και (γ) του βαθμού αποστροφής κινδύνου του επενδυτή.

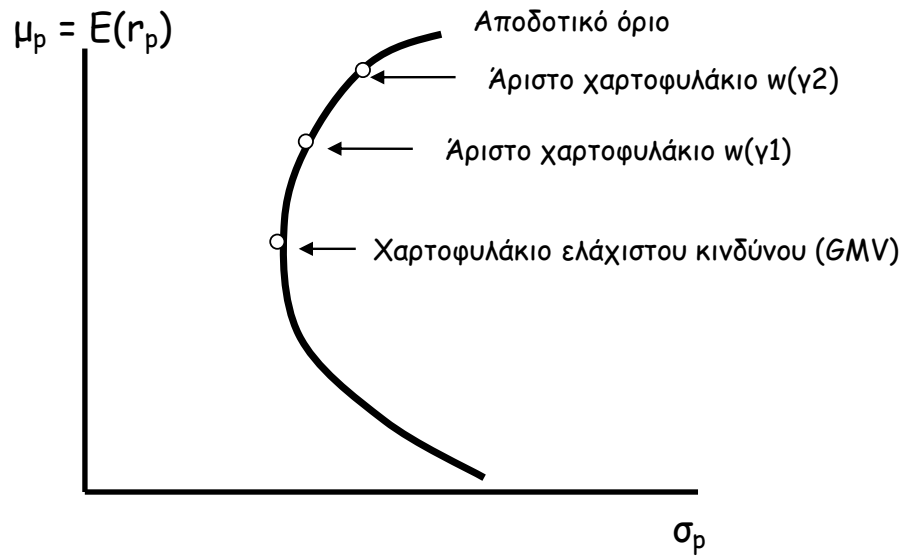
Ας σημειωθεί ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange η δεν είναι γνωστός και κατά κανόνα είναι μη παρατηρήσιμος. Μπορούμε να δείξουμε ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange εξαρτάται από τον βαθμό αποστροφής κινδύνου. Κατά συνέπεια, καθορίζοντας στο πρόβλημά μας τον τύπο του επενδυτή, ορίζουμε ταυτόχρονα και το η .

Απόδειξη: Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά την συνθήκη άριστου χαρτοφυλακίου $w = \gamma^{-1} \Sigma^{-1} (\mu - \eta i_K)$ με i'_K , παίρνουμε: $1 = i'_K w = \gamma^{-1} i'_K \Sigma^{-1} (\mu - \eta i_K)$.

Λύνοντας για τον βαθμό αποστροφής κινδύνου, παίρνουμε:

$$\gamma = i'_K \Sigma^{-1} \mu - \eta i'_K \Sigma^{-1} i_K = B - \eta A$$

όπου A και B είναι δυο σταθερές (efficient set constants).



Διάγραμμα 1: Αποδοτικό όριο

Εφαρμογή: 2 αξιόγραφα με κίνδυνο

Έστω ότι ο επενδυτής επιλέγει χαρτοφυλάκιο με δύο αξιόγραφα. Το πρόβλημα είναι:

$$\max u = (w_1 w_2) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} - \frac{\gamma}{2} (w_1 w_2) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \eta [1 - (w_1 w_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

Η λύση είναι:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \gamma^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 - \eta \\ \mu_2 - \eta \end{pmatrix} = \gamma^{-1} \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 - \eta \\ \mu_2 - \eta \end{pmatrix}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο αντίστροφος ενός πίνακα 2x2 είναι:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_{11} \end{pmatrix}$$

Οι σταθμίσεις του άριστου χαρτοφυλακίου μπορούν να γραφτούν πιο απλά ως:

$$w_1 = \gamma^{-1} [\sigma_{22}(\mu_1 - \eta) - \sigma_{12}(\mu_2 - \eta)] \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}$$

$$w_2 = \gamma^{-1}[-\sigma_{21}(\mu_1 - \eta) + \sigma_{11}(\mu_2 - \eta)] \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}$$

Παράρτημα: Συνάρτηση χρησιμότητας

Η συνάρτηση χρησιμότητας του επενδυτή στο υπόδειγμα του Markowitz είναι το αποτέλεσμα μιας γραμμικής προσέγγισης Taylor 2ου βαθμού μιας συνάρτησης χρησιμότητας $E_t u(C_{t+1})$ με $C_{t+1} = W_{t+1} = w' R_{t+1} (W_t - C_t) = R_{t+1}^w (W_t - C_t)$, όπου $R_{t+1} = 1+r_{t+1}$ και $w' i_K = 1$.

Παίρνοντας την προσέγγιση γύρω από το $R_0^w = 1$ και $W_0 - C_0$ και έχουμε:

$$E_t u(C_{t+1}) = u(W_0 - C_0) + u'(W_0 - C_0) E_t (R_{t+1}^w) + \frac{1}{2} u''(W_0 - C_0) \text{var}_t (R_{t+1}^w - 1)$$

Υποθέτοντας ότι οι αποδόσεις είναι κανονικές και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς

$E_t u(R_{t+1}^w - 1) = w' E_t (R_{t+1} - 1) = w' \mu$ και $\text{Var}_t (R_{t+1}^w) = w' \Sigma w$, όπου $R_{t+1} - 1$ είναι το διάνυσμα των καθαρών αποδόσεων των αξιολογούμενων, έχουμε

$$E_t u(C_{t+1}) = u(W_0 - C_0) + u'(W_0 - C_0) w' \mu + \frac{1}{2} u''(W_0 - C_0) w' \Sigma w.$$

Διαιρώντας και τις δύο πλευρές με $u'(W_0 - C_0)$, έχουμε

$$E_t u(C_{t+1}) \frac{1}{u'(W_0 - C_0)} = \text{const} + w' \mu + \frac{\gamma}{2} w' \Sigma w$$

Όπου $\gamma = -\frac{u''(W_0 - C_0)}{u'(W_0 - C_0)}$ ο βαθμός αποστροφής κινδύνου του επενδυτή.

Εφαρμογή: Κατασκευή αποδοτικού όριου με γεωγραφικούς δείκτες (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία)

Δίδονται οι μηνιαίες αποδόσεις τριών χρηματιστηριακών δεικτών (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία) από το 1973:12 έως το 2002:3. Οι μέσες αποδόσεις είναι:

AUSTRIA: 0.00695

IRELAND: 0.0154

ITALY: 0.0119

Ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι:

	AUSTRIA	IRELAND	ITALY
AUSTRIA	0.00326976420	0.3046565819	0.2535317462
IRELAND	0.001103692866	0.0040138293	0.3711914589
ITALY	0.001039052176	0.0016854824	0.0051368109

Το αποδοτικό όριο μπορεί να κατασκευαστεί από την $w = \gamma^{-1}\Sigma^{-1}(\mu - \eta i_K)$ μεταβάλλοντας το γ και χρησιμοποιώντας την συνθήκη $\gamma = i'_K \Sigma^{-1} \mu - \eta i'_K \Sigma^{-1} i_K = B - \eta A$ για να καθορίσουμε το η .

Στο Διάγραμμα 2 φαίνεται το αποδοτικό όριο των χαρτοφυλακίων τα οποία αποτελούνται από τους παραπάνω τρεις χρηματιστηριακούς Δείκτες για γ από 0.01 (πάνω δεξιά) έως 10 (κάτω αριστερά).

Η σύνθεση του αποδοτικού χαρτοφυλακίου για $\gamma=0.01$ είναι

AUSTRIA: 0.13483

IRELAND: 0.63626

ITALY: 0.22891

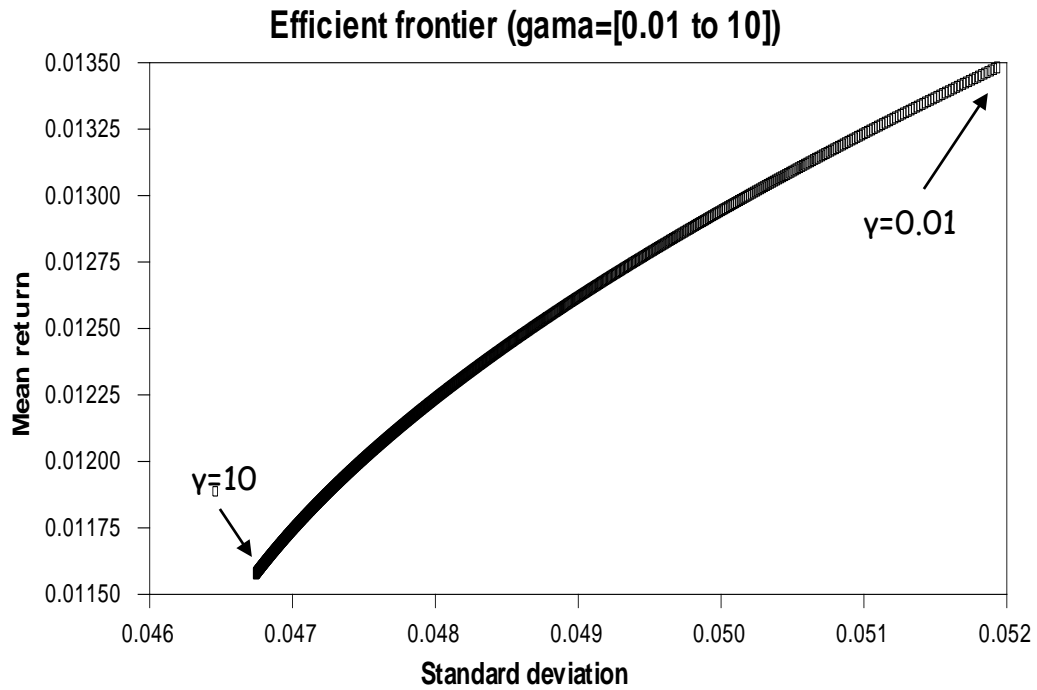
Η σύνθεση του αποδοτικού χαρτοφυλακίου για $\gamma=10$ είναι

AUSTRIA: 0.36360

IRELAND: 0.41609

ITALY: 0.22031

Δεδομένα: emu_ret.WKS. Program: frontier_gama.prg.



Διάγραμμα 2: Υπολογισμός αποδοτικού ορίου με μεταβολή του βαθμού αποστροφής κινδύνου, γ

Το σφαιρικό χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου (GMV: global minimum variance portfolio)

Ποιο είναι το χαρτοφυλάκιο πάνω στο αποδοτικό όριο με την ελάχιστη διακύμανση; Για να το βρούμε, πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \min_w u &= \frac{\gamma}{2} w' \Sigma w \\ \text{s.t. : } w' i_K &= 1 \end{aligned}$$

Ή:

$$\min_w u = \frac{\gamma}{2} w' \Sigma w + \eta(1 - w' i_K)$$

Η συνθήκη πρώτου βαθμού είναι:

$$w = \gamma^{-1} \Sigma^{-1} \eta i_K$$

Για να καθορίσουμε το η πολλαπλασιάζουμε την συνθήκη πρώτου βαθμού με i_K' . Από τον

π
ε
ρ
ι
ο
ρ
ι
σ

$$1 = i'_K w = \eta \gamma^{-1} i'_K \Sigma^{-1} i_K \Rightarrow \eta = \frac{\gamma}{i'_K \Sigma^{-1} i_K}$$

Αντικαθιστώντας το η στην συνθήκη πρώτου βαθμού δίνει τα σταθμά του σφαιρικού χαρτοφυλακίου ελάχιστου κινδύνου (GMV portfolio):

$$w_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1} i_K}{i'_K \Sigma^{-1} i_K}$$

Με άλλα λόγια, η άριστη στάθμιση του στοιχείου i στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου (δηλ. το στοιχείο i του διανύσματος w) δίδεται ως:

$$W_{GMV,i} = \frac{\text{Άθροισμα σειράς } i \text{ } \Sigma^{-1}}{\text{Άθροισμα όλων των στοιχείων } \Sigma^{-1}}$$

Εφαρμογή: Καθορισμός σφαιρικού χαρτοφυλακίου ελάχιστου κινδύνου με γεωγραφικούς δείκτες (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία)

Δίδονται οι μηνιαίες αποδόσεις τριών χρηματιστηριακών δεικτών (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία) από το 1973:12 έως το 2002:3. Οι μέσες αποδόσεις είναι:

AUSTRIA: 0.00695

IRELAND: 0.0154

ITALY: 0.0119

Ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι:

	AUSTRIA	IRELAND	ITALY
AUSTRIA	0.00326976420	0.3046565819	0.2535317462
IRELAND	0.001103692866	0.0040138293	0.3711914589
ITALY	0.001039052176	0.0016854824	0.0051368109

Το σφαιρικό χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου είναι:

AUSTRIA: 0.47694

IRELAND: 0.30701

ITALY: 0.21605

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι: 0.01063.

Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι: 0.00212.

Κεφάλαιο 10: Χαρτοφυλάκια με ένα περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου

Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής κατανέμει τον πλούτο του μεταξύ K περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο και 1 περιουσιακού κινδύνου χωρίς κίνδυνο (κατάθεση). Ο επενδυτής κατανέμει ένα ποσοστό w_0 του πλούτου του στο στοιχείο χωρίς κίνδυνο με γνωστή απόδοση r_F και ένα ποσοστό w του πλούτου του στα K στοιχεία με κίνδυνο με αναμενόμενη απόδοση μ , όπου w και μ είναι διανύσματα ($K \times 1$).

Ο περιορισμός χαρτοφυλακίου είναι $w_0 + w' i_K = 1$.

Η

α

ν

α

μ

$$\mu_p = (1 - w' i_K) r_F + w' \mu = r_F + w' (\mu - r_F i_K)$$

Θρίζουμε το διάνυσμα των αναμενόμενων υπερβαλουσών αποδόσεων πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ως:

ό

$$\mu_r = \mu - r_F i_K$$

Η διακύμανση των υπερβαλουσών αποδόσεων είναι Σ_{rr} .

Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι:

ν

$$Var(r_{p,t}) = \sigma_p^2 = w' \Sigma_{rr} w$$

η

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας του επενδυτή είναι:

α

π

ό

$$\max_w u = w' \mu_r - \frac{\gamma}{2} w' \Sigma_{rr} w$$

δ

ο

Το άριστο χαρτοφυλάκιο των στοιχείων με κίνδυνο προκύπτει ως:

η

$$w = \gamma^{-1} \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)$$

τ

Το ποσοστό του πλούτου που επενδύεται στο στοιχείο χωρίς κίνδυνο προκύπτει από τον περιορισμό

υ

$$w_0 = 1 - w' i_K .$$

χ

α

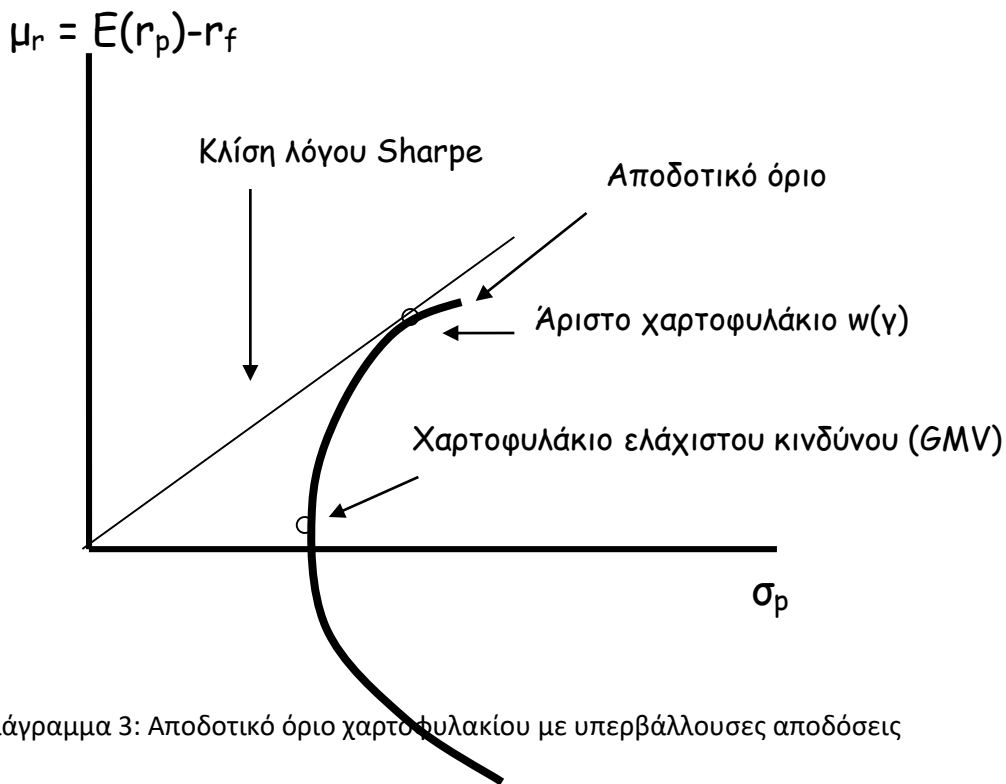
ρ

τ

ο

φ

η



Διάγραμμα 3: Αποδοτικό όριο χαρτοφυλακίου με υπερβάλλουσες αποδόσεις

Θεώρημα δυο αμοιβαίων κεφαλαίων (Two fund separation)

Όταν υπάρχει ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, το άριστο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός μεταξύ του αξιογράφου χωρίς κίνδυνο και ενός χαρτοφυλακίου των K αξιογράφων με κίνδυνο (two fund separation). Όλοι οι επενδυτές θα κρατούν ένα και μοναδικό χαρτοφυλάκιο με κίνδυνο, το λεγόμενο εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο (tangency portfolio) και το αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου. Συντηρητικοί επενδυτές θα κρατούν ένα μεγαλύτερο ποσοστό του πλούτου τους στο αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου. Επιθετικοί επενδυτές θα κρατούν μεγαλύτερο ποσοστό του πλούτου τους στο χαρτοφυλάκιο με κίνδυνο. Πολύ επιθετικοί επενδυτές θα δανείζονται στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και θα επενδύουν ένα πολλαπλάσιο του πλούτου τους στο χαρτοφυλάκιο με κίνδυνο (μόχλευση).

Τ
ο
ά
ρ
ι
σ
τ
ο

$$\min_w u = \frac{1}{2} w' \Sigma_{rr} w$$

$$\text{s.t. : } \mu_p = r_F + w' (\mu - r_F i_K)$$

χ

Το πρόβλημα χωρίς περιορισμούς είναι:

$$\min_w u = \frac{1}{2} w' \Sigma_{rr} w - \delta (r_F + w'(\mu - r_F i_K) - \mu_p)$$

Το άριστο χαρτοφυλάκιο των στοιχείων με κίνδυνο προκύπτει ως:

$$w = \delta \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)$$

Η σταθερά δ είναι μια θετική συνάρτηση του αναμενόμενου ασφάλιστρου κινδύνου του επενδυτή ($\mu_p - r_F$). Με άλλα λόγια, ο επενδυτής επιλέγει ένα χαρτοφυλάκιο πάνω στο αποδοτικό όριο, ανάλογα με το ασφάλιστρο κινδύνου που επιθυμεί (Διάγραμμα 3). Όσο υψηλότερο ασφάλιστρο κινδύνου επιθυμεί ο επενδυτής, τόσο μεγαλύτερος και ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου.

Για να το δείξουμε αυτό, χρησιμοποιούμε τον περιορισμό $\mu_p = r_F + w'(\mu - r_F i_K)$.

Π

α

ί

ρ

ν

ο

$$w = \frac{(\mu_p - r_F) \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)}{(\mu - r_F i_K)' \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)}$$

Απόδειξη: Από την $w = \delta \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)$ έχουμε: $w' = \delta (\mu - r_F i_K)' \Sigma_{rr}^{-1}$ και

$w' (\mu - r_F i_K) = \delta (\mu - r_F i_K)' \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)$. Από την $\mu_p = r_F + w'(\mu - r_F i_K)$ έχουμε:

$w' (\mu - r_F i_K) = \mu_p - r_F$. Συνδυάζοντας τις δυο συνθήκες, παίρνουμε: $\delta = \frac{(\mu_p - r_F)}{(\mu - r_F i_K)' \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)}$.

τ

η

Από την παραπάνω έκφραση μπορούμε να ορίσουμε το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο (tangency portfolio). Το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι το χαρτοφυλάκιο πάνω στο αποδοτικό όριο με τη μέγιστη υπερβάλλουσα απόδοση ανά μονάδα κινδύνου (Sharpe ratio), δηλ. το μέγιστο $\mu_p / \text{std}(\mu_p)$. Διαγραμματικά, η μέγιστη υπερβάλλουσα απόδοση ανά μονάδα κινδύνου παριστάνεται από την ευθεία η οποία ξεκινάει από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r_F και εφάπτεται στο αποδοτικό όριο. Το σημείο στο οποίο η ευθεία αυτή εφάπτεται στο αποδοτικό όριο, ορίζει το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο (βλέπε Διάγραμμα 4). Το χαρτοφυλάκιο αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε από τον περιορισμό ότι τα σταθμά του θα πρέπει να αθροίζουν στη μονάδα $i_K' w = 1$. Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά τα σταθμά του άριστου χαρτοφυλακίου $w = \delta \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)$ με i_K' προκύπτει:

φ

η

τ

η

$$1 = \delta_{tan} i_K' \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K) \Rightarrow \delta_{tan} = \frac{1}{i_K' \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)}$$

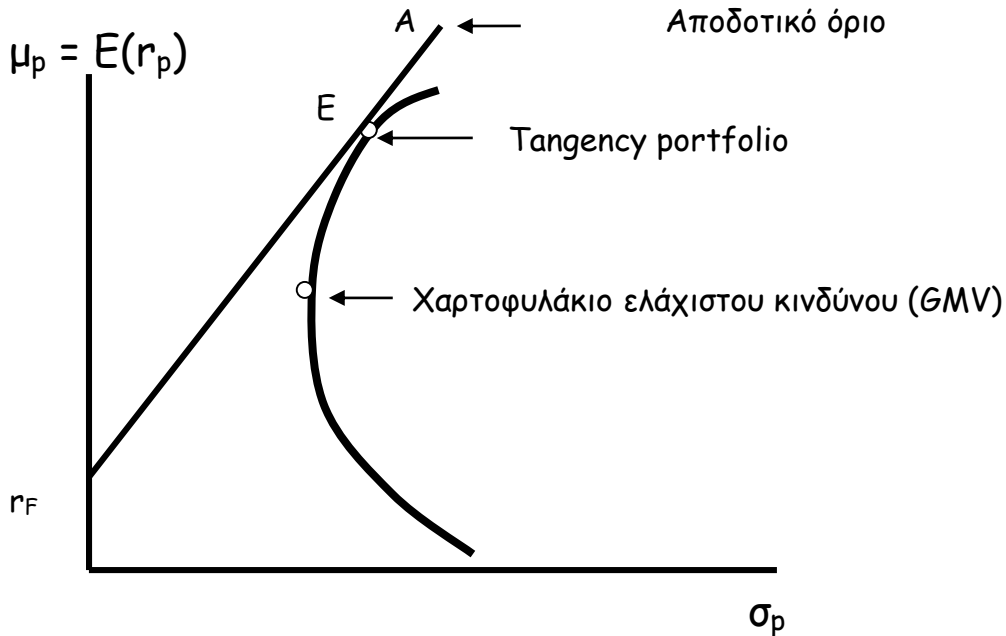
Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στο $w = \delta \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)$, βρίσκουμε τα σταθμά του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου:

$$w_{tan} = \frac{1}{i_K' \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)} \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)$$

Ο όρος $i_K' \Sigma_{rr}^{-1} (\mu - r_F i_K)$ είναι το άθροισμα των στοιχείων του χαρτοφυλακίου.

Διαιρώντας με το άθροισμα αυτό, επιβάλλουμε τον περιορισμό ότι οι σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου με κίνδυνο πρέπει να αθροίζονται στην μονάδα.

Το Διάγραμμα 4 δείχνει το αποδοτικό όριο με ένα αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου. Το χαρτοφυλάκιο E είναι το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο. Όλοι οι επενδυτές επιλέγουν ένα χαρτοφυλάκιο πάνω στην ευθεία $r_F A$. Η ευθεία αυτή είναι το αποδοτικό όριο. Επενδυτές με υψηλό γ (υψηλή αποστροφή στον κίνδυνο) επιλέγουν σημεία πάνω στην ευθεία κοντά στο r_F ενώ επενδυτές με χαμηλό γ επιλέγουν σημεία πάνω στην ευθεία κοντά στο E. Στο τμήμα $r_F E$ οι επενδυτές έχουν θετικές ποσότητες του αξιόγραφου με κίνδυνο. Στο τμήμα EA, οι επενδυτές δανείζονται στο αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο και επενδύουν στο χαρτοφυλάκιο με κίνδυνο (μόχλευση).



Διάγραμμα 4: Αποδοτικό όριο όταν υπάρχει αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο

Εφαρμογή: Το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο με γεωγραφικούς δείκτες (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία)

Στο προηγούμενο παράδειγμα τριών χρηματιστηριακών δεικτών (Αυστρία, Ιταλία, Ιρλανδία) μπορούμε να βρούμε το εφαπτόμενο (tangency) χαρτοφυλάκιο με ένα επιτόκιο μηδενικού κινδύνου 0.024% ετησίως. Το επιτόκιο αυτό αντιστοιχεί σε 0.002% τον μήνα. Το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι:

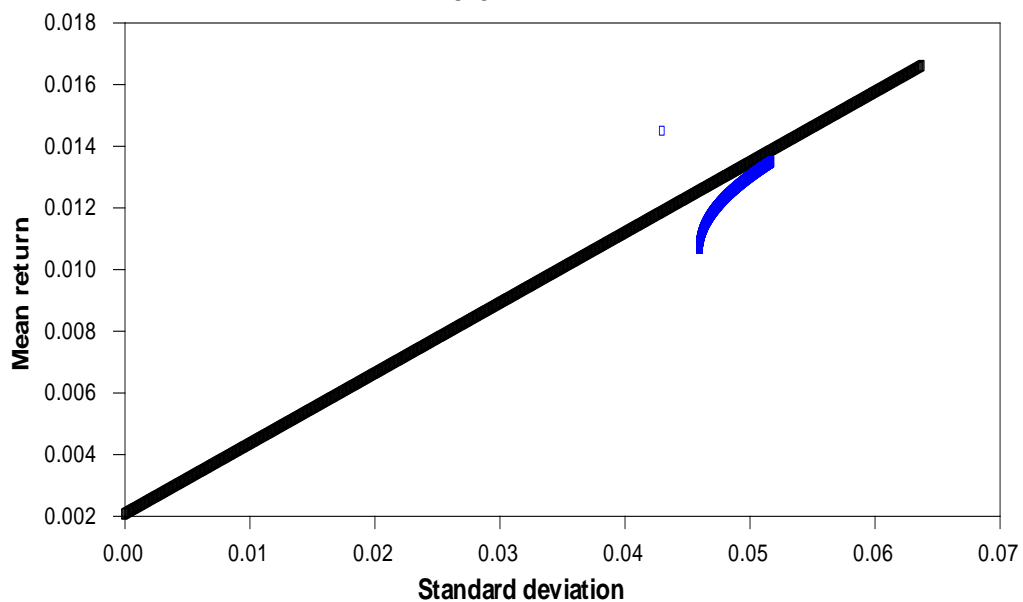
AUSTRIA: 0.17090
IRELAND: 0.77911
ITALY: 0.28179

Η απόδοση του χαρτοφ **Tangency portfolio**
Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι: 0.00407.

Το αποδοτικό όριο δίδεται στο Διάγραμμα 7.

Δεδομένα: emu_ret.WKS. Program: frontier_tangency.prg

Αποδοτικό όριο όλων των
Efficient χαρτοφυλακίων με κίνδυνο



Διάγραμμα 5: Αποδοτικό όριο όταν υπάρχει αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο

Στο διάγραμμα φαίνεται το αποδοτικό όριο ως η ευθεία η οποία ξεκινάει από το σημείο (0, 0.002). Το εφαπτόμενο χαρτοφυλάκιο είναι το χαρτοφυλάκιο όπου η ευθεία αυτή εφάπτεται με το αποδοτικό όριο όλων των χαρτοφυλακίων με κίνδυνο (μπλέ γραμμή).

Το Υπόδειγμα CAPM

Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε ότι αν όλοι οι επενδυτές κρατούν το άριστο χαρτοφυλάκιο, τότε ισχύει το υπόδειγμα της αγοράς (Capital Asset Pricing Model, CAPM). Η λογική είναι η εξής: Αν οι αποδόσεις είναι κανονικές, τότε οι αναμενόμενες αποδόσεις και ο κίνδυνος είναι ίσες με τις αδέσμευτες αποδόσεις και τον πίνακα των αδέσμευτων συνδιακυμάνσεων της από κοινού κατανομής των αποδόσεων. Αυτές οι ροπές της κατανομής είναι γνωστές σε όλους τους επενδυτές. Κατά συνέπεια, όλοι οι επενδυτές έχουν τις ίδιες προσδοκίες και εάν δεν υπάρχουν περιορισμοί στις επενδυτικές τους επιλογές, όλοι κρατούν το ίδιο άριστο χαρτοφυλάκιο. Το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι το χαρτοφυλάκιο αγοράς. Κατά συνέπεια, ισχύει το υπόδειγμα της αγοράς CAPM. Οι υποθέσεις που κάναμε είναι ομολογουμένως πολύ ισχυρές, όμως αυτός είναι και ο λόγος που παίρνουμε ένα τόσο ισχυρό αποτέλεσμα.

Το σημείο εκκίνησης για την απόδειξη του CAPM είναι ο κανόνας του άριστου χαρτοφυλακίου: $w = \gamma^{-1} \Sigma^{-1} (\mu - \eta i_K)$. Λύνοντας για τις υπερβάλλουσες αποδόσεις, παίρνουμε: $\mu - \eta i_K = \gamma \Sigma w$.

Στο παράδειγμα δυο αξιογράφων, η συνθήκη αυτή είναι:

$$\mu_1 - \eta = \gamma(w_1 \sigma_{11} + w_2 \sigma_{12})$$

$$\mu_2 - \eta = \gamma(w_1 \sigma_{21} + w_2 \sigma_{22})$$

Για να πάρουμε μια εξίσωση για την απόδοση του χαρτοφυλακίου, πολλαπλασιάζουμε την συνθήκη άριστου χαρτοφυλακίου με w' :

$$w'(\mu - \eta i_K) = \gamma w' \Sigma w \Rightarrow \mu_m - \eta = \gamma \sigma_m^2$$

Καθώς

$$w'(\mu - \eta i_K) = \mu_m - \eta, w' \Sigma w = \sigma_m^2$$

όπου μ_m and σ_m^2 είναι η απόδοση και η διακύμανση του χαρτοφυλακίου της αγοράς.

Από την συνθήκη αυτή προκύπτει:

$$\gamma = \frac{\mu_m - \eta}{\sigma_m^2}$$

Εφαρμογή: 2 x 2

Στην περίπτωση 2x2 η συνθήκη $w'(\mu - \eta i_K) = \gamma w' \Sigma w$ είναι:

$$w'(\mu - \eta i_K) = (w_1 w_2) \begin{pmatrix} \mu_1 - \eta \\ \mu_2 - \eta \end{pmatrix} =$$

$$(w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2) - (w_1 + w_2) \eta = \mu_m - \eta$$

$$\begin{aligned}
w' \Sigma w &= (w_1 w_2) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \\
&= (w_1 \sigma_{11} + w_2 \sigma_{21} \quad w_1 \sigma_{12} + w_2 \sigma_{22}) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \\
&= (w_1^2 \sigma_{11} + 2w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2^2 \sigma_{22}) = \sigma_m^2
\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση προκύπτει από τον ορισμό της διακύμανσης:

$$\begin{aligned}
\sigma_m^2 &= E(r_m - \mu_m)^2 = \\
&= E(w_1(r_1 - \mu_1) + w_2(r_2 - \mu_2))^2 = \\
&= w_1^2 \sigma_{11} + 2w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2^2 \sigma_{22}
\end{aligned}$$

CAPM

Αντικαθιστούμε την συνθήκη $\gamma = \frac{\mu_m - \eta}{\sigma_m^2}$ στην $\mu - \eta i_K = \gamma \Sigma w$:

$$\mu - \eta i_K = \frac{\mu_m - \eta}{\sigma_m^2} \Sigma w = \frac{\mu_m - \eta}{\sigma_m^2} \begin{pmatrix} \sigma_{1m} \\ \vdots \\ \sigma_{nm} \end{pmatrix}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι το CAPM. Η αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση κάθε περιουσιακού στοιχείου με κίνδυνο δίδεται ως το γινόμενο του beta του αξιόγραφου και της υπερβάλλουσας απόδοσης του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Το beta δίδεται ως ο λόγος της συνδιακύμανσης του αξιόγραφου με την αγορά προς την διακύμανση της αγοράς. Για να το δούμε αυτό, γράφουμε την παραπάνω εξίσωση ως ένα σύστημα εξισώσεων για τα K αξιόγραφα:

$$\begin{aligned}
\mu_1 - \eta &= \beta_1 (\mu_m - \eta) \\
\mu_2 - \eta &= \beta_2 (\mu_m - \eta) \\
&\dots \\
\mu_K - \eta &= \beta_K (\mu_m - \eta)
\end{aligned}$$

Όπου $\beta_i = \sigma_{im} / \sigma_m^2$, $i=1,2,\dots,K$.

Εφαρμογή: 2 αξιόγραφα με κίνδυνο

$$\mu - \eta i_K = \frac{\mu_m - \eta}{\sigma_m^2} \Sigma W$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - \eta \\ \mu_2 - \eta \end{pmatrix} = \frac{\mu_m - \eta}{\sigma_m^2} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{\mu_m - \eta}{\sigma_m^2} \begin{pmatrix} w_1 \sigma_{11} + w_2 \sigma_{12} \\ w_1 \sigma_{21} + w_2 \sigma_{22} \end{pmatrix} = \frac{\mu_m - \eta}{\sigma_m^2} \begin{pmatrix} \sigma_{1m} \\ \sigma_{2m} \end{pmatrix}$$

Σημείωση:

$$\sigma_{1m} = E \left((r_1 - \mu_1)(w_1(r_1 - \mu_1) + w_2(r_2 - \mu_2)) \right) = w_1 \sigma_{11} + w_2 \sigma_{12},$$

$$\sigma_{2m} = E \left((r_2 - \mu_2)(w_1(r_1 - \mu_1) + w_2(r_2 - \mu_2)) \right) = w_1 \sigma_{21} + w_2 \sigma_{22}$$

Άρα, ισχύει το CAPM:

$$\mu_1 - \eta = \frac{\sigma_{1m}}{\sigma_m^2} (\mu_m - \eta) = \beta_1 (\mu_m - \eta)$$

$$\mu_2 - \eta = \frac{\sigma_{2m}}{\sigma_m^2} (\mu_m - \eta) = \beta_2 (\mu_m - \eta)$$

Απόδοση στοιχείου μηδενικού beta (Zero beta return):

Αν ένα περιουσιακό στοιχείο, π.χ. το στοιχείο 1, είναι μηδενικού κινδύνου, τότε η συνδιακύμανση του με το χαρτοφυλάκιο αγοράς θα είναι 0, δηλ. $\beta_1 = 0$. Κατά συνέπεια, $\mu_1 = \eta$. Αυτό σημαίνει ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Γενικότερα, αν υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο με μηδενικό beta με το χαρτοφυλάκιο αγοράς, τότε η απόδοση του ορίζει τον πολλαπλασιαστή Lagrange.

Κεφάλαιο 11: Οικονομετρικές Τεχνικές

Η διακύμανση των σταθμίσεων του άριστου χαρτοφυλακίου

Καθώς οι αποδόσεις και ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι τυχαίες μεταβλητές, είναι φανερό ότι και το διάνυσμα σταθμίσεων του άριστου χαρτοφυλακίου είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η εκτίμηση ενός άριστου χαρτοφυλακίου θα πάσχει πάντα από αβεβαιότητα καθώς τα λάθη εκτίμησης των αναμενόμενων αποδόσεων και του πίνακα συνδιακύμανσης μεταφράζονται σε λάθη εκτίμησης των σταθμίσεων του άριστου χαρτοφυλακίου. Το πρόβλημα αυτό είναι πιο έντονο σε μικρά δείγματα (ακόμη και κάτω από την περιοριστική συνθήκη ότι η κατανομή των αποδόσεων είναι κανονική), αλλά κάτω από γενικές συνθήκες ισχύει και ασυμπτωτικά, ιδιαίτερα

όταν η κατανομή των αποδόσεων παρουσιάζει κύρτωση.

Αν οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή, τότε το λάθος εκτίμησης του w οφείλεται κυρίως στο λάθος εκτίμησης της μέσης απόδοσης και λιγότερο στο λάθος εκτίμησης της διακύμανσης. Αν υποθέσουμε μη κανονικότητα, το λάθος εκτίμησης της διακύμανσης αυξάνεται σημαντικά λόγω της κύρτωσης της κατανομής. Συγκεκριμένα, όσο μεγαλύτερη η κύρτωση της κατανομής των αποδόσεων (fat tails) τόσο μεγαλύτερο το λάθος εκτίμησης της διακύμανσης διότι υψηλές τιμές στα άκρα της κατανομής (outliers) κάνουν την εκτίμηση πιο ανακριβή.

Εκτίμηση της τυπικής απόκλισης των σταθμίσεων μέσω παλινδρόμησης

Γ
ι
α

$$1 = r_{t+1}b + u_{t+1}$$

Όπου 1 είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ($T \times 1$), b είναι το διάνυσμα των συντελεστών παλινδρόμησης ($K \times 1$), r_{t+1} είναι ο πίνακας των αποδόσεων ($T \times K$) και u_{t+1} είναι ένα διάνυσμα τυχαίων λαθών ($T \times 1$).

Ο Britten-Jones δείχνει ότι οι σταθμίσεις του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου μπορούν να εκτιμηθούν ως:

κ
τ

$$\hat{w}_{tan} = \frac{\hat{b}}{i'\hat{b}}$$

Όπου $i'\hat{b}$ είναι το άθροισμα των \hat{b} . Κατά συνέπεια, η τυπική απόκλιση των σταθμίσεων του χαρτοφυλακίου μπορεί να υπολογιστεί άμεσα από την τυπική απόκλιση των συντελεστών \hat{b} . Επίσης, μπορούν εύκολα να χρησιμοποιηθούν κλασικοί έλεγχοι σημαντικότητας, όπως το t-test και το F-test. Για παράδειγμα, για να ελέγξουμε αν το στοιχείο k του w είναι στατιστικά διαφορετικό του μηδενός, αρκεί να ελέγξουμε με ένα t-test αν το στοιχείο k του b είναι στατιστικά διαφορετικό του μηδενός.

τ

Προβλήματα στην κατασκευή χαρτοφυλακίων Markowitz

ς

Εκτός του ότι τα χαρτοφυλάκια Markowitz πάσχουν από σημαντικά υψηλά λάθη εκτίμησης, παρουσιάζουν επιπλέον δυο προβλήματα. Πρώτον, οι σταθμίσεις πολλών αξιογράφων είναι ακραίες, είτε υπερβολικά υψηλές (πολύ υψηλότερες της μονάδας), είτε πολύ αρνητικές, παρότι άθροίζουν στη μονάδα. Δεύτερον, παρουσιάζουν αστάθεια, δηλ. μικρές αλλαγές στις αναμενόμενες αποδόσεις ή στον πίνακα συνδιακύμανσης οδηγούν σε μεγάλες αλλαγές στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου. Τα προβλήματα αυτά είναι ιδιαίτερα έντονα όταν κάποια αξιόγραφα στο χαρτοφυλάκιο έχουν υψηλή συσχέτιση. Για το λόγο αυτό, αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι κλασικές μέθοδοι αριστοποίησης χαρτοφυλακίου, όπως η μέθοδος του Markowitz, λειτουργούν στην πράξη ως μέθοδοι μεγιστοποίησης του λάθους – Michaud (1989).

α

π

ό

κ

λ

ι

σ

Με σκοπό την ελαχιστοποίηση του λάθους εκτίμησης της κλασσικής μεθόδου αριστοποίησης χαρτοφυλακίου, έχουν προταθεί μια σειρά εναλλακτικών μεθόδων. Μεταξύ των μεθόδων αυτών περιλαμβάνονται (α) εκτιμητές shrinkage, (β) χρήση παραγοντικών υποδειγμάτων και (γ) περιορισμοί στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου.

Εκτιμητές Shrinkage

Η ιδέα της χρήσης ενός shrinkage estimator οφείλεται στους James and Stein (1961), οι οποίοι υποστήριξαν ότι για 3 ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές, το διάνυσμα των πραγματικών μέσων τους μπορεί να εκτιμηθεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των δειγματικών μέσων τους, $\hat{\mu}$, και μιας κοινής σταθεράς, μ_0 , η οποία συνήθως είναι ο διαστρωματικός μέσος όλων των μεταβλητών (grand mean):

$$\mu_s = \delta\mu_0 + (1 - \delta)\hat{\mu}$$

για $0 < \delta < 1$. Ο εκτιμητής shrinkage «σμικρύνει» τους μέσους προς μια κοινή σταθερά, μ_0 . Κατά συνέπεια, μειώνει τα ακραία λάθη εκτίμησης των διαστρωματικών μέσων.

Η άριστη τιμή του δ εξαρτάται θετικά από τον αριθμό των αξιογράφων στο χαρτοφυλάκιο, αρνητικά από το μέγεθος του δείγματος (αριθμός παρατηρήσεων) – καθώς αυξάνει η ακρίβεια της εκτίμησης των μέσων – και αρνητικά από την διασπορά των μέσων γύρω από το μ_0 .

Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και στην εκτίμηση του πίνακα συνδιακύμανσης, Σ :

$$\Sigma_s = \delta\Sigma_0 + (1 - \delta)\hat{\Sigma}$$

καθώς επίσης και απευθείας πάνω στα σταθμά του χαρτοφυλακίου:

$$w_s = \delta w_0 + (1 - \delta)\hat{w}$$

Με $w_0 = 1/K$, και K τον αριθμό των αξιογράφων στο χαρτοφυλάκιο. Εναλλακτικά, το διάνυσμα w_0 μπορεί να είναι τα σταθμά του χαρτοφυλακίου της αγοράς ή ενός χαρτοφυλακίου-στόχου (benchmark) του διαχειριστή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε μορφή εκτίμησης shrinkage περιλαμβάνει μια αυθαίρετη επιλογή της σταθεράς δ .

Παραγοντικά υποδείγματα

Μια εναλλακτική μέθοδος που αποσκοπεί στην μείωση του στατιστικού λάθους στην κατασκευή χαρτοφυλακίων είναι η χρήση ενός παραγοντικού υποδείγματος αποτίμησης – Sharpe (1963). Τα παραγοντικά υποδείγματα επιβάλλουν περιορισμούς στον πίνακα συνδιακύμανσης των αποδόσεων και, κατά συνέπεια, μειώνουν τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας υποθέσουμε ότι οι αναμενόμενες υπερβάλλουσες αποδόσεις ακολουθούν ένα μονοπαραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης, π.χ. το CAPM:

$$r_{i,t} = a_i + \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t}$$

όπου τα διαστρωματικά κατάλοιπα έχουν μηδενική συσχέτιση μεταξύ τους (δηλ. ο πίνακας συνδιακύμανσης Σ_ε είναι διαγώνιος) και δεν σχετίζονται με τα β_i . Βάζοντας τα K β_i σε ένα διάνυσμα β , ο πίνακας συνδιακύμανσης των υπερβαλλουσών αποδόσεων είναι:

$$\Sigma = \sigma_m^2 \beta \beta' + \Sigma_\varepsilon$$

Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής έγκειται στο ότι μειώνει σημαντικά τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν στον πίνακα Σ σε $3K+1$ ($\{\alpha_i, \beta_i, \sigma_i^2\}_{i=1}^K, \sigma_m^2$) έναντι $K(K+1)/2$ χωρίς περιορισμούς. Το μειονέκτημα της μεθόδου αυτής έγκειται στο ότι ένα μονοπαραγοντικό υπόδειγμα δεν μπορεί να εξηγήσει επαρκώς την συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων.

Ο προφανής τρόπος για να ξεπεράσουμε το παραπάνω μειονέκτημα είναι να υποθέσουμε ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης:

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta' f_t + \varepsilon_{i,t}$$

όπου β_i είναι ένα διάνυσμα των β και f_t ένα διάνυσμα των M παραγόντων κινδύνου. Ο πίνακας συνδιακύμανσης των υπερβαλλουσών αποδόσεων είναι:

$$\Sigma = B \Sigma_f B' + \Sigma_\varepsilon$$

όπου B είναι ένας πίνακας ($K \times M$) και Σ_f ο πίνακας συνδιακύμανσης των παραγόντων ($M \times M$). Αν οι παράγοντες παρουσιάζουν συσχέτιση μεταξύ τους, ο αριθμός παραμέτρων προς εκτίμηση του Σ είναι $M(M+1)/2 + K(M+2)$. Αν οι παράγοντες δεν παρουσιάζουν συσχέτιση μεταξύ τους (δηλ. ο πίνακας Σ_f είναι διαγώνιος), ο αριθμός παραμέτρων προς εκτίμηση του Σ είναι $M + K(M+2)$. Η μείωση του αριθμού των προς εκτίμηση παραμέτρων είναι σημαντική σε σχέση με την εκτίμηση του πίνακα συνδιακύμανσης των αποδόσεων χωρίς περιορισμούς. Για παράδειγμα, με 500 αξιόγραφα στο χαρτοφυλάκιο και πέντε παράγοντες, ο αριθμός των παραμέτρων είναι 3.515 αν οι παράγοντες έχουν συσχέτιση έναντι 125.000 παραμέτρων χωρίς περιορισμούς.

Η πρακτική δυσκολία στην εφαρμογή του πολυπαραγοντικού υποδείγματος είναι η επιλογή των παραγόντων. Με το θέμα αυτό ασχολείται η θεωρία αποτίμησης αξιογράφων, η οποία προτείνει μια σειρά υποδειγμάτων αποτίμησης όπως το CAPM, Consumption-CAPM, Intertemporal CAPM, APT κλπ.

Περιορισμοί στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου

Η τρίτη μέθοδος που αποσκοπεί στην μείωση του στατιστικού λάθους στην κατασκευή χαρτοφυλακίων είναι η χρήση περιορισμών στις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου στη διαδικασία βελτιστοποίησης. Οι πιο συνήθεις περιορισμοί είναι περιορισμοί short sales (όλες οι σταθμίσεις να είναι θετικές), περιορισμοί στο μέγιστο ύψος των ατομικών σταθμίσεων (καμία στάθμιση να μην είναι πάνω από $\chi\%$) και περιορισμοί στο ύψος της μόχλευσης. Η επιβολή περιορισμών είναι πολύ διαδεδομένη στη πράξη. Όπως και στην περίπτωση του εκτιμητή shrinkage, η επιβολή περιορισμών γίνεται συνήθως αυθαίρετα.

Κεφάλαιο 12: Χαρτοφυλάκια αντιστάθμισης οικονομικών κινδύνων (στρατηγικά χαρτοφυλάκια)

Όταν οι επενδυτές αντιμετωπίζουν κινδύνους πέραν του κινδύνου της αγοράς, το άριστο χαρτοφυλάκιο προκύπτει ως η λύση ενός γενικότερου προβλήματος βελτιστοποίησης: μεγιστοποίησε την απόδοση του χαρτοφυλακίου για μια δεδομένη διακύμανση μια δεδομένη συσχέτιση των αποδόσεων με τους παράγοντες κινδύνου. Σύμφωνα με τον Fama (1996), το αποδοτικό όριο που προκύπτει είναι multifactor efficient. Οι επενδυτές επιλέγουν έναν συνδυασμό μεταξύ (α) του αξιογράφου μηδενικού κινδύνου, (β) του εφαπτόμενου χαρτοφυλακίου, και (γ) M χαρτοφυλάκια (αμοιβαία κεφάλαια), τα οποία αντισταθμίζουν τους κινδύνους που προκύπτουν από τους M παράγοντες (μεταβλητές κατάστασης). Αντί του 2-fund separation, ισχύει το **M+2 – fund separation** (Θεώρημα M+2 αμοιβαίων κεφαλαίων).

Οι σταθμίσεις των αξιογράφων στα χαρτοφυλάκια αντιστάθμισης είναι γραμμικές συναρτήσεις της συσχέτισης των παραγόντων κινδύνου με τις αποδόσεις των αξιογράφων, δηλ. των συντελεστών παλινδρόμησης των παραγόντων κινδύνου πάνω στις αποδόσεις. Οι συντελεστές αυτής της παλινδρόμησης είναι τα σταθμά ενός χαρτοφυλακίου, οι αποδόσεις του οποίου έχουν την υψηλότερη συσχέτιση με τον παράγοντα κινδύνου. Το χαρτοφυλάκιο αυτό ονομάζεται “mimicking portfolio” και είναι ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο για τον συγκεκριμένο κίνδυνο. Η λύση του προβλήματος αυτού είναι παρόμοια με την λύση του Merton για έναν στρατηγικό

επενδυτή, ο οποίος επιλέγει χαρτοφυλάκια που τον προστατεύουν από μελλοντικούς κινδύνους που προκύπτουν από μια μεταβλητή κατάσταση.

Για ποιο λόγο να θέλουν οι επενδυτές να προστατευθούν από παράγοντες κινδύνου πέραν του κινδύνου της αγοράς; Υπάρχουν δυο λόγοι. Πρώτον, σύμφωνα με τον Merton, η κατανομή των αποδόσεων είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής κατάστασης. Καθώς αλλαγές αυτής της μεταβλητής κατάστασης μεταβάλλουν το «σύνολο των επενδυτικών ευκαιριών» (“investment opportunity set”), οι επενδυτές επιθυμούν προστασία από τέτοιες μεταβολές. Δεύτερον, οι επενδυτές έχουν εισόδημα από εργασία πέραν του εισοδήματος από επενδύσεις. Καθώς σε μια ύφεση είναι πολύ πιθανόν ότι θα μείνουν άνεργοι και θα χάσουν το εισόδημα από εργασία, θέλουν ένα χαρτοφυλάκιο, το οποίο να τους προστατεύει από τον κίνδυνο αυτό. Το χαρτοφυλάκιο αυτό πρέπει να επενδύει σε έναν συνδυασμό αξιογράφων, τα οποία δίνουν υψηλές αποδόσεις σε περιόδους αύξησης της ανεργίας (ύφεσης), έτσι ώστε ο επενδυτής να ισοσταθμίσει την απώλεια εισοδήματος από εργασία. Η όλη τέχνη της αντιστάθμισης κινδύνου είναι να βρούμε ένα χαρτοφυλάκιο με αυτήν την ιδιότητα. Όπως θα δείξουμε σε λίγο, οι επενδυτές είναι διατεθειμένοι να θυσιάσουν ένα μέρος της απόδοσης του χαρτοφυλακίου τους για να προστατευτούν από τέτοιου τύπου κινδύνους.

Αρχικά θα λύσουμε το πρόβλημα χαρτοφυλακίου για την περίπτωση που δεν υπάρχει ένα αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου. Το πρόβλημα έχει ως εξής:

Οι αποδόσεις των αξιογράφων $i=1,2,\dots,K$ και ο παράγοντας κινδύνου f ακολουθούν από κοινού κανονική κατανομή. Η κατανομή των αποδόσεων ενός οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου p χαρακτηρίζεται πλήρως από την αναμενόμενη απόδοση του, $\mu = E(r_p)$, την διακύμανση του, σ_p^2 , και την συνδιακύμανση του με το f , $cov(r_p, f)$.

Οι επενδυτές επιλέγουν ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση για ένα δεδομένο επίπεδο διακύμανσης ενώ παράλληλα παρέχει προστασία από έναν παράγοντα κινδύνου f (η γενίκευση σε περισσότερους από έναν παράγοντες κινδύνου είναι εύκολη). Η τελευταία ιδιότητα του χαρτοφυλακίου σημαίνει ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου έχουν την υψηλότερη δυνατή συσχέτιση με τον παράγοντα κινδύνου.

Το άριστο χαρτοφυλάκιο με αναμενόμενη απόδοση μ_p θα είναι η λύση του προβλήματος:

$$\begin{aligned} \max \left(E(r_p) - \frac{\gamma}{2} var(r_p) - \delta cov(r_p, f) \right), \text{ s. t. } w' i_K = 1 \\ \Rightarrow \max_w \left(w' \mu - \frac{\gamma}{2} w' \Sigma w - \delta w' \Sigma_{rf} + \eta(1 - w' i_K) \right) \end{aligned}$$

Ό
π
ο
υ

δ
>
0

αποδόσεων με το f . Το άριστο χαρτοφυλάκιο των στοιχείων με κίνδυνο προκύπτει ως:

$$w = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1}(\mu - \eta i_K) + \frac{\delta}{\gamma} \Sigma^{-1} \Sigma_{rf}$$

Ο πρώτος όρος στην παραπάνω έκφραση, $\frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1}(\mu - \eta i_K)$, είναι το χαρτοφυλάκιο Markowitz. Ο δεύτερος όρος, $\frac{\delta}{\gamma} \Sigma^{-1} \Sigma_{rf}$, είναι το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου (hedging portfolio κατά Merton), δηλ. μια διόρθωση του χαρτοφυλακίου Markowitz για τον κίνδυνο που προκύπτει από τον παράγοντα f . Ο επενδυτής διορθώνει τις σταθμίσεις του χαρτοφυλακίου Markowitz σύμφωνα με την συνδιακύμανση των αποδόσεων με το f .

Το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης οικονομικών κινδύνων μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε M κινδύνους. Στην περίπτωση αυτή, το f είναι ένα διάνυσμα ($M \times 1$). Το διάνυσμα Σ_{rf} γίνεται ένας πίνακας ($K \times M$). Η στήλη j ($j=1, \dots, M$) του πίνακα περιέχει τις συνδιακυμάνσεις των K αξιογράφων με τον παράγοντα f_j . Τέλος, το δ γίνεται ένα διάνυσμα ($1 \times M$). Η στήλη j του δ περιέχει τον βαθμό αποστροφής του επενδυτή στον παράγοντα κινδύνου f_j .

Το διαχρονικό CAPM

Από το παραπάνω υπόδειγμα άριστου χαρτοφυλακίου προκύπτει το διαχρονικό CAPM (Intertemporal CAPM ή ICAPM) του Merton. Για να το δούμε αυτό, αρκεί να υποθέσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αγοράς βρίσκεται και αυτό πάνω στο αποδοτικό όριο, δηλ.

$$w_m = \frac{1}{\gamma_m} \Sigma^{-1}(\mu - \eta i_K) + \frac{\delta_m}{\gamma_m} \Sigma^{-1} \Sigma_{rf}$$

και να λύσουμε το υπόδειγμα χαρτοφυλακίου ως προς τις αναμενόμενες αποδόσεις:

$$\mu - \eta i_K = \gamma_m \Sigma w_m - \delta_m \Sigma_{rf}$$

Καθώς $\Sigma w_m = \text{cov}(r, r') w_m = \text{cov}(r, r' w_m) = \text{cov}(r, r_m)$, προκύπτει:

$$\mu - \eta i_K = \gamma_m \text{cov}(r, r_m) - \delta_m \text{cov}(r, f)$$

Το υπόδειγμα αυτό είναι το ICAPM. Τα ασφάλιστρο κινδύνου ενός αξιογράφου είναι συνάρτηση της συνδιακύμανσης της απόδοσης του αξιογράφου με την απόδοση της αγοράς καθώς και της συνδιακύμανσης του με τον παράγοντα κινδύνου f . Το υπόδειγμα ICAPM μπορεί εύκολα να γραφτεί σε μορφή beta:

$$\mu - \eta i_K = \lambda_m \beta_m - \lambda_f \beta_f$$

όπου $\beta_m = cov(r, r_m)/var(r_m)$ το διάνυσμα των beta των αξιογράφων με την απόδοση της αγοράς, $\beta_f = cov(r, f)/var(f)$ το διάνυσμα των beta των αξιογράφων με το f, $\lambda_m = \gamma_m var(r_m)$ η τιμή κινδύνου της αγοράς και $\lambda_f = \delta_m var(f)$ η τιμή κινδύνου του f.

Το πολυπαραγοντικό ICAPM

Καθώς το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης οικονομικών κινδύνων μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε M κινδύνους, έτσι και το ICAPM μπορεί να γενικευθεί σε ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα αποτίμησης. Έστω ότι το f είναι ένα διάνυσμα (M x 1) παραγόντων κινδύνου. Υποθέτοντας ότι το χαρτοφυλάκιο της αγοράς βρίσκεται πάνω στο αποδοτικό όριο και λύνοντας το υπόδειγμα χαρτοφυλακίου ως προς τις αναμενόμενες αποδόσεις, προκύπτει το πολυπαραγοντικό υπόδειγμα ICAPM σε μορφή beta:

$$\mu - \eta i_K = \lambda_m \beta_m - \beta_f \lambda_f$$

όπου $\beta_m = cov(r, r_m)/var(r_m)$ το διάνυσμα των beta των αξιογράφων με την απόδοση της αγοράς, $\beta_f = \Sigma_{rf}$ ο (KxM) πίνακας των beta των αξιογράφων με τους παράγοντες κινδύνου f, $\lambda_m = \gamma_m var(r_m)$ η τιμή κινδύνου της αγοράς και $\lambda_f = (\delta_m \Sigma_f)$ το (Mx1) διάνυσμα των τιμών

κινδύνου του f, όπου $\Sigma_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{f1}^2} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{fM}^2} \end{pmatrix}$ ο διαγώνιος πίνακας (MxM) διακυμάνσεων των

παραγόντων f.

Βιβλιογραφία

Αποτίμηση

Ang, Andrew, Bob Hodrick, Yuhang Xing and Xiaoyan Zhang (2004), The cross-section of volatility and expected returns, forthcoming Journal of Finance.

Bakshi, Gurdip and Zhiwu Chen (2005), Cash Flow risk, discounting risk and the equity premium puzzle, forthcoming Handbook of Investments: Equity Premium, Rajnish Mehra ed.

Bansal, Ravi, Robert Dittmar and Christian Lundblad (2005), Consumption, dividends, and the cross-section of equity returns, forthcoming Journal of Finance.

Bansal, Ravi and Amir Yaron, 2004, Risks for the long run: A potential resolution of asset pricing puzzles, Journal of Finance 59, 1481--1509.

Campbell John (1991), A variance decomposition of stock returns, Economic Journal, 101, 157-159.

Campbell, John (1993), Intertemporal asset pricing without consumption data, American Economic Review 83, 487-512.

Campbell John (1996), Understanding risk and return, Journal of Political Economy, 104, 298-345.

Campbell John (2003), Consumption based asset pricing, unpublished paper, forthcoming in Handbook of the Economics of Finance, George Constantinides, Milton Harris, and Rene Stulz eds., North-Holland, Amsterdam.

Campbell, John, Christopher Polk and Tuomo Vuolteenaho (2005), Growth or glamour, unpublished paper, NBER working paper, no. 11389.

Campbell, John and Robert Shiller (1988a), The dividend-price ratio and expectations about future dividends and discount factors, *Review of Financial Studies* 1, 195-228

Campbell, John and Robert Shiller (1988b), Stock prices, earnings and expected dividends, *Journal of Finance*, 43, 661-676.

Campbell, John and Robert Shiller (1998), Valuation ratios and the long-run stock market outlook, *Journal of Portfolio Management* 24 (2), 11-26.

Campbell, John and Tuomo Vuolteenaho (2004), Bad beta good beta, *American Economic Review* 94, issue 5, 1249-1275.

Chako, George and Luis Viceira (1999), Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets, NBER working paper no. 7377.

Chen, Joe (2003), Intertemporal CAPM and the cross-section of stock returns, unpublished paper, University of Southern California.

Cochrane, John (2001), *Asset Pricing*, Princeton University Press, Princeton NJ.

Cochrane, John (2005), Financial markets and the real economy. NBER Working Paper no. 11193.

Cochrane, John (2017), Macro-Finance. *Review of Finance*, 2017, 945-985.

Daniel, Kent and Sheridan Titman (1997), Evidence on the characteristics of cross-sectional variation in stock returns, *Journal of Finance* 52, 1-33.

Daniel, Kent and Sheridan Titman (2005), Testing factor-model explanations of market anomalies, unpublished paper, Northwestern University.

Davis, James, Eugene Fama and Kenneth French (2000), Characteristics, covariances and average returns: 1929-1997, *Journal of Finance* 55, 389-406.

Dimson, Elroy (1979), Risk measurement when shares are subject to infrequent trading, *Journal of Financial Economics* 7, 197-226.

Eleswarapu, Venkat and Marc Reinganum (2004), The predictability of aggregate stock market returns: evidence based on glamour stocks, *Journal of Business* 77 (2), 275-294.

Epstein, Lawrence and Stanley Zin (1989), Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: a theoretical framework, *Econometrica* 57, 937-969.

Epstein, Lawrence and Stanley Zin (1991), Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: an empirical investigation, *Journal of Political Economy* 99, 263-286.

Fama, Eugene and Kenneth French (1988), Dividend yields and expected stock returns, *Journal of Financial Economics* 22, 3-27.

Fama, Eugene and Kenneth French (1989), Business conditions and expected returns on stocks and bonds, *Journal of Financial Economics* 25, 23-49.

Fama, Eugene and Kenneth French (1992), The cross-section of expected stock returns, *Journal of Finance* 2, 427-465.

Fama, Eugene and Kenneth French (1993), Common risk factors in the returns on stocks and bonds, *Journal of Financial Economics* 33, 3-56.

Fama, Eugene and Kenneth French (2004), The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence, unpublished paper, University of Chicago.

Guo, Hui (2005), Time-varying risk premia and the cross-section of stock returns, forthcoming Journal of Banking and Finance.

Hansen and Singleton (1983), Stochastic Consumption, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Asset Returns, Journal of Political Economy 91, 249-268.

Hardouvelis, G., D. Malliaropoulos and R. Priestley (2006). EMU and European Stock Market Integration, Journal of Business, vol 79, No. 1, January 2006, pp. 365-392.

Jagannathan, R. and Z. Wang (1996). The conditional CAPM and the cross section of expected returns. Journal of Finance, vol. 51, pp. 3-53.

Koubouros, M., D. Malliaropoulos and E. Panopoulou (2005a). Long-Run Cash-Flow and Discount-Rate Risks in the Cross-Section of US Returns. European Journal of Finance, 2010, pp. 227-244.

Koubouros, M., D. Malliaropoulos and E. Panopoulou (2005b). Temporary and Permanent Market Risks: Some Further Evidence. Mathematical and Computer Modelling, 2007, vol. 46, Issues 1-2, pp. 163-173.

Malliaropoulos D. (1998). Excess Stock Returns and News: Evidence from European Markets. European Financial Management, 1998, vol. 4, pp. 29-46.

Lintner, John (1965), The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets, Review of Economics and Statistics 47, 13-37.

Liu, Naiping and Lu Zhangy (2005), The value spread as a predictor of returns, unpublished paper, NBER working paper, no. 11326.

McQueen, Grant, Michael Pinegar and Steven Thorley (1996), Delayed reaction to good news and the cross-autocorrelation of portfolio returns, Journal of Finance 51, 889-919

Mehra, Rajnish and Edward Prescott (1985), The equity premium: A puzzle, Journal of Monetary Economics 15, 145-161 .

Merton, Robert (1973), An intertemporal capital asset pricing model, Econometrica 41, 867-887.

Parker, Jonathan and Christian Julliard (2005), Consumption risk and the cross-section of expected returns, forthcoming Journal of Political Economy.

Peterson James and Gary Sanger (1995), Cross-autocorrelations, systematic risk and the period of listing, unpublished paper, University of Notre Dame.

Petkova, Ralitsa (2005), Do do the Fama-French factors proxy for innovations in predictive variables?, forthcoming Journal of Finance.

Rozeff (1984), Dividend Yields are Equity Risk Premiums, Journal of Portfolio Management 10, 68-75

Santos, Tano and Pietro Veronesi (2005), Cash-flow Risk, discount risk, and the value premium, NBER working paper, no. 11816.

Scholes, Myron and Joseph Williams (1977), Estimating betas from nonsynchronous data, Journal of Financial Economics 5, 309-327.

Sharpe, William (1964), Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk, Journal of Finance 19, 425-442

Shiller, Robert (2000), Irrational Exuberance, Princeton University Press, Princeton, N.J.

Προβλεψιμότητα

Ang, A. and G. Bekaert (2007). Stock Return Predictability: Is it There? *Review of Financial Studies* 20:641-707.

Barberis, N. (2000). Investing for the Long Run when Returns are Predictable. *Journal of Finance* 55:2219-2257.

Boudouck, J.M. and M. Richardson (1994). The Statistics of Long-Horizon Regressions Revisited. *Mathematical Finance* 2:103-119.

Boudouck, J.M., M. Richardson and R.F. Whitelaw (2008). The Myth of Long-Horizon Predictability. *Review of Financial Studies* 21:1577-1605.

Campbell, J.Y. (2001). Why Long Horizons? A Study of Power Against Persistent Alternatives. *Journal of Empirical Finance* 8:459-91.

Campbell, J.Y. and J.H. Cochrane (1999). By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior. *Journal of Political Economy* 107:205-251.

Campbell, J.Y., A. Lo and C. MacKinlay (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton: Princeton University Press.

Campbell, J.Y. and R.J. Shiller (1989). The Dividend-Price Ratio and Expectations of Future Dividends and Discount Factors. *Review of Financial Studies* 1:195-228.

Campbell, J.Y. and R.J. Shiller (2001). Valuation Ratios and the Long-Run Stock Market Outlook: An Update. Cowles Foundation Discussion Paper No 1295.

Campbell, J.Y. and L. M. Viceira (1999). Consumption and Portfolio Decisions When Expected Returns are Time Varying. *Quarterly Journal of Economics* 114:433-495..

Campbell, J.Y. and L. M. Viceira (2002). *Strategic Asset Allocation. Portfolio Choice for Long-Term Investors*. Oxford University Press.

Campbell, J.Y, S. Giglio, and C. Polk (2010). *Hard Times*, Working Paper, Harvard University.

Chen, L. (2009). On the Reversal of Return and Dividend Growth Predictability: A Tale of two Periods. *Journal of Financial Economics* 92:128-151.

Cochrane, J.H. (1999). New Facts in Finance. *Economic Perspectives* 23:36-58.

Cochrane, J.H. (2004). *Asset Pricing*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Cochrane, J. H. (2008).The Dog That Did Not Bark: A Defense of Return Predictability. *Review of Financial Studies* 21:1533-1575.

Cochrane, J. H. (2010). *Discount Rates*. Working Paper, University of Chicago.

Fama, E.F. and K.R. French (1988). Dividend Yields and Expected Stock Returns. *Journal of Financial Economics* 22:3-25.

Ferson, W.E., S. Sarkissian and T.T. Simin (2003). Spurious Regressions in Financial Economics? *Journal of Finance* 58:1393-1413.

Goetzmann, W.N. and P. Jorion (1993). Testing the Predictive Power of Dividend Yields. *Journal of Finance* 48:663-679.

Keim, D.B. and R.F. Stambaugh (1986). Predicting Returns in the Stock and Bond Markets. *Journal of Financial Economics* 17:357-390.

Kendall, M.G. (1954). Note on Bias in the Estimation of Autocorrelation. *Biometrika* 41:403-404.

Lettau, M. and S. C. Ludvigson (2001). Consumption, Aggregate Wealth and Expected Stock Returns. *Journal of Finance* 56:815-849.

Lettau, M. and S. C. Ludvigson (2005). Expected Returns and Expected Dividend Growth. *Journal of Financial Economics* 76:583-626.

Lettau, M. and S. Van Nieuwerburgh (2006). Reconciling the Return Predictability Evidence. *Review of Financial Studies*.

Malliaropulos D. (1996). Are Long-Horizon Stock Returns Predictable? A Bootstrap Analysis. *Journal of Business Finance & Accounting*, 1996, vol. 23, pp. 93-106.

Malliaropulos D. and R. Priestley (1999). Mean Reversion in South-East Asian Stock Markets, *Journal of Empirical Finance*, 1999, vol. 6, pp. 355-384.

Malliaropulos, D. and R. Priestley (2011). Stock prices, Returns, and Dividend Yields. Unpublished Discussion Paper.

Nelson, C.R. and M.J. Kim (1993). Predictable Stock Returns. The Role of Small Sample Bias. *Journal of Finance* 48:641-661.

Rozeff, M.S. (1984). Dividend Yields Are Equity Risk Premiums. *Journal of Portfolio Management* 11:68-75.

Stambaugh, R.F. (1986). Bias in Regressions with Lagged Stochastic Regressors. Manuscript, University of Chicago.

Stambaugh, R.F. (1999). Predictive Regressions. *Journal of Financial Economics* 54:375-421.

Valkanov, R. (2003). Long-Horizon Regressions: Theoretical Results and Applications. *Journal of Financial Economics* 68:201-232.

Επιλογή χαρτοφυλακίου

Affleck-Graves J. and Mc Donald B. (1989), Nonnormalities and Tests of Asset Pricing Theories, *Journal of Finance*, 46-4, pp. 889-908.

Britten-Jones M. (1999), The Sampling Error in Estimates of Mean-Variance Efficient Portfolio Weights, *Journal of Finance*, 54-2, pp. 655-671.

Campbell J. H., Lo A. W., MacKinlay A. C. (1997), *The Econometrics of Financial Markets* (2nd edition), Princeton.

Fama, E. (1996), Multifactor Portfolio Efficiency and Multifactor Asset Pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31-4, pp. 441-465.

French K. R. and Poterba J.M. (1991), Investor Diversification and International Equity Markets, *American Economic Review*, 81-2, pp. 222-226.

Gibbons M.R. (1982), Multivariate Tests of Financial Models: A New Approach, *Journal of Financial Economics*, 10, pp. 3-28.

Gibbons M.R., Ross S.A. and Shanken J. (1989), A Test of the Efficiency of a Given Portfolio, *Econometrica*, 57-5, pp. 1121-1152.

James W. and C. Stein (1961), Estimation with quadratic loss. In: *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics and Statistics*, pp. 361-379.

Kandel S. (1984), The Likelihood Ratio Test Statistic of Mean-Variance Efficiency without a Riskless Asset, *Journal of Financial Economics*, 13, pp. 575-592.

MacKinlay A.G. (1987), On Multivariate Tests of the CAPM, *Journal of Financial Economics*, 18, pp. 341-371.

MacKinlay A.G. and Richardson M.P. (1991), Using Generalized Method of Moments to Test Mean-Variance Efficiency, *Journal of Finance*, 46-2, pp. 511-527.

Markowitz H. (1952), Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7-1, pp. 77-91. Shanken J. (1985), Multivariate Tests of the Zero-Beta CAPM, *Journal of Financial Economics*, 14, pp. 327-348.

Michaud, R.O. (1989), The Markowitz optimization enigma: Is optimized optimal?, *Financial Analysts Journal* 45, pp. 31-42.

Shanken J. (1986), Testing Portfolio Efficiency when the Zero Beta is Unknown: A Note, *Journal of Finance*, 41-1, pp. 269-276.

Sharpe, W. (1963), A simplified model for portfolio analysis. *Management Science* 9, pp. 277-293.